目次

11 空間概念

1. 空間概念

兩直線的關係

平行、交於一點、重合、歪斜

直線與平面的關係

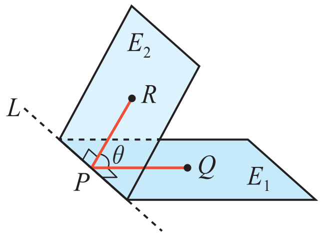
平行、交於一點、直線落在平面上

兩平面的關係

不相交（平行）、交於一直線、重合

兩面角

$\angle QPR$ 為半平面 E_1、E_2 的兩面角



2. 空間坐標系

若 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$ 為空間中的兩點，則：

⑴空間中兩點之間的距離：$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

⑵分點公式：在空間中，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 P 點坐標為

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n},\frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$

3. 球面的經、緯線與圓錐曲線

⑴設 A、B 為球面上相異兩點，則恰有一「大圓」通過 A、B 兩點，且此大圓上的 $\overset{\frown}{AB}$ 長為球面上 A 點到 B 點的最短距離

⑵兩經線之間的經距在赤道時最長，緯度愈大時經距愈短。兩緯線在不同經度時的緯距相等

⑶設一直圓錐的軸為 L，頂角為 2θ，設平面 E 不通過直圓錐的頂點

①若平面 E 與直圓錐的軸 L 夾角 $\alpha=90^\circ$，則平面 E 與直圓錐的截痕為圓

②若平面 E 與直圓錐的軸 L 夾角 $\alpha>\theta$，則平面 E 與直圓錐的截痕為橢圓

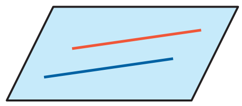
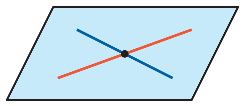
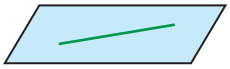
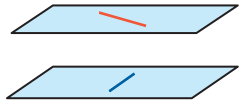
③若平面 E 與直圓錐的軸 L 夾角 $\alpha=\theta$，即平面 E 平行母線，則平面 E 與直圓錐的截痕為拋物線

④若平面 E 與直圓錐的軸 L 夾角 $\alpha<\theta$，則平面 E 與直圓錐的截痕為雙曲線

概念 1 空間概念

學測 107・108・109・110・111A

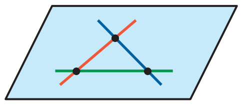
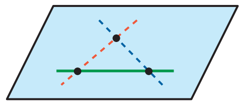
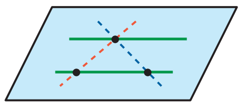
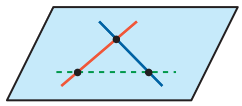
1. **空間中兩直線的關係**

①平行	②恰交於一點
	
③重合	④歪斜（不平行也不相交）
	

註 ①②③的情形兩直線共平面，④的情形兩直線不共平面。

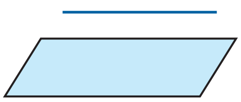
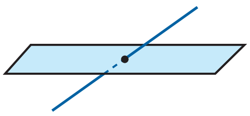
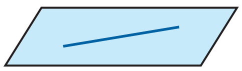
2. **直線與平面**

(1) 空間中決定一平面

①不共線三點	②一直線與線外一點
	
③兩平行直線	④兩相交直線
	

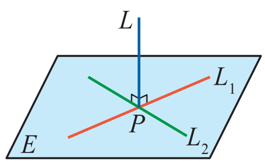
註 ②③④的情形都可以找到不共線三點（如實線與虛線的交點），形成①的情況。

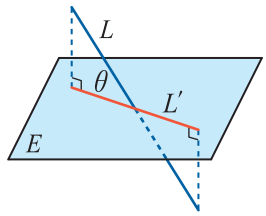
(2) 空間中直線與平面的關係

直線與平面平行	直線與平面恰交於一點	直線落在平面上
		

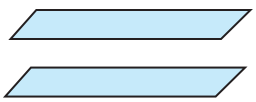
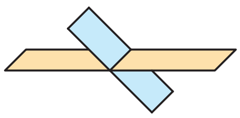
(3) 若直線 L 與平面 E 恰交於 P 點，且在平面 E 上通過 P 點的任意直線都與直線 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直（$L \perp E$）。

(4) 當直線 L 與平面 E 不垂直且交於一點，若 L 在平面 E 上的正射影為 L'，則 L 與 L' 的夾角 θ 稱為直線 L 與平面 E 的夾角。





(5) 空間中兩平面 E_1 與 E_2 的相交情形

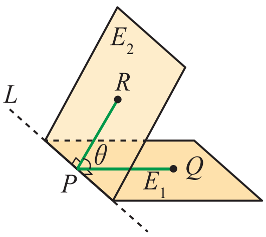
E_1 與 E_2 不相交（平行）	E_1 與 E_2 交於一直線	E_1 與 E_2 重合
		

(6) 兩面角：如圖(一)，直線 L 為兩相異半平面 E_1 與 E_2 的共同邊界，在 L 上取一點 P。若 $\overline{PQ}\in E_1$，$\overline{PR}\in E_2$，且 $\overline{PQ}\perp L$，$\overline{PR}\perp L$，則 $\angle QPR$ 為半平面 E_1 與 E_2 的兩面角。

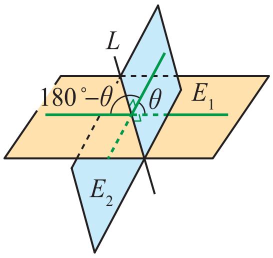
(7) 兩平面的夾角：如圖(二)，若兩平面 E_1 與 E_2 交於一直線 L，會形成四個兩面角，其中一組對應相等，另一組則為其補角。

①若兩面角為直角，則稱此兩平面垂直。

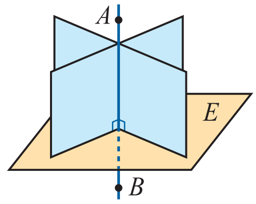
②如圖(三)，若 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直平面 E，則所有包含 $\overleftrightarrow{AB}$ 的平面，都與平面 E 垂直。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

範例 1 空間概念

已知 A、B、C、D 為空間中相異四點，且 A、B、C 三點不共線，試問下列敘述哪些正確？

______

(A)若 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 平行，則 A、B、C、D 共平面

(B)若 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於一點，則 A、B、C、D 共平面

(C)若 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AC}$，則 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直平面 ABC

(D)若 $\angle ACD=\angle BCD=90^\circ$，則 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直平面 ABC

(E)若 D 點不在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上，則恰有一直線通過 D 點且與 $\overleftrightarrow{AB}$ 平行

類題 1

關於空間中的平面與直線，試判斷下列敘述哪些正確？______

(A)不相交的直線必為平行線

(B)若直線 L 垂直平面 E，且 L 與 E 交於 P 點，則在平面 E 上通過 P 點的任一直線均與 L 垂直

(C)設 L_1 和 L_2 為兩相異直線，若直線 L_1 垂直平面 E，直線 L_2 也垂直平面 E，則 L_1、L_2 必平行

(D)設 E_1 和 E_2 為兩相異平面，若平面 E 垂直平面 E_1，也垂直平面 E_2，則 E_1、E_2 必平行

(E)兩相異平面必有一公垂面

範例 11　經距與緯距

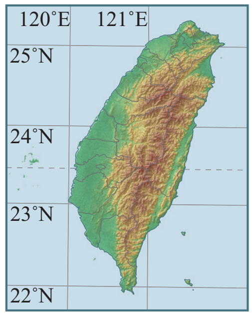
下表為臺灣本島極東、極西、極南、極北處的經緯度：

	極東——三貂角	極西——曾文溪口	極南——鵝鑾鼻	極北——富貴角
經度（東經）	122.00 度	120.05 度	120.83 度	121.54 度
緯度（北緯）	25.00 度	23.05 度	21.89 度	25.31 度

已知地球半徑約為 6371 公里，$6371\times\cos 23.5^\circ \approx 5843$，$6371\times\sin 121^\circ \approx 5461$，試問：

(1) 由上表可推算出，臺灣本島南北端的緯度 21.89 度到 25.31 度在東經 121 度的經線上的弧約為 0.060 弳（3.42 度），則緯距約為＿＿＿＿公里。（約至整數）

(2) 由上表可推算出，臺灣本島東西端的經度 120.05 度到 122.00 度在北緯 23.5 度的緯線上的弧約為 0.034 弳（1.95 度），則經距約為＿＿＿＿公里。（約至整數）



類題 11

有一半徑為 30 公分的地球儀，小臻發現俄羅斯的聖彼德堡約在東經 30 度，北緯 60 度的位置上，小臻沿著相同的緯線，找到西經 150 度，北緯 60 度的位置為美國的阿拉斯加州基奈半島上的國家公園。試問這兩處在地球儀上的經距約為＿＿＿＿公分。（約至一位小數，圓周率約為 3.1416）

綜合實力測驗

一、單選題

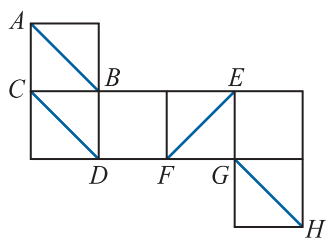
＿＿＿ 1. 右圖為一正立方體的展開圖，若將此展開圖摺成正立方體後，關於下列直線在空間中的關係，何者正確？

(A) $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{GH}$ 歪斜，$\overleftrightarrow{CD}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 歪斜

(B) $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{GH}$ 歪斜，$\overleftrightarrow{CD}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行

(C) $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{GH}$ 平行，$\overleftrightarrow{CD}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 歪斜

(D) $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{GH}$ 平行，$\overleftrightarrow{CD}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行



______ 2. 在空間坐標中，下列哪一點與 $P(2,-3,-4)$ 的距離最遠？

(A) $A(0,0,0)$　(B) $B(1,1,-1)$

(C) $C(-1,-1,1)$　(D) $D(-1,1,-1)$

(E) $E(1,-1,1)$

______ 3. 在空間中有三點 $A(1,2,1)$、$B(2,2,1)$、$C(1,2,3)$，試問 ΔABC 為何種三角形？

(A)正三角形　(B)頂點在 A 點的等腰三角形

(C) $\angle A$ 為直角的直角三角形　(D) $\angle B$ 為直角的直角三角形

(E) $\angle A$ 為鈍角的鈍角三角形

二、多選題

______ 4. 坐標平面上有一點 $A(4,-2,3)$，試問下列選項哪些正確？

(A) A 點到 y 軸的直線距離為 5

(B) A 點在 x 軸上的投影點坐標為 $(4,0,0)$

(C) A 點到 xz 平面的距離為 5

(D) A 點到 yz 平面的投影點坐標為 $(0,-2,3)$

(E) A 點對 z 軸的對稱點坐標為 $(4,-2,-3)$

______ 5. 在球面上，A 點的經緯度為 60°E，30°N，B 點的經緯度為 30°W，30°N，C 點的經緯度為 60°E，60°S，假設球心為 O 點，赤道的周長為 d。試問下列選項哪些正確？

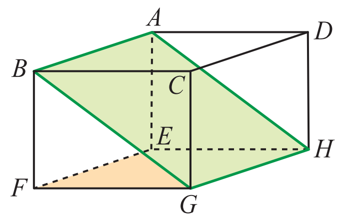
(A) A 點到 B 點的經距等於 $\dfrac{d}{8}$　(B) A 點到 C 點的緯距等於 $\dfrac{d}{4}$

(C) $\angle AOB=90^\circ$　(D) $\angle AOC=90^\circ$

(E) $\angle BAC=90^\circ$

三、填充題

6. 如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 的邊長 $\overline{AB}=7$，$\overline{AE}=6$，$\overline{AD}=8$，設 $\overline{DH}$ 與平面 $ABGH$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=$ ______。



7. 在球面上，A 點的經緯度為 36°N，100°E，試問：

(1)若從 A 點沿著緯線往東橫跨 90° 的經度，可抵達 B 點，則 B 點的經緯度為 ______。

(2)若從 A 點沿著緯線往南跨越 90° 的緯度，可抵達 C 點，則 C 點的經緯度為 ______。

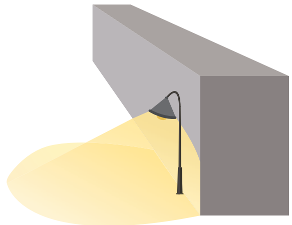
(3) A 點的對蹠點（球體直徑的另一端點）的經緯度為 ______。

11 空間概念

8. 如右圖，牆面旁邊有一路燈，燈罩為直圓錐形，且燈罩的軸與燈柱形成的平面垂直牆面，也垂直地面。設直圓錐燈罩的軸與地面夾角約為 70°，頂角約為 120°。試問：

(1)此燈光在牆面上的光影邊緣為什麼形狀？________

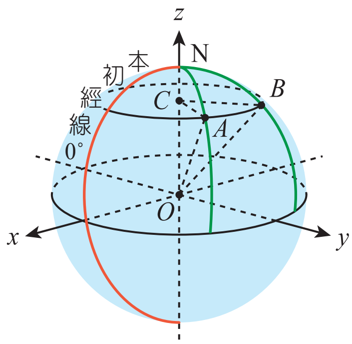
(2)此燈光在地面上的光影邊緣為什麼形狀？________



9. 在空間中有一質點以等速直線運動，當第 2 秒時，此質點在坐標為 $(1,-4,-9)$ 的位置，當第 8 秒時，此質點在坐標為 $(4,2,9)$ 的位置，則第 4 秒時，此質點在坐標為________的位置。第____秒之後，此質點會移動到第一卦限。

10. 在空間坐標系中，有一半徑為 4 的球，球心在原點 O，本初經線在 xz 平面上。球面上有兩點 A、B，已知 A 的經緯度為 60°E，45°N，B 點的經緯度為 120°E，45°N，設北緯 45 度緯線的圓心為 C 點，試問：(1) A 點的空間坐標為________

(2) A、B 兩點的經距為________ (3) $\cos\angle AOB=$______。



四、混合題

11. 在空間坐標系中，點 $A(a,8,b)$ 投影在 xy 平面上的點坐標為 $(6,c,d)$，點 A 投影在 xz 平面上的點坐標為 $(e,f,15)$。

(1)關於 a,b,c,d,e,f 的值，下列哪些選項正確？（多選題）________

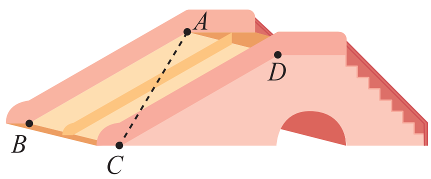
(A) $a=e$ (B) $b=d$ (C) $f=8$ (D) $c=8$ (E) $d=0$

(2)設 A 點在 x 軸上的投影點為 B 點，A 點在 yz 平面上的投影點為 C 點，則下列哪一點在平面 ABC 上？（單選題）______

(A) $(0,0,0)$ (B) $(0,8,0)$ (C) $(6,8,0)$ (D) $(0,0,15)$ (E) $(6,0,15)$

(3)承(2)，設平面 ABC 與 xy 平面的兩面角為 θ，則 $\sin\theta=$______。

12. 公園有一溜滑梯，上方平臺與地面平行，滑梯斜坡的部分 $ABCD$ 為一矩形，對角線 $\overline{AC}=560$ 公分，滑梯斜坡的坡度其水平與垂直的比為 $2:1$。共有 8 階樓梯，每階高 30 公分。



(1)設滑梯斜坡的部分與地面所成的兩面角為 θ，則 $\sin\theta=$______。

(2)滑梯斜坡的部分矩形 $ABCD$ 的面積為多少平方公分？（單選題）______

(A) $384\sqrt{5}$ (B) 33600 (C) $33600\sqrt{5}$ (D) 38400 (E) $38400\sqrt{5}$

精選歷屆試題

一、單選題

____ 1. 假設地球為一半徑 r 的球體，有一質點自甲地沿著該地所在經線往北移動，抵達北極點時移動所經過的弧線之長度為 $\frac{7}{12}\pi r$。試問哪一個選項最可能是甲地的位置？

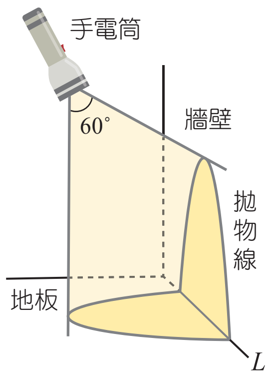
(A)東經 75°、北緯 15°　(B)東經 30°、南緯 75°　(C)東經 75°、南緯 15°
(D)西經 30°、北緯 75°　(E)西經 15°、南緯 30°

111 學測 B | 答對率 53%

____ 2. 已知某手電筒照射的光線為直圓錐狀，且光發散的夾角為 60°，如右圖所示。設牆壁與地板垂直且交界處為直線 L，將此手電筒以垂直於 L 的方向照射，即此直圓錐的軸與 L 垂直。若手電筒照射在牆壁上的光線邊緣為拋物線的一部分，則在地板上的光線邊緣為下列哪種圖形的一部分？

(A)兩相交直線　(B)圓形　(C)拋物線
(D)長短軸不相等的橢圓　(E)雙曲線

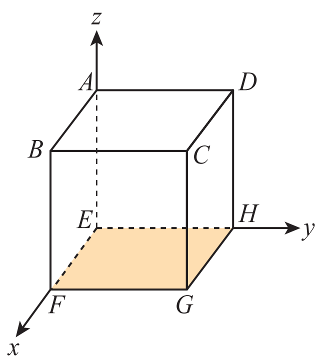
112 學測 B | 答對率 30%



二、多選題

____ 3. 如右圖所示，正立方體的邊長為 2，其中點 E 為原點，點 F、點 H、點 A 的坐標分別為 $(2,0,0)$、$(0,2,0)$、$(0,0,2)$。令 Ω 表示四面體 $CBGD$ 與四面體 $BAFC$ 相交所形成的四面體。請選出正確的選項。____

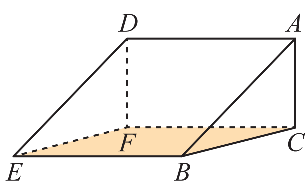
(A) Ω 有一頂點坐標為 $(1,1,2)$
(B) Ω 有一稜線其方向向量為 $(1,0,-1)$
(C) Ω 有兩個側面互相垂直
(D) Ω 僅有一個側面是正三角形
(E) Ω 的體積為 $\frac{2}{3}$（註：四面體的體積為 $\frac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高）



101 指考甲 | 全對率 39%

____ 4. 右圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形，$\angle ACB=90°$，$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=6$，且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。

(A)將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體
(B)平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°
(C) $\angle CEB<\angle AEB$
(D) $\tan\angle AEC<\sin\angle CEB$
(E) $\angle CEB<\angle AEC$



111 學測 A | 全對率 16%

11 空間概念

______ 5. 在球心為 O 的球形地球儀上，有 A、B、C、D、E 五個點，其中 A、B、C 三點都在赤道上，且經度分別為東經 0°、60° 和 90°；D、E 兩點都在北緯 30° 線上，且經度分別為東經 0°、180°。試選出正確的選項。

(A)赤道的長度等於東經 0° 和 180° 這兩條經線長度的總和

(B)北緯 45° 線的長度等於赤道長度的 $\frac{1}{2}$

(C)「由 A 沿赤道移動到 B 的最短路徑長」等於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點的路徑長」

(D)「由 D 沿北緯 30° 線移動到 E 的路徑長」等於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點，再由北極點沿東經 180° 經線移動到 E 的路徑長的總和」

(E)通過北極點與 A 點的直線與通過北極點與 C 點的直線互相垂直　112 學測 B | 全對率 12%

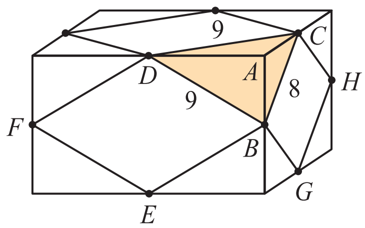
三、填充題

6. 在四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$，$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，且 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，則點 D 到平面 ABC 的距離為 ______。　110 學測 | 答對率 21%

7. 在空間坐標系中，有一球心坐標在 $O(0,0,0)$ 且北極點在 $N(0,0,2)$ 的地球儀。已知球面上點 A 坐標為 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})$，赤道上距離點 A 最遠的點為點 P，則在通過點 A、點 P 的大圓上這兩點的劣弧長為 ______。（化為最簡分數）　113 學測 B

四、混合題

8. 如右圖所示，考慮長方體的石塊上某一頂點 A 及包含點 A 的一個面，令這個面的各邊中點分別為 B,E,F,D。此長方體上包含點 B 的另一個面，令其各邊中點分別為 B,C,H,G。已知 $\overline{BC}=8$，$\overline{BD}=\overline{DC}=9$。現將此石塊截去八個角，使得每個截角的截面恰通過該截角之三鄰邊的中點。根據上述，試回答下列問題。　113 學測 B



(1)截角後的石塊為幾面體？______

(A)八面體　(B)十面體　(C)十二面體

(D)十四面體　(E)十六面體

(2)試求 ΔBCD 的面積。______

(3)試求 $\overline{AD}$ 的長度與四面體 $ABCD$ 的體積，並求此四面體以 ΔBCD 為底面時，頂點 A 到底面的高度。（角錐體積 $=\frac{底面積\times高}{3}$）______

11 空間概念

得 $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB_2}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA_2}=\frac{1}{3}(1,\frac{11}{3})+\frac{2}{3}(1,-\frac{1}{3})=(1,1)$

所以知 Q 之坐標為 $(1,1)$

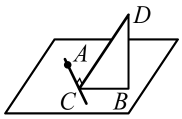
11 空間概念

62 **範例 1** (A)(B)(D)(E)

(A)兩平行直線決定一平面

(B)兩相交直線決定一平面

(C)反例：



(D)直線垂直平面的定義

(E) A、B、D 三點決定一平面，而通過 D 點且與 $\overleftrightarrow{AB}$ 平行的直線必在此平面上

類題 1 (B)(C)(E)

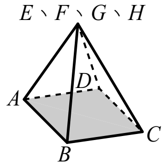
(A)可能歪斜　(B)此為直線 L 與平面 E 垂直的定義

(D)三平面可能相交於一點，反例：如空間中的 xy 平面、yz 平面和 xz 平面

(E)若兩平面 E_1、E_2 平行，則垂直 E_1 的平面必垂直 E_2，若 E_1、E_2 不平行，則 E_1、E_2 必相交於一直線，與此直線垂直的平面即為 E_1、E_2 的公垂面

63 **範例 2** (C)(E)

組合後如右圖所示

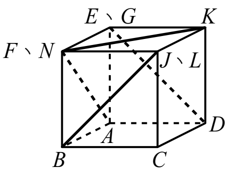


可知 $\overleftrightarrow{BC}$ 和 $\overleftrightarrow{BF}$ 都與 $\overleftrightarrow{AB}$ 相交於 B 點

$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 平行，$\overleftrightarrow{CF}$ 和 $\overleftrightarrow{DG}$ 都與 $\overleftrightarrow{AB}$ 歪斜

類題 2 (A)(C)(D)

將之組合後如右圖



可知 $\overleftrightarrow{BJ}$ 和 $\overleftrightarrow{GD}$、$\overleftrightarrow{AF}$ 和 $\overleftrightarrow{BJ}$、$\overleftrightarrow{AE}$ 和 $\overleftrightarrow{LN}$ 均為歪斜線

$\overleftrightarrow{AF}$ 和 $\overleftrightarrow{KN}$ 交於一點，$\overleftrightarrow{AE}$ 和 $\overleftrightarrow{CJ}$ 平行

範例 3 (C)(D)(E)

可畫出截面如下圖，可知

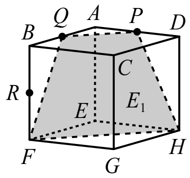
(A)平面 E_1 與正立方體的截面為四邊形，如圖(一)

(B)平面 E_2 與正立方體的截面為六邊形，如圖(二)

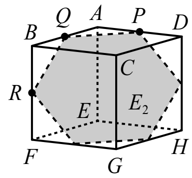
(C)平面 E_3 與正立方體的截面為五邊形，如圖(三)

(D)平面 E_1 會將正立方體分割的多面體中，如圖(一)，包含 A 點的多面體有上、下底面、兩個直立的側面和斜面 $PQFH$，為一個五面體。另一個多面體有原來正六面體的六個面和斜面 $PQFH$，為一個七面體

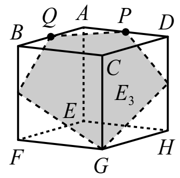
(E)平面 E_2 會將正立方體分割成兩塊全等的多面體，這兩塊多面體中，都有原來正六面體的六個面和斜面 $PQFH$，故所分割的兩塊多面體都是七面體



圖(一)



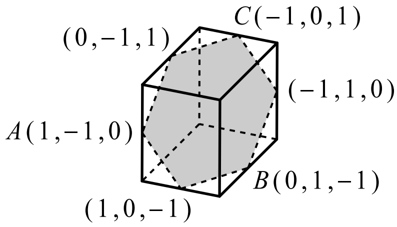
圖(二)



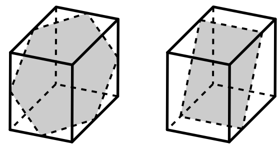
圖(三)

64 **類題 3** (1)(B)　(2)(B)(D)

(1)因為 A、B、C 為正立方體三稜邊的中點，所以平面 E 與正立方體所截的平面為一正六邊形，如右圖，故稜邊的交點除了 A、B、C 三點之外還有 $(0,-1,1)$、$(1,0,-1)$ 和 $(-1,1,0)$



(2)如右圖，有六邊形和四邊形兩種情形



範例 4 (1) $\frac{3}{5}$　(2) $\frac{2\sqrt{145}}{29}$　(3) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

(1) $\overleftrightarrow{BG}$ 在平面 $ABFE$ 的正射影為 $\overleftrightarrow{BF}$，所以 $\alpha=\angle GBF$

故 $\cos\alpha=\frac{\overline{BF}}{\overline{BG}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$

(2) $\overleftrightarrow{AG}$ 在平面 $EFGH$ 的正射影為 $\overleftrightarrow{EG}$，所以 $\beta=\angle AGE$

故 $\cos\beta=\frac{\overline{EG}}{\overline{AG}}=\frac{\sqrt{2^2+4^2}}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{2\sqrt{145}}{29}$

(3)平面 ADG 與平面 $AEHD$ 的兩面角為 $\angle GDH$

所以 $\cos\theta=\cos\angle GDH=\frac{\overline{DH}}{\overline{DG}}=\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

類題 4 (1) $\frac{\sqrt{17}}{5}$　(2) $\frac{5\sqrt{41}}{41}$

(1) $\overleftrightarrow{BH}$ 在平面 $EFGH$ 的正射影為 $\overleftrightarrow{FH}$，所以 $\alpha=\angle BHF$

故 $\cos\alpha=\frac{\overline{FH}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{3^2+5^2}}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{17}}{5}$

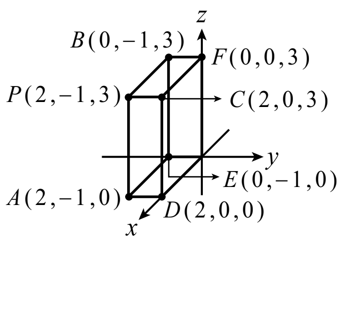
(2)平面 $ABGH$ 與平面 $EFGH$ 的兩面角為 $\angle BGF$

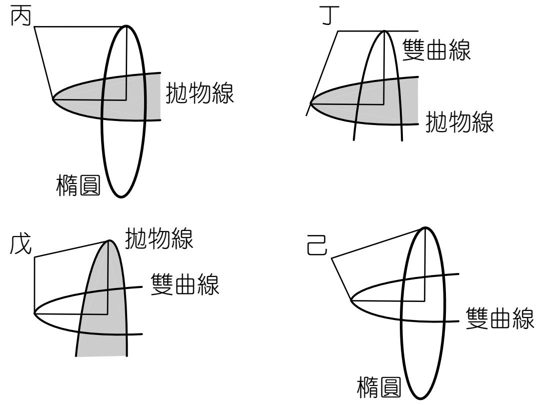
所以 $\cos\beta=\cos\angle BGF=\frac{\overline{FG}}{\overline{BG}}=\frac{5}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{5\sqrt{41}}{41}$

65 **範例 5** (1)① $(2,-1,0)$　② $(0,-1,3)$　③ $(2,0,3)$　④ $(2,0,0)$　⑤ $(0,-1,0)$　⑥ $(0,0,3)$

(2) $\sqrt{14}$

(2) $\overline{AF}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{14}$





範例 10 (1)(C) (2) 121°37′33.0″E，23°03′14.4″N

(1)(A) 22°46′52.8″E，31°38′36.6″N

(B) 22°46′52.8″E，31°38′36.6″S

(C) 121°38′36.6″E，22°46′52.8″N

(D) 121°38′36.6″W，22°46′52.8″N

71 **範例 11** (1) 382 (2) 199

(1)兩緯線在不同經度時的緯距相等

所以緯距（弧長）$= r\theta = 6371\times 0.060 \approx 382$ 公里

(2)在北緯 23.5 度的緯線，其半徑為 $6371\times\cos 23.5^\circ$，故經距為 $6371\times\cos 23.5^\circ\times 0.034 \approx 5843\times 0.034 \approx 199$ 公里

類題 11 47.1

北緯 60 度線的半徑為 $30\times\cos 60^\circ = 15$ 公分，在北緯 60 度的圓上，東經 30 度到西經 150 度的圓心角為 180 度 $=\pi$ 弳

故經距為 $15\times\pi = 15\pi \approx 47.1$ 公分

綜合實力測驗

1.(D) 2.(C) 3.(C) 4.(A)(B)(D) 5.(B)(D) 6. $\frac{3}{5}$

7.(1) 36°N，170°W (2) 54°S，100°E (3) 36°S，80°W

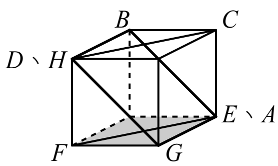
8.(1)雙曲線 (2)橢圓 9. $(2,-2,-3)$；6

10.(1) $(\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{2})$ (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (3) $\frac{3}{4}$

11.(1)(A)(D)(E) (2)(A) (3) $\frac{15}{17}$ 12.(1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2)(E)

1.若以平面 EFG 為底面摺成的立體圖如右，可知

$\overleftrightarrow{AB}\,/\!/\,\overleftrightarrow{GH}$，$\overleftrightarrow{CD}\,/\!/\,\overleftrightarrow{EF}$



72 2. $\overline{AP} = \sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{29}$

$\overline{BP} = \sqrt{(2-1)^2+(-3-1)^2+[-4-(-1)]^2} = \sqrt{26}$

$\overline{CP} = \sqrt{[2-(-1)]^2+[-3-(-1)]^2+(-4-1)^2} = \sqrt{38}$

$\overline{DP} = \sqrt{[2-(-1)]^2+(-3-1)^2+[-4-(-1)]^2} = \sqrt{34}$

$\overline{EP} = \sqrt{(2-1)^2+[-3-(-1)]^2+(-4-1)^2} = \sqrt{30}$

$\therefore\ \overline{CP}$ 的距離最遠

3. $\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2+(2-2)^2+(1-1)^2} = 1$

$\overline{BC} = \sqrt{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(3-1)^2} = 2$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

故 ΔABC 是以 $\angle A$ 為直角的直角三角形

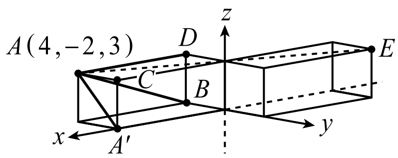
4.(A) $\overline{AB} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

(B) $A'(4,0,0)$

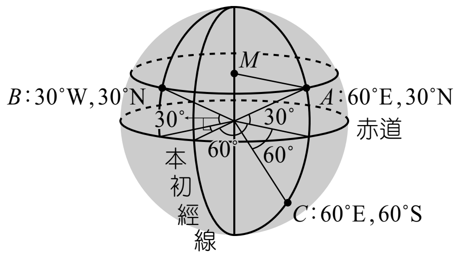
(C) $\overline{AC} = 2$

(D) $D(0,-2,3)$

(E) $E(-4,2,3)$



5.



(A)設球心為 O 點，30°N 的緯線所在的小圓圓心為 M

則 $\angle OAM = 30^\circ$

$\therefore\ \overline{AM} =$ 赤道半徑 $\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 A、B 兩點經度相差 90°

$\therefore\ A$、B 之間的經距 $=\overline{AM}\times\frac{\pi}{2}$

$=$ 赤道半徑 $\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{2} =$ 赤道半徑 $\times 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}d$

(B) A、C 兩點緯度相差 90 度

$\therefore\ A$、C 之間的緯距為 $\frac{1}{4}$ 個大圓周長 $=\frac{1}{4}d$

(C)設赤道半徑為 r，則 $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}r$，又 $\overline{OA} = \overline{OB} = r$

則 $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2 = 2r^2 \neq (\frac{\sqrt{6}}{2}r)^2 = \overline{AB}^2$ $\therefore\ \angle AOB \neq 90^\circ$

(D)相同經線上兩點緯度相差 90 度，則其圓心角 $\angle AOC = 90^\circ$

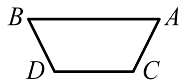
(E)設 D 點在 30°W，60°S 的位置

又 C、D 都在南緯 60 度的緯線上，經度相差 90 度

而 A、B 都在北緯 30 度的緯線上，經度相差 90 度

$\therefore\ \overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$，且 $\overline{AB} > \overline{CD}$

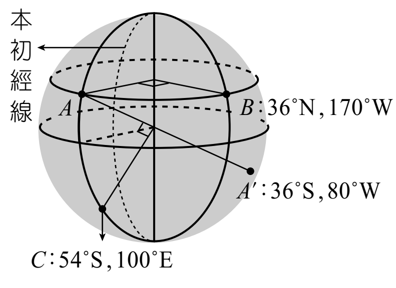
$\therefore\ ABCD$ 為梯形，且 $\angle BAC$ 為銳角



6. $\overline{DH}$ 在平面 $ABGH$ 的投影落在 $\overline{AH}$ 上 $\therefore\ \theta = \angle DHA$

又 $\overline{AH} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ $\therefore\ \cos\theta = \cos\angle DHA = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

7.



73 8.⑴牆面與圓錐形燈罩的軸夾角 $20^\circ <$ 燈罩頂角的一半 60°

$\therefore$ 在牆面上的光影為雙曲線

⑵地面與圓錐形燈罩的軸夾角 $70^\circ >$ 燈罩頂角的一半 60°

$\therefore$ 在地面上的光影為橢圓

9.①在第 2 到第 8 秒移動了

$(4-1,2-(-4),9-(-9))=(3,6,18)$

$\therefore$ 在第 2 到第 4 秒移動了 $\frac{1}{3}(3,6,18)=(1,2,6)$

故點坐標為 $(1,-4,-9)+(1,2,6)=(2,-2,-3)$

② x 坐標都 >0

y 坐標 6 秒增加 6 單位　$\therefore$ 每秒增加 1 單位

z 坐標 6 秒增加 18 單位　$\therefore$ 每秒增加 3 單位

故從 $(1,-4,-9)$ 要在 4 秒之後才會移到第一卦限

即在第 $2+4=6$ 秒之後才會移到第一卦限

10.⑴設 A 點在 xy 平面上的投影點為 D

$\overline{OD}=\overline{OA}\cos 45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

則 A 點坐標 $=(\overline{OD}\cos 60^\circ,\overline{OD}\sin 60^\circ,\overline{OA}\sin 45^\circ)$

$=(2\sqrt{2}\times\frac{1}{2},2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2},4\times\frac{\sqrt{2}}{2})$

$=(\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{2})$

⑵ $\overline{CA}=\overline{OD}=2\sqrt{2}$

$\because$ A、B 都在北緯 45 度的緯線上，且經度相差 60 度，即 $\frac{\pi}{3}$ 弳

$\therefore$ A、B 兩點的經距 $=\overline{CA}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

⑶ $\because$ $\overline{CA}=\overline{CB}$ 且 $\angle ACB=60^\circ$　$\therefore$ ΔABC 是正三角形

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{CA}=2\sqrt{2}$，由餘弦定理知

$\cos\angle AOB=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OB}}=\frac{4^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 4\times 4}=\frac{3}{4}$

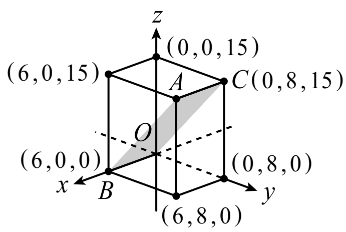
11.⑴點 $A(a,8,b)$ 在 xy 平面上的投影點

$(a,8,0)=(6,c,d)$　$\Rightarrow$　$a=6$，$c=8$，$d=0$

點 $A(a,8,b)$ 在 xz 平面上的投影點

$(a,0,b)=(e,f,15)$　$\Rightarrow$　$a=e=6$，$f=0$，$b=15$

⑵ $A(6,8,15)$，可畫出 A 點在空間坐標系中的位置，故知 A、B、O、C 四點共平面



⑶設 $D(6,8,0)$，由圖可知，平面 ABC 與 xy 平面的兩面角 $\theta=\angle ABD$

又 $\overline{AB}=\sqrt{(6-6)^2+(8-0)^2+(15-0)^2}=17$

$\therefore$ $\sin\theta=\sin\angle ABD=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{15}{17}$

12.⑴設 D 點在地面上的投影點為 E，則斜坡與地面的兩面角 $=\angle DCE$，又 $\overline{CE}$ ：$\overline{DE}$ $=2:1$

$\therefore$ $\sin\theta=\sin\angle DCE=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

⑵平臺高度 $=\overline{DE}=8$ 階階梯高度 $=8\times 30=240$ 公分

$\therefore$ $\overline{CE}=2\times 240$ 公分 $=480$ 公分，設 $\overline{AD}=x$ 公分

則 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2+\overline{CE}^2$

$\Rightarrow$　$x^2+240^2+480^2=560^2$

$\therefore$ $x^2=560^2-240^2-480^2=25600$　$\therefore$ $x=160$

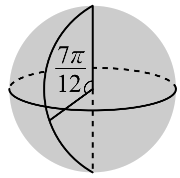
故 $ABCD$ 面積 $=160\times 240\sqrt{5}=38400\sqrt{5}$ 平方公分

精選歷屆試題

1.(C)　2.(D)　3.(A)(B)(C)　4.(B)(C)(D)　5.(A)(C)

6. $4\sqrt{2}$　7. $\frac{4\pi}{3}$　8.(1)(D)　(2) $46\sqrt{5}$　(3) $\frac{28\sqrt{65}}{65}$

74 1. $\frac{7}{12}\pi r$ 對應圓心角 $\frac{7}{12}\pi$ 弳



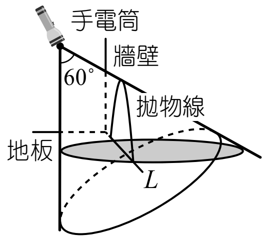
相當於 $\frac{7}{12}\times 180^\circ=105^\circ$

$105^\circ-90^\circ=15^\circ$

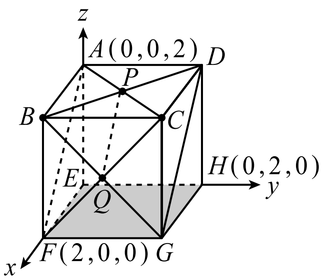
$\therefore$ 甲地位於南緯 15°

2. $\because$ 在牆壁上的光線邊緣為拋物線

$\therefore$ 牆壁平行母線可畫圖判斷知，在地板上的光線邊緣為橢圓



3.如下圖所示



$\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 交於 $P(1,1,2)$

$\overline{BG}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 $Q(2,1,1)$，可得四面體 $PBCQ$

(A) Ω 有一頂點 $P(1,1,2)$

(B) $\overrightarrow{PQ}=(2,1,1)-(1,1,2)=(1,0,-1)$

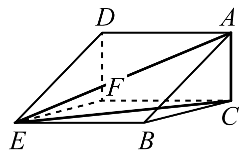
(C) ΔPBC 面 $\perp$ ΔBCQ 面

(D) ΔPBQ 和 ΔPCQ 皆為正三角形

(E)底面積 $\Delta PBC=\frac{2\times 2}{4}=1$，高為 1

$\Rightarrow$　體積 $=\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$

4.(A) E-$ADFC$ 是四角錐（五面體）



(B)夾角為 $\angle BAC$

$\tan\angle BAC=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{6}{5}>\tan 45^\circ$

$\therefore$ $\angle BAC>45^\circ$

(C) $\tan\angle CEB=\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$，$\tan\angle AEB=\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$　$\because$ $\overline{AB}>\overline{BC}$

$\therefore$ $\tan\angle AEB>\tan\angle CEB$，故 $\angle CEB<\angle AEB$

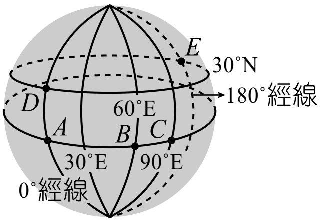
(D) $\tan\angle AEC=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}<\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}=\sin\angle CEB$

(E)由(D)，$\tan\angle AEC<\sin\angle CEB=\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$，又 $\overline{EC}>\overline{EB}$

$\therefore$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}<\frac{\overline{BC}}{\overline{EB}}=\tan\angle CEB$　$\therefore$ $\tan\angle AEC<\tan\angle CEB$

故 $\angle AEC<\angle CEB$

75 5.(A) 0° 和 180° 經線可圍成大圓，所以長度總和與赤道相同



(B)設球半徑為 r，則北緯 45° 線半徑為

$r\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$

北緯 45° 線長為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\cdot 2\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times$ 赤道長

(C)赤道和經線都是以球心為圓心的弧和圓

選項中兩路徑都是夾 60° 的圓心角，故弧長相同

(D)前者為半徑 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$ 的半圓，弧長為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\cdot\pi$

後者為圓心角為 120° 的大圓上的弧，弧長為 $\dfrac{1}{3}\cdot 2\pi r$

(E)設北極點為 N，則 $\overline{AN}=\overline{CN}=\overline{AC}$

$\therefore\ \Delta ANC$ 為正三角形，故 $\angle ANC=60^\circ$

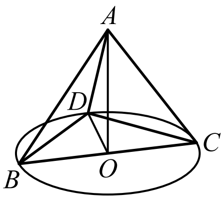
6.設 $\overline{BC}=x$，$\cos\angle BAC=\dfrac{(4\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2-x^2}{2\cdot(4\sqrt{6})(4\sqrt{6})}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow\quad x=\pm 8\sqrt{2}$（負不合）

又 $\overline{BD}=\overline{CD}=8\quad\therefore\ \Delta BCD$ 是等腰直角三角形

$\because\ \overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$

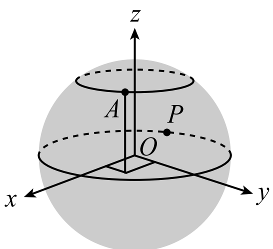
$\therefore\ A$ 在通過 ΔBCD 外心 O 且垂直平面 BCD 的直線上，如右圖



$\therefore\ d(D,\text{平面 }ABC)=\overline{DO}$

$=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4\sqrt{2}$

7.設 $P(x,y,0)$，則 $\overline{OP}^2=x^2+y^2+0^2=2^2=4$



$\overline{AP}^2=(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2+3$

$=x^2-\sqrt{3}x+\dfrac{3}{4}+y^2-y+\dfrac{1}{4}+3=-\sqrt{3}x-y+8$

由柯西不等式知

$(x^2+y^2)[(-\sqrt{3})^2+(-1)^2]\geq(-\sqrt{3}x-y)^2$

$\Rightarrow\quad -4\leq-\sqrt{3}x-y\leq 4$

等號成立時，設 $\dfrac{x}{-\sqrt{3}}=\dfrac{y}{-1}=t$

$x=-\sqrt{3}t$，$y=-t$ 代入 $-\sqrt{3}x-y=4\quad\Rightarrow\quad t=1$

$\therefore\ P(x,y,0)=(-\sqrt{3},-1,0)$

$$\cos\angle AOP=\dfrac{(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3},-1,0)}{\left|(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{3})\right|\times\left|(-\sqrt{3},-1,0)\right|}$$

$$=\dfrac{-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$$

$\therefore\ \angle AOP=\dfrac{2}{3}\pi$，$\overset{\frown}{AP}=r\theta=2\cdot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

8.(1)原有 6 面，加上截去 8 個角形成的 8 面，共有 14 面

故為十四面體

(2)令 $S=\dfrac{8+9+9}{2}=13$

ΔBCD 面積 $=\sqrt{13\times(13-8)\times(13-9)\times(13-9)}$

$=\sqrt{13\times 5\times 4\times 4}=4\sqrt{65}$

(3)設 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$ 分別為 x、y、z

$$\begin{cases}x^2+y^2=8^2\\y^2+z^2=9^2\\z^2+x^2=9^2\end{cases}$$

三式相加，得 $2(x^2+y^2+z^2)=226$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2=113$，減去原三式得

$x^2=32$，$y^2=32$，$z^2=49$

$\therefore\ x=y=4\sqrt{2}$，$z=7$，故 $\overline{AD}=7$

四面體 $ABCD$ 體積

$=\dfrac{1}{3}\ \Delta ABC$ 面積 $\times\ \overline{AD}$

$=\dfrac{1}{3}\ \Delta BCD$ 面積 $\times\ d(A,\text{平面 }BCD)$

$\Rightarrow\quad \dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2})\times 7=\dfrac{112}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{65}\ \times d(A,\text{平面 }BCD)$

$\therefore$四面體 $ABCD$ 體積 $=\dfrac{112}{3}$

$d(A,\text{平面 }BCD)=\dfrac{28}{\sqrt{65}}=\dfrac{28\sqrt{65}}{65}$

12 不確定性

77 **範例 1** (1) 25；15；20 (2) $\dfrac{5}{8}$ (3) $\dfrac{5}{13}$

(1)支持工作坊的實作體驗有 65%

$\Rightarrow\quad x\%+40\%=65\%$

$\Rightarrow\quad x=25$

支持登山活動者占全部的 40%

$\Rightarrow\quad x\%+y\%=40\%$，又 $x=25\quad\therefore\ y=15$

支持水上活動者占全部的 60%

$\Rightarrow\quad 40\%+z\%=60\%$

$\Rightarrow\quad z=20$

(2) P(想參加工作坊的實作體驗 | 支持登山活動)

$$=\dfrac{P(\text{想參加工作坊的實作體驗}\cap\text{支持登山活動})}{P(\text{支持登山活動})}$$

$=\dfrac{25\%}{40\%}=\dfrac{5}{8}$

(3) P(支持登山活動 | 想參加工作坊的實作體驗)

$$=\dfrac{P(\text{想參加工作坊的實作體驗}\cap\text{支持登山活動})}{P(\text{想參加工作坊的實作體驗})}$$

$=\dfrac{25\%}{65\%}=\dfrac{5}{13}$

核心思考

高中數學 3B-4B 冊 課後練習本

班級：＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿ 座號：＿＿＿＿

11 空間概念

概念 1 空間概念

1. 已知在空間中有三相異直線 L_1、L_2、L，則下列敘述何者正確？（單選）______

(A)若 $L_1 /\!/ L$，$L_2 /\!/ L$，則 $L_1 /\!/ L_2$

(B)若 $L_1 \perp L$，$L_2 \perp L$，則 $L_1 \perp L_2$

(C)若 $L_1 /\!/ L$，$L_2 \perp L$，則 $L_1 \perp L_2$

(D)若 L_1 與 L 歪斜，L_2 也與 L 歪斜，則 L_1 與 L_2 歪斜

解

2. 下列有關空間中直線與平面的敘述，哪些正確？（多選）______

(A)若直線 L 在平面 E 上，且 L 平行平面 E'，則平面 E 平行平面 E'

(B)若直線 L 在平面 E 上，且 E 平行平面 E'，則直線 L 平行平面 E'

(C)若直線 L 在平面 E 上，且 L 垂直平面 E'，則平面 E 垂直平面 E'

(D)若直線 L 在平面 E 上，且 E 垂直平面 E'，則直線 L 垂直平面 E'

解

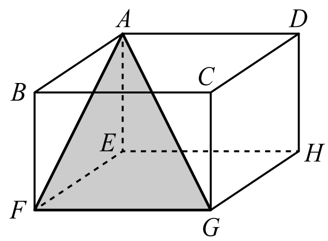
3. 如右圖，$ABCD-EFGH$ 為一長方體，試問：

(1)下列何者為 $\overleftrightarrow{AG}$ 與平面 $EFGH$ 的夾角？（單選）______

(A) $\angle AGF$　(B) $\angle AGE$　(C) $\angle AGH$　(D) $\angle AGC$　(E) $\angle EGF$

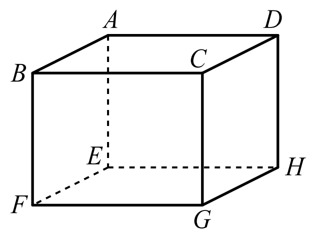
(2)下列何者為平面 AFG 與平面 $EFGH$ 的夾角？（單選）______

(A) $\angle AFG$　(B) $\angle AFE$　(C) $\angle AGF$　(D) $\angle AGE$　(E) $\angle AGH$



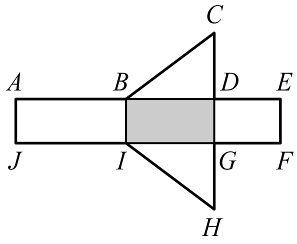
解

4. 有一隻小螞蟻在長方體 $ABCD-EFGH$ 的表面移動，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=9$，$\overline{AE}=7$，若這隻螞蟻欲從 A 點移動到 G 點，則最短的路線長度為______。



解

5. 右圖為一立體圖形的展開圖，已知 $BDGI$ 為長方形，$\angle BDC = \angle IGH = 90^\circ$，$\overline{BI} = 2$，$\overline{CD} = 3$，$\overline{BD} = 4$，$\overline{BC} = 5$，將展開圖還原為立體圖形，試問：

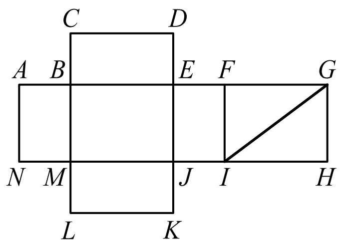


⑴設平面 $ABIJ$ 與平面 $BDGI$ 所夾的兩面角為銳角 θ，則 $\cos\theta =$ ______。

⑵設 $\overleftrightarrow{DF}$ 與平面 $BDGI$ 所夾的銳角為 φ，則 $\cos\varphi =$ ______。

解

6. 右圖為一長方體的展開圖，若將此展開圖組合成長方體後，試問：



⑴下列哪一條直線與 $\overleftrightarrow{IG}$ 互為歪斜線？（單選）______

(A) $\overleftrightarrow{BJ}$　(B) $\overleftrightarrow{EM}$　(C) $\overleftrightarrow{KM}$　(D) $\overleftrightarrow{AM}$　(E) $\overleftrightarrow{BC}$

⑵設 $\overline{AB} = 9$，$\overline{BM} = 12$，$\overline{BE} = 15$，$\overleftrightarrow{IG}$ 與平面 $EFIJ$ 夾的銳角為 θ，則 $\tan\theta =$ ______。

解

概念 2　空間坐標系

7. 在空間坐標系中，已知 $A(9, 12, -7)$，試問：

⑴ A 點到 xy 平面的距離為 ______。

⑵ A 點到 z 軸的距離為 ______。

⑶ A 點在 y 軸的投影點坐標為 ______。

⑷ A 點在 yz 平面的投影點坐標為 ______。

解

8. 已知 $A(1, 1, -3)$、$B(-1, 2, -2)$ 為空間中兩點，C 點在 z 軸上，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$，則 C 點坐標為 ______，$\overline{AB} =$ ______，$\overline{AC} =$ ______，$\cos\angle ACB =$ ______。

解

$C(-1,0)$、$D(1,0)$

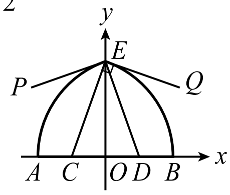
$\because \overline{CE}=3$ $\therefore \overline{OE}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore E(0,2\sqrt{2})$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$

$=(-1,-2\sqrt{2})\cdot(1,-2\sqrt{2})$

$=(-1)\times 1+(-2\sqrt{2})(-2\sqrt{2})=7$



(2)設 $\angle CED=\alpha$，$\angle CEP=\angle DEQ=\beta$，且 $\alpha+\beta=90^\circ$

則頂角 $\theta=\angle PEQ=\alpha+2\beta=180^\circ-\alpha$

$\therefore \cos\theta=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{ED}|}=-\dfrac{7}{9}$

概念 5 兩直線的夾角、正射影

20. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

設直線 $2x-y=1$ 和直線 $x+3y=-2$ 的法向量

分別為 $\overrightarrow{n_1}=(2,-1)$ 和 $\overrightarrow{n_2}=(1,3)$

則 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{|2\times 1+(-1)\times 3|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

21. -7 或 $\dfrac{1}{7}$

設直線 $y-8=m(x-5)$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(m,-1)$，直線 $4x-3y=6$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(4,-3)$

則 $\cos 45^\circ=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|4m+3|}{\sqrt{m^2+1}\cdot 5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

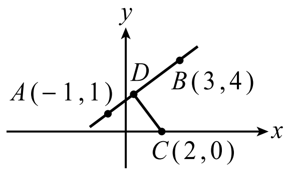
$\Rightarrow$ $7m^2+48m-7=0$，故 $m=-7$ 或 $\dfrac{1}{7}$

22. $\sqrt{5}$

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的正射影長為 $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\dfrac{|(-2)\times 1+1\times 7|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{5}$

23. $(\dfrac{11}{25},\dfrac{52}{25})$

設 $D(x,y)$，則 $\overrightarrow{AD}$ 為 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影



$\overrightarrow{AB}=(4,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-1)$

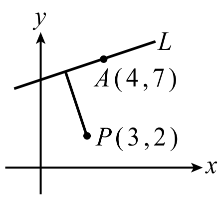
$\overrightarrow{AD}=(x+1,y-1)$

$=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|})\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{4\times 3+3\times(-1)}{25}(4,3)=\dfrac{9}{25}(4,3)$

$\therefore D(x,y)=(\dfrac{11}{25},\dfrac{52}{25})$

24. $(\dfrac{8}{5},\dfrac{31}{5})$

L 的斜率為 $\dfrac{1}{3}$，故方向向量可設為 $\vec{v}=(3,1)$，$|\vec{v}|=\sqrt{10}$，已知 $A(4,7)$ 在 L 上，設 $Q(x,y)$ 為 P 在 L 上的投影點，則 $\overrightarrow{AQ}$ 為 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\vec{v}$ 上的正射影



又 $\overrightarrow{AP}=(-1,-5)$

則 $(x-4,y-7)=(\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|})\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\dfrac{(-1)\times 3+(-5)\times 1}{10}(3,1)$

$=(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{4}{5})$

$\therefore Q(x,y)=(\dfrac{8}{5},\dfrac{31}{5})$

11 空間概念

概念 1 空間概念

13 1.(A)

(B)不一定，L_1 和 L_2 也可能平行或交於一點或歪斜

(C)不一定，L_1 和 L_2 也可能歪斜

(D)不一定，L_1 和 L_2 也可能平行或交於一點

2.(B)(C)

(A)不一定，E 和 E' 也可能交於一直線

(B)(C)正確（可考慮平面的法向量與直線的方向向量）

(D)不一定，L 也可能平行平面 E' 或落在平面 E' 上或 L 與 E、E' 的交線不垂直

3.(1)(B) (2)(B)

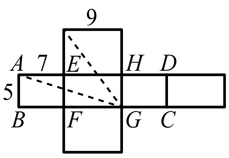
(1) $\overline{AG}$ 在平面 $EFGH$ 的投影為 $\overline{EG}$ $\therefore$夾角為 $\angle AGE$

(2)平面 AFG 與平面 $EFGH$ 的交線為 $\overline{FG}$

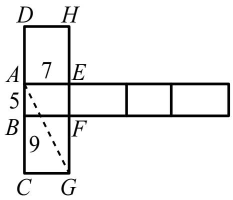
又 $\overline{AF}\perp\overline{FG}$，$\overline{EF}\perp\overline{FG}$ $\therefore$兩面角為 $\angle AFE$

4.15

展開圖如右：



或



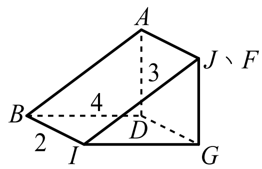
若螞蟻由 A 點，通過 $\overline{EH}$ 上的點，再到 G，路線長最短為 $\sqrt{(7+5)^2+9^2}=\sqrt{225}=15$

若螞蟻由 A 點，通過 $\overline{EF}$ 上的點，再到 G，路線長最短為 $\sqrt{5^2+(7+9)^2}=\sqrt{281}$

若螞蟻由 A 點，通過 $\overline{BF}$ 上的點，再到 G，路線長最短為 $\sqrt{(5+9)^2+7^2}=\sqrt{245}$，故最短路線的長度為 15

14 5.(1) $\dfrac{4}{5}$ (2) $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

將展開圖組合成立體圖形



(1)平面 $ABIJ$ 與平面 $BDGI$ 的兩面角 $\theta=\angle ABD$

$\therefore \cos\theta=\cos\angle ABD=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{5}$

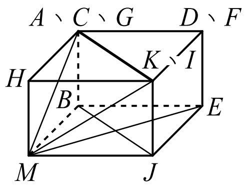
(2) $\overline{DF}$ 在平面 $BDGI$ 上的投影為 $\overline{DG}$，因此 $\varphi=\angle FDG$

$\therefore \cos\varphi=\cos\angle FDG=\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DF}}=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

6.(1)(B) (2) $\dfrac{5}{4}$

將展開圖組合成立體圖形

(1)(A) $\overleftrightarrow{BJ} \parallel \overleftrightarrow{IG}$



(B) $\overleftrightarrow{EM}$ 與 $\overleftrightarrow{IG}$ 為歪斜線

(C) $\overleftrightarrow{KM}$ 與 $\overleftrightarrow{IG}$ 交於一點

(D) $\overleftrightarrow{AM}$ 與 $\overleftrightarrow{IG}$ 交於一點

(E) $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{IG}$ 交於一點

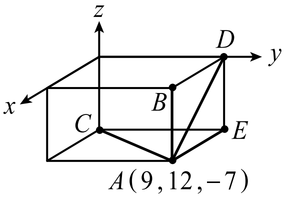
(2) $\overline{IG}$ 在平面 $EFIJ$ 上的投影為 $\overline{IF}$　$\therefore \theta = \angle GIF$

$\therefore \tan\theta = \tan\angle GIF = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{IF}} = \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4}$

概念 2　空間坐標系

7.(1) 7　(2) 15　(3) $(0,12,0)$　(4) $(0,12,-7)$

(1)如右圖



$d(A, xy$ 平面$)$

$= \overline{AB} = 7$

(2) $d(A, z$ 軸$)$

$= \overline{AC} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

(3) A 點在 y 軸的投影點為 $D(0,12,0)$

(4) A 點在 yz 平面的投影點為 $E(0,12,-7)$

8.$(0,0,-1)$；$\sqrt{6}$；$\sqrt{6}$；$\dfrac{1}{2}$

設 $C(0,0,k)$，由 $\overline{AC} = \overline{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + (k+3)^2}$

$= \sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + (k+2)^2}$　$\therefore k = -1$

即 $C(0,0,-1)$

$\overline{AB} = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (1-2)^2 + [(-3)-(-2)]^2} = \sqrt{6}$

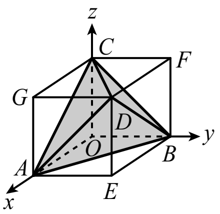
$\overline{AC} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + [(-1)-(-3)]^2} = \sqrt{6}$

$\therefore \Delta ABC$ 為正三角形，$\cos\angle ACB = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

15 9.$\dfrac{1}{3}$

設 D 點在 xy 平面、yz 平面、xz 平面的投影點分別為 E、F、G，則正四面體 $ABCD$ 體積

= 正立方體體積



$-$(四角錐 $DAEB$ 體積)

$-$(四角錐 $GADC$ 體積)

$-$(四角錐 $FBCD$ 體積)

$-$(四角錐 $OABC$ 體積)

$= 1 \times 1 \times 1 - (\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1) \times 4 = \dfrac{1}{3}$

10.1；$\sqrt{29}$

P 點 x 坐標每秒變化 -2，y、z 坐標不變

Q 點 x、y 坐標不變，z 坐標每秒變化 -4

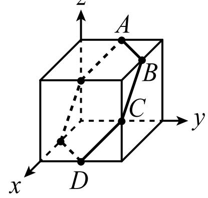
故第 t 秒時，$P(-2-2t,0,0)$，$Q(0,3,6-4t)$

$\overline{PQ} = \sqrt{[0-(-2-2t)]^2 + (3-0)^2 + (6-4t-0)^2}$

$= \sqrt{20t^2 - 40t + 49} = \sqrt{20(t-1)^2 + 29}$

故當 $t = 1$ 時，$\overline{PQ}$ 距離最短為 $\sqrt{29}$

11.(1)(D)　(2) $(2,1,0)$



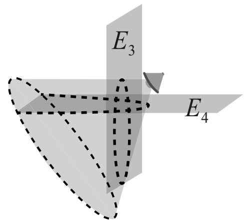
(1)如右圖，此截面為正六邊形

(2)與 A 點最遠的頂點坐標為 $D(2,1,0)$

概念 3　球面的經、緯線與圓錐曲線

12.(1)橢圓　(2)拋物線

由圓錐曲線的性質，可知牆面 E_3 會將光線形成的圓錐面截成橢圓形（的一部分），而地板 E_4 平行母線，故在地板 E_4 的截線為拋物線。如右圖所示



16 13. $59^\circ 3' 4''$W，$23^\circ 28' 18''$S

$180^\circ - 120^\circ 56' 56''$，即 $59^\circ 3' 4''$W

14.25°N，$178^\circ 30'$W

緯度不變，仍為 25°N，經度加 60 度為

$121^\circ 30' + 60^\circ = 181^\circ 30'$，超過 180 度

故為西經 $180^\circ - 1^\circ 30' = 178^\circ 30'$

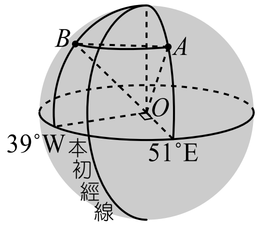
15.(1) 31.42　(2) 28.92

(1)在北緯 60° 的緯線上，半徑為 $40\cos 60^\circ = 20$ 公分

東經 51° 與西經 39° 所夾的圓心角為 $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$

故經距為 $20 \times \dfrac{\pi}{2} \approx 31.42$ 公分

(2)如右圖



$\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ 且 $\overline{OA} = \overline{OB} = 40$

由餘弦定理知 $\cos\angle AOB$

$= \dfrac{40^2 + 40^2 - (20\sqrt{2})^2}{2 \times 40 \times 40} = \dfrac{3}{4}$

故 $\angle AOB \approx 0.723$ 強

所以在大圓上的 $\overset{\frown}{AB} = 40 \times 0.723 = 28.92$ 公分

16.(1) 30°S，120°W　(2) $(5\sqrt{3}, 15, 10)$

(1)由圖可判斷，A' 的經緯度為 30°S，120°W

(2) $A(20\cos 30^\circ \cos 60^\circ, 20\cos 30^\circ \sin 60^\circ, 20\sin 30^\circ)$

$= (5\sqrt{3}, 15, 10)$

12　不確定性

概念 1　條件機率

17 1.$\dfrac{1}{2}$

$P(\times \mid \bigcirc) = \dfrac{n(\bigcirc \cap \times)}{n(\bigcirc)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

2.(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{3}{7}$　(4) $\dfrac{1}{4}$

由題意知，全部有 50 人，男生有 15 人，女生有 35 人

	男	女	合計
高一	10	20	30
高二	5	15	20
合計	15	35	50

(1) $P($高一$\mid$男$) = \dfrac{n(\text{高一} \cap \text{男})}{n(\text{男})} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

(2) $P($男$\mid$高一$) = \dfrac{n(\text{高一} \cap \text{男})}{n(\text{高一})} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

(3) $P($高二$\mid$女$) = \dfrac{n(\text{高二} \cap \text{女})}{n(\text{女})} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$