A COMPREHENSIVE REVIEW
OF HIGH SCHOOL MATH

目次

A COMPREHENSIVE REVIEW
OF HIGH SCHOOL MATH
A COMPREHENSIVE REVIEW
OF HIGH SCHOOL MATH
A COMPREHENSIVE REVIEW
OF HIGH SCHOOL MATH

11 空間向量

空間概念

學測 107．108．109．110．111A

兩直線的關係
平行、交於一點、重合、歪斜

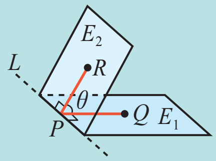
直線與平面的關係
平行、交於一點、直線落在平面上

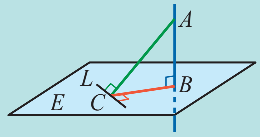
兩平面的關係
不相交（平行）、交於一直線、重合

兩面角、三垂線定理

兩面角
$\angle QPR$ 為半平面 E_1、E_2 的兩面角

三垂線定理
$\overleftrightarrow{AB} \perp E$ 且 $\overline{BC} \perp L$，則 $\overline{AC} \perp L$





空間向量的內積與柯西不等式

學測 106．109．112A

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為非零向量且夾角為 θ

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$|\vec{a}||\vec{b}|\geq|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，等號成立的條件為 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 或 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 其中之一為 $\vec{0}$

空間向量的外積

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

空間中兩非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夾角為 θ
$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張的平行四邊形面積為
$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

平行六面體的體積

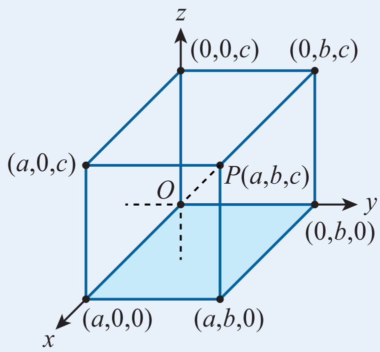
空間中，由不共平面的三向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 與 $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 所張出的平行六面體的體積為 $V=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

概念3 空間向量及運算

1. 空間坐標系

(1) 在空間中任取一點 O 為原點，過 O 點作兩兩互相垂直的三條直線並取適當長度為單位長，分別稱為 x 軸、y 軸、z 軸（統稱坐標軸）。由原點 O、x 軸、y 軸、z 軸組成空間坐標系。任兩坐標軸可決定一坐標平面，如 xy 平面、yz 平面、xz 平面。

(2) 空間中，任意一點 $P(a,b,c)$ 在三坐標軸及三坐標平面的投影如右圖。



2. 空間向量的坐標表示法

(1) 若 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$ 為空間中兩點，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，

$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

(2) 空間向量的加減法和係數積的運算原理與平面向量相同。

(3) 分點公式：設 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，若 $P\in\overline{AB}$，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 為空間中兩個不平行的非零向量，則：

① $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$　② $P\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n},\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$。

(4) 線性組合：若空間中有兩個不平行的非零向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，則由 O、A、B 決定的平面 E 上任一點 P，皆可唯一表示成 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 x、$y\in R$。

①若 $P\in\overleftrightarrow{AB}$ ⇔ $x+y=1$　②若 $P\in\overline{AB}$ ⇔ $x+y=1$ 且 $0\le x\le 1$。

(5) 設 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$ 為 ΔABC 的三頂點，則 ΔABC 的重心坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$。

基礎5 空間坐標系

在空間坐標系中，有一點 $P(2,-1,3)$，試求：

(1) P 點在三坐標平面及三坐標軸的投影點坐標。

① xy 平面：點 A ________　② yz 平面：點 B ________

③ xz 平面：點 C ________　④ x 軸：點 D ________

⑤ y 軸：點 E ________　⑥ z 軸：點 F ________。

(2) $\overline{AF}=$________。

解

11 空間向量

基礎 6 線性組合與分點公式

綜合 12.

空間坐標系中，O 為原點，$A(1,2,-3)$、$B(-7,-6,1)$、$C(3,-2,1)$、$P(11,-2,7)$。

(1)設 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$，則 $(a,b,c)=$ ______。

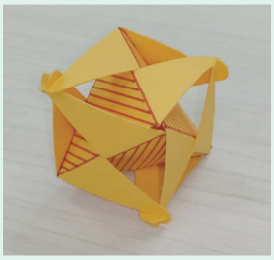
(2)設 $\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則 D 點坐標為 ______。

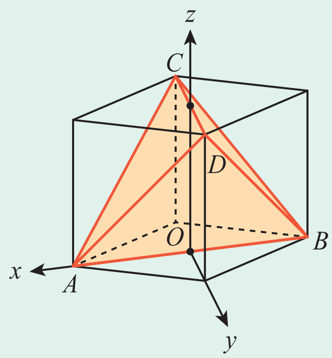
解

範例 7 利用空間坐標系建構立體圖形的坐標

綜合 7.

右圖為正四面體放入一個正立方體內的摺紙模型，且正四面體的四個頂點，恰好可為正立方體的其中四個頂點。若將此模型建構在空間坐標系中，以四面體的稜 $\overline{AB}$ 之中點為坐標原點 O，且令 $A(1,0,0)$，z 軸通過稜 $\overline{CD}$ 的中點。





試問：

(1)正四面體 $ABCD$ 的稜長（邊長）為 ______，正立方體的稜長為 ______。

(2)若有一球面外接於正四面體 $ABCD$，可知其球心必在此正立方體的中心點，則此正四面體 $ABCD$ 的外接球之半徑長為正四面體的稜長的 ______ 倍。

提示

(2)正四面體 $ABCD$ 的外接球通過正立方體的頂點

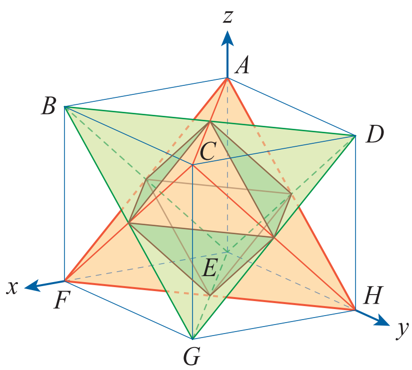
解

類題

如右圖，將兩個大小相同的正四面體放在同一個正立方體內，其中正四面體 $ACFH$ 的頂點坐標為 $A(0,0,1)$，$C(1,1,1)$，$F(1,0,0)$，$H(0,1,0)$，正四面體 $BDEG$ 的四個頂點則在正立方體的另外四個頂點上。由圖可知，這兩個正四面體重合的部分可形成一個正八面體，試問下列選項哪些為此正八面體的頂點坐標？______

(A) $(0,0,\frac{1}{2})$　(B) $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$　(C) $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(D) $(\frac{1}{2},1,1)$　(E) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$



範例 8　空間坐標系中兩點之間的距離

(1)已知 $A(1,13,7)$，$B(-8,1,-1)$ 為空間中兩點，P 點在 xy 平面上，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為______。

(2)試求 $\sqrt{(x-1)^2+(y-13)^2+49}+\sqrt{(x+8)^2+(y-1)^2+1}$ 的最小值為______。

提示

(1) $\overline{PA}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$

(2)設 $P(x,y,0)$、$A(1,13,7)$、$B(-8,1,-1)$，則此式代表 $\overline{PA}+\overline{PB}$

解

類題

(1)已知空間坐標中兩點分別為 $A(3,2,1)$、$B(9,4,4)$，若 P 點在 xz 平面上，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為______。

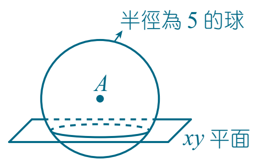
(2)在空間坐標中，設 $A(2,3,4)$，若動點 P 在 xy 平面上，且 $\overline{PA}=5$，則 P 點的軌跡為何？______

(A)邊長為 $3\sqrt{2}$ 的正方形　(B)邊長為 6 的正方形　(C)半徑為 3 的圓

(D)半徑為 $3\sqrt{2}$ 的圓　(E)半徑為 $3\sqrt{3}$ 的圓

提示

(2)



11 空間向量

(1)已知三向量 $\vec{a}=(2,-1,3)$、$\vec{b}=(4,-2,5)$、$\vec{c}=(k,5,1)$ 共平面，試求 $k=$ ________。

(2)已知向量 $\vec{a}=(-3,4,-5)$、$\vec{b}=(5,8,-1)$、$\vec{c}=(x,y,z)$，試問下列選項哪些正確？________

(A) $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}\right|$

(B) $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & 4 & -5 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix}\right|$

(C)若 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$，則 $x=y=z=0$

(D)若 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & 4 & -5 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix}=0$，則 $\vec{c}\,/\!/\,\vec{a}$ 或 $\vec{c}\,/\!/\,\vec{b}$

(E)若 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$，則 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

類題

綜　合　實　力　測　驗

一、單選題

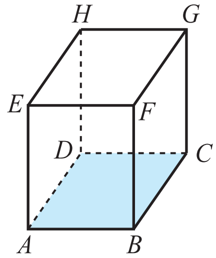
更多試題看這裡

________ 1. 在空間坐標中，$A(2,-3,4)$、$B(4,1,a)$，若 $C(3,2,3)$ 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分面上，若 B 點在第一卦限，則 a 的值為何？

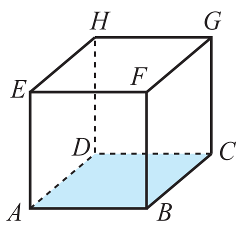
(A) 2　(B) -2　(C) 8　(D) -8　(E) $\frac{7}{2}$

________ 2. 如右圖，有一個長方體 $ABCD-EFGH$，已知 $\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AE}=8$，則 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AH}$ 的值為何？

(A) 0　(B) 36
(C) 49　(D) 64
(E) 336



______ 3. 如右圖，正立方體 $ABCD-EFGH$ 中，下列哪一個向量與 $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AH}$ 平行？



(A) $\overrightarrow{AG}$　(B) $\overrightarrow{BH}$
(C) $\overrightarrow{CE}$　(D) $\overrightarrow{DF}$
(E) $\overrightarrow{FH}$

______ 4. 空間中有相異四點 A、B、C、D，已知內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$。試選出正確的選項。

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$　(B) $\overline{AC}=\overline{AD}$
(C) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 平行　(D) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
(E) A、B、C、D 四點在同一平面上

109 學測 答對率 43%

______ 5. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P、Q，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之期望值為下列哪一個選項？

(A) $\frac{4}{7}$　(B) $\frac{5}{7}$　(C) $\frac{6}{7}$　(D) 1　(E) $\frac{8}{7}$

112 學測 A

11 空間向量

影音講解 綜合 4 綜合 7

二、多選題

______ 6. 在空間中有三點 $A(1,0,4)$、$B(-2,-2,-2)$ 和 C 點，設向量 $\overrightarrow{AC}=(3,2,6)$，試問下列選項哪些正確？

(A) A 點在 xz 平面上　(B) C 點坐標為 $(2,2,2)$　(C) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 平行
(D) $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CA}|$　(E) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

______ 7. 在坐標空間中，有一正立方體的頂點分別為 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$C(1,1,0)$、$D(0,1,0)$、$E(0,0,1)$、$F(1,0,1)$、$G(1,1,1)$、$H(0,1,1)$。若向量 $\vec{a}$ 的起點為此正立方體的一個頂點，終點為稜邊的中點，則向量 $\vec{a}$ 可能為下列哪些選項？

(A) $(0,\frac{1}{2},0)$　(B) $(1,\frac{1}{2},0)$　(C) $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
(D) $(1,\frac{1}{2},1)$　(E) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

______ 8. 設 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 為空間中兩個不平行的非零向量，下列哪些向量為 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的公垂向量？

(A) $\vec{u}+\vec{v}$　(B) $\vec{u}\times\vec{v}$　(C) $\vec{u}+(\vec{u}\times\vec{v})$
(D) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{v}$　(E) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}\times\vec{v})$

28.(1) $\overrightarrow{OA}=(9,5)\parallel(\frac{9}{5},1)$，$\overrightarrow{OB}=(13,5)\parallel(\frac{13}{5},1)$

所以人欲射門的向量$(a,1)$需滿足$\frac{9}{5}<a<\frac{13}{5}$

故選項中只有$\overrightarrow{u_2}=(2,1)$能射進球門

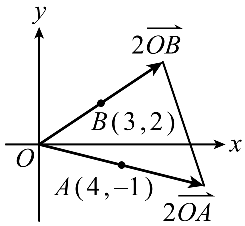
(2) $\overrightarrow{u_2}=(2,1)\parallel(10,5)$

即球沿$\overrightarrow{u_2}$的方向射門時，射入球門的坐標為$(10,5)$

又$\left|(10,5)\right|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$，故球需移動$\sqrt{5}$秒

守門員需從$C(11,5)$花$\sqrt{5}$秒的時間移動到$(10,5)$的位置，故速度為$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$（單位長／秒）

64 29.(1)設$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$



則$A'(8,-2)$，$B'(6,4)$

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

$x+y=2$，$x\geq 0$，$y\geq 0$

則P點所在的區域為$\overline{A'B'}$

$\overline{A'B'}=\sqrt{(8-6)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$

(2) $\overrightarrow{OP}=x(4,-1)+y(3,2)=(4x+3y,-x+2y)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,3)$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=(4x+3y)\times(-1)+(-x+2y)\times 3=-7x+3y$

由柯西不等式知$(x^2+y^2)[(-7)^2+3^2]\geq(-7x+3y)^2$

即$29\times 58\geq(-7x+3y)^2$

$\Rightarrow\quad -29\sqrt{2}\leq -7x+3y\leq 29\sqrt{2}$

且$\frac{x}{-7}=\frac{y}{3}$時，設$x=-7t$，$y=3t$

代入$-7x+3y=29\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad 58t=29\sqrt{2}\quad\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即$x=-\frac{7\sqrt{2}}{2}$，$y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$有最大值$29\sqrt{2}$

此時$P(4x+3y,-x+2y)=(-\frac{19\sqrt{2}}{2},\frac{13\sqrt{2}}{2})$

(3) $\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$所張的平行四邊形面積為$\left|\begin{vmatrix}4&-1\\3&2\end{vmatrix}\right|=11$

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$-2\leq x\leq a$，$-2\leq y\leq b$

P點所在區域的面積為$11(a+2)(b+2)=55$

$\Rightarrow\quad (a+2)(b+2)=5$

又a、$b\in Z$，且$a\geq -2$，$b\geq -2$

$a+2$	$b+2$	a	b	
1	5	-1	3	
5	1	3	-1	
-1	-5	-3	-7	（不合）
-5	-1	-7	-3	（不合）

故$(a,b)=(-1,3)$或$(3,-1)$

11 空間向量

67 **基礎1** (B)(C)(E)

(A)×；可能歪斜　(D)×；反例：如空間坐標系中的三軸

基礎2 (B)(C)(D)

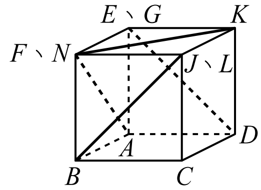
(A)×；若兩直線不平行，則無公垂線

(E)×；E_2、E_3可能相交，如空間坐標系中的xy平面、yz平面和xz平面

範例1 (B)(C)(D)

選項中，$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{AB}$相交，$\overleftrightarrow{GH}$與$\overleftrightarrow{AB}$平行，$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{DG}$與$\overleftrightarrow{AB}$歪斜（不平行也不相交）

類題 (A)(C)(D)



將之組合後如右圖，可知$\overleftrightarrow{BJ}$和$\overleftrightarrow{GD}$、$\overleftrightarrow{AF}$和$\overleftrightarrow{BJ}$、$\overleftrightarrow{AE}$和$\overleftrightarrow{LN}$均為歪斜線，$\overleftrightarrow{AF}$和$\overleftrightarrow{KN}$交於一點，$\overleftrightarrow{AE}$和$\overleftrightarrow{CJ}$平行

68 **範例2** (1) $\sqrt{29}$　(2)(A)　(3) $\frac{3\sqrt{29}}{29}$

(1) $\overline{AG}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2=\overline{AE}^2+\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$=3^2+2^2+4^2=29\quad\therefore\overline{AG}=\sqrt{29}$

(2)選項中只有$\overleftrightarrow{AD}$與平面$CDHG$垂直

(3) $\theta=\angle GAC$，又$\overleftrightarrow{CG}\perp$平面$ABCD$

所以ΔACG為直角三角形

故$\sin\theta=\frac{\overline{CG}}{\overline{AG}}=\frac{3}{\sqrt{29}}=\frac{3\sqrt{29}}{29}$

類題 $2\sqrt{2}$

設$\overline{AB}=x$，$\overline{AD}=y$，$\overline{AE}=z$

$\overline{DG}^2=x^2+z^2=3$，$\overline{DE}^2=y^2+z^2=5$，$\overline{GE}^2=x^2+y^2=6$

$\Rightarrow\quad 2(x^2+y^2+z^2)=14\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2=7$

得$y^2=4$，$x^2=2$，$z^2=1\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{2}$，$y=2$，$z=1$

$\therefore$長方體體積$=xyz=2\sqrt{2}$

範例3 (1) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$　(2) $\frac{\sqrt{70}}{14}$

$\overline{BG}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，$\overline{AG}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

(1) $\overleftrightarrow{BG}$在平面$CDHG$的正射影為$\overleftrightarrow{CG}$

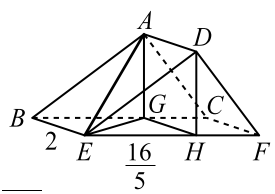
$\therefore\alpha=\angle BGC\quad\therefore\cos\alpha=\frac{\overline{CG}}{\overline{BG}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

(2) $\overleftrightarrow{AG}$在平面$ABFE$的正射影為$\overleftrightarrow{AF}$

$\therefore\beta=\angle GAF$

$\therefore\cos\beta=\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$

類題 (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(2) $\frac{\sqrt{445}}{25}$



ΔABC和ΔDEF邊長$3-4-5$

$\therefore\angle BAC=\angle EDF=90^\circ$

又$\overline{AE}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(1) $\overline{AE}$在平面$ADFC$的正射影為$\overline{AD}$

$\therefore\alpha=\angle EAD\quad\therefore\cos\alpha=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2)如右圖，$\overline{AE}$在平面$BEFC$的正射影為$\overline{GE}$

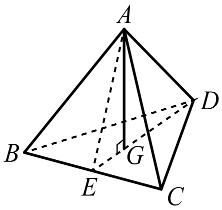
$\therefore\cos\beta=\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}=\frac{\sqrt{2^2+(\frac{16}{5})^2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{445}}{25}$

69 **基礎 3** (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

(1)設 A 在平面 BCD 的投影點為 G

則 G 為 ΔBCD 的重心，設 $\overline{BC}$

中點為 E，則 $\overline{AE}=\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\overline{EG}=\dfrac{1}{3}\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

直角三角形 AEG 中，$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{EG}^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

即此正四面體的高為 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\cos\theta=\cos\angle AED=\dfrac{\overline{EG}}{\overline{AE}}=\dfrac{1}{3}$

基礎 4 (1) $15\sqrt{3}$ (2) 30

(1)由餘弦定理

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cdot\cos 120^\circ=9604$

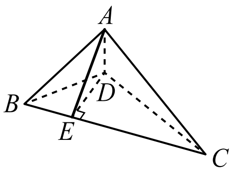
$\therefore\ \overline{BC}=98$

由 ΔBCD 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{DE}$

$\Rightarrow\quad \overline{DE}=15\sqrt{3}$

(2) $\because$ $\overline{AD}$ 垂直平面 BCD，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{AE}\perp\overline{BC}$，故所求為 $\overline{AE}$



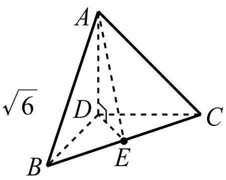
$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2}$

$=\sqrt{15^2+(15\sqrt{3})^2}=30$

70 **範例 4** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

設 E 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\theta=\angle AED$



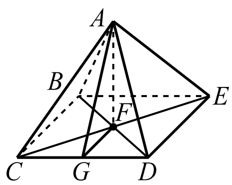
$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{6}$

$\overline{DE}=\sqrt{2}\quad\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

類題 $\dfrac{4\sqrt{82}}{41}$

設 A 點在 $BCDE$ 的投影點為 F

則 $\overline{CF}=\dfrac{1}{2}\overline{CE}=3$，又 $\overline{AC}=5$



$\therefore$ $\overline{AF}=4$，設 A 點在 $\overline{CD}$ 的投影為 G

則 $\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\angle AGF$

$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AF}^2+\overline{FG}^2}=\sqrt{16+\dfrac{9}{2}}=\sqrt{\dfrac{41}{2}}$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\dfrac{4}{\sqrt{\dfrac{41}{2}}}=\dfrac{4\sqrt{82}}{41}$

範例 5 (A)(D)

$\angle AGF=\angle ADF=90^\circ$，$\angle EGF=\angle ECF=90^\circ$

即 $\overline{AG}$ 與 $\overline{GE}$ 分別垂直平面 AFG 與平面 EFG 的交線 $\overline{FG}$

$\therefore\ \angle AGE=\theta$，又 $\angle AGE=\angle ABE=90^\circ\quad\therefore\ \theta=90^\circ$

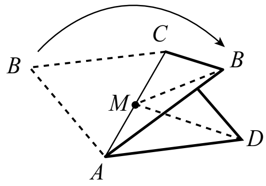
且 $\angle AFE$ 為銳角 $\quad\therefore\ \cos\angle AFE>0=\cos\theta$

類題 $\dfrac{3}{4}$

設 $\overline{AC}$ 中點為 M，則 $\angle BMD$ 即為

平面 ABC 和平面 ACD 所夾的兩

面角 60°，且因為 $\overline{BM}=\overline{DM}$，所以



ΔBMD 為正三角形，即 $\overline{BD}=\overline{DM}$

又 $\overline{DM}$ 為正方形對角線的一半，

故 $\overline{AD}:\overline{DM}=\sqrt{2}:1$，$\Delta BAD$ 中，由餘弦定理知

$\cos\angle BAD=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-1^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$

71 **範例 6** (1) $4\sqrt{3}$ (2) 8 (3) $4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

(1) $\overline{PQ}$ 垂直平面 OYZ，$\overline{QR}\perp\overline{OR}$，由三垂線定理知

$\overline{PR}\perp\overline{OR}$，又 $\angle POR=30^\circ$，$\overline{OP}=8$

$\therefore\ \overline{OR}=\overline{OP}\cos\angle POR=8\cos 30^\circ=4\sqrt{3}$

(2) $\overline{OS}\cos\angle SOR=\overline{OR}\quad\Rightarrow\quad\overline{OS}\times\cos 30^\circ=4\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{OS}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\cos 30^\circ}=8$

(3)由餘弦定理 $\overline{PS}^2=\overline{OP}^2+\overline{OS}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{OS}\times\cos\angle POS$

$=8^2+8^2-2\times 8\times 8\times\cos 30^\circ=128-64\sqrt{3}$

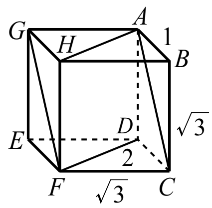
$\therefore\ \overline{PS}=4\sqrt{8-4\sqrt{3}}=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

類題 (1)①(A)(B)(C) ② $\sqrt{7}$ (2)(A)(C)(E)

(1)如右圖，可知 $ACFG$ 和 $AHFD$ 為長方形

$\therefore$(B) $\angle ACF$ 和(C) $\angle ADF$ 為直角

且(D) $\angle AFD$ 不是直角



(E) $\overline{AB}=1$，$\overline{BF}=\sqrt{6}$

$\overline{AF}=\sqrt{2^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{7}$

滿足 $\overline{AB}^2+\overline{BF}^2=\overline{AF}^2$

$\therefore\ \angle ABF=90^\circ$ 但 $\angle BAF<90^\circ$

(2)由題意知，$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CD}$ 指向正東方，$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{ED}$ 指向正上方

$\therefore$ $BCDE$ 為矩形且 $\overline{AB}$ 垂直平面 $BCDE$，$\overline{BC}\perp\overline{CD}$

由三垂線定理知 $\overline{AC}\perp\overline{CD}$，且平面 ABC 上的 $\overline{AB}$ 和平面 $BCDE$ 上的 $\overline{BE}$ 分別垂直兩平面的交線 $\overline{BC}$

故平面 ABC 垂直平面 $BCDE$

$\because\ \angle ACD=90^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$

$\therefore\ \overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$

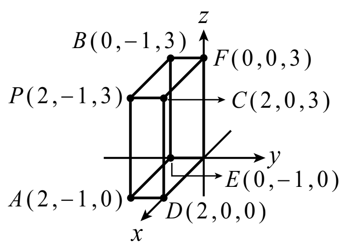
$=640^2+480^2+600^2=1000^2\quad\therefore\ \overline{AD}=1000$

72 **基礎 5** (1)① $(2,-1,0)$ ② $(0,-1,3)$ ③ $(2,0,3)$

④ $(2,0,0)$ ⑤ $(0,-1,0)$ ⑥ $(0,0,3)$

(2) $\sqrt{14}$

(1)



(2) $\overline{AF}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{14}$

所張出的平行六面體的體積為 $\left|\begin{vmatrix}1&-4&3\\2&-2&-3\\1&0&2\end{vmatrix}\right|$

$=\left|1\times(-2)\times2+(-4)\times(-3)\times1+3\times2\times0-3\times(-2)\times1-(-4)\times2\times2-1\times(-3)\times0\right|=30$

範例⑯ (1) $5\sqrt{6}$ (2) 30 (3) $\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}=(-2,4,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(-3,1,1)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,2)$

(1)平行四邊形 $ABCD$ 面積

$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\left|\left(\begin{vmatrix}4&-1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&-2\\1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&4\\-3&1\end{vmatrix}\right)\right|$

$=|(5,5,10)|=5|(1,1,2)|=5\sqrt{6}$

(2)平行六面體 $ABCD-EFGH$ 體積 $=\left|\begin{vmatrix}-2&4&-1\\-3&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}\right|$

$=|(-2)\times1\times2+4\times1\times1+(-1)\times(-3)\times1-(-1)\times1\times1-4\times(-3)\times2-(-2)\times1\times1|=30$

(3)平行六面體 $ABCD-EFGH$ 體積 = 底面積 × 高

$\therefore$ E 點到平面 $ABCD$ 距離

$=\dfrac{\text{平行六面體 } ABCD-EFGH \text{ 體積}}{\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}}=\dfrac{30}{5\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

85 **類題** (1)① 384 ② $\dfrac{32}{5}$ (2) 1；3

(1) $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{AD}=(2,8,9)$，$\overrightarrow{AE}=(-3,4,12)$

①平行六面體 $ABCD-EFGH$ 體積

$=\left|\begin{vmatrix}-3&4&0\\2&8&9\\-3&4&12\end{vmatrix}\right|=4\times3\times\left|\begin{vmatrix}-3&1&0\\2&2&3\\-3&1&4\end{vmatrix}\right|$

$=4\times3\times|(-3)\times2\times4+1\times3\times(-3)+0\times2\times1-0\times2\times(-3)-1\times2\times4-(-3)\times3\times1|$

$=4\times3\times32=384$

②平行四邊形 $ABFE$ 面積

$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE}|=|(-3,4,0)\times(-3,4,12)|$

$=\left|\left(\begin{vmatrix}4&0\\4&12\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-3\\12&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&4\\-3&4\end{vmatrix}\right)\right|$

$=|(48,36,0)|=12|(4,3,0)|=12\times5=60$

$\therefore d(D,\text{平面 }ABFE)$

$=\dfrac{\text{平行六面體 } ABCD-EFGH \text{ 體積}}{\text{平行四邊形 } ABFE \text{ 面積}}=\dfrac{384}{60}=\dfrac{32}{5}$

(2)平行六面體體積

$=\left|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&t+1&3\\2t-1&t+1&t-1\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}1&0&0\\1&t&2\\2t-1&-t+2&-t\end{vmatrix}\right|$

$\times(-1)$ $\times(-1)$

$=\left|\begin{vmatrix}t&2\\-t+2&-t\end{vmatrix}\right|=|-t^2+2t-4|=|-(t-1)^2-3|=|(t-1)^2+3|$

故當 $t=1$ 時，有最小值 3

範例⑰ -3

$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共平面，即 $\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&2&k\\-3&1&2\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\ 2\times2\times2+(-3)\times k\times(-3)+1\times1\times1-1\times2\times(-3)-(-3)\times1\times2-2\times k\times1=0$

$\Rightarrow\ 7k+21=0\ \Rightarrow\ k=-3$

《另解》

$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共平面 $\therefore$ $\vec{b}$ 可寫成 $\vec{a}$ 和 $\vec{c}$ 的線性組合

設 $\vec{b}=x\vec{a}+y\vec{c}$，即 $(1,2,k)=x(2,-3,1)+y(-3,1,2)$

$\Rightarrow\ 2x-3y=1\cdots$①，$-3x+y=2\cdots$②，$x+2y=k\cdots$③

由①②可解得 $x=-1$，$y=-1$，代入③，得 $k=-3$

86 **類題** (1) -10 (2)(A)(B)(E)

(1) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共平面

$\Rightarrow$ $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張的平行六面體體積為 0

$\therefore\ \begin{vmatrix}2&-1&3\\4&-2&5\\k&5&1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\ 2\times(-2)\times1+(-1)\times5\times k+3\times4\times5-3\times(-2)\times k-(-1)\times4\times1-2\times5\times5=0$

$\Rightarrow\ k=-10$

《另解》

$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共平面 $\therefore$ $\vec{c}$ 可寫成 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的線性組合

設 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，即 $(k,5,1)=x(2,-1,3)+y(4,-2,5)$

$2x+4y=k\cdots$①；$-x-2y=5\cdots$②；$3x+5y=1\cdots$③

由②③可解得 $x=27$，$y=-16$，代入①，得 $k=-10$

（或由①②中，xy 項係數等比例，可知 $k=-10$）

(2)(A)(B) $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$、$|(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}|$ 和 $\left|\begin{vmatrix}x&y&z\\-3&4&-5\\5&8&-1\end{vmatrix}\right|$ 都是 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張的平行六面體體積

(C)(D)若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張的平行六面體體積為 0，則 $\vec{c}=\vec{0}$ 或 $\vec{c}$ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的線性組合（$\vec{c}$ 在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張的平面上）

(E)若 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$，則 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共平面，所以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張的平行六面體體積為 0

綜合實力測驗

1.(C) 2.(D) 3.(C) 4.(A) 5.(C) 6.(A)(C)(D)

7.(A)(B)(D) 8.(B)(D) 9.(B)(D) 10.(C)(E) 11.(B)(C)(D)

12. $(\dfrac{13}{3},-\dfrac{4}{3},4)$ 13.(1) $(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})$ (2) $(-\dfrac{1}{12},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{6})$

14. 4；-5 15.(1) 90 (2) 45 (3) 120 16. -4

17. 338；$(6,-8,24)$ 18.(1) $-\dfrac{16}{21}$ (2) $\dfrac{\sqrt{185}}{2}$

19. $\sqrt{65}$ 20. ±3 21.(1) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ (2) 26 (3) $\dfrac{26\sqrt{5}}{25}$

22. $\pm(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{3})$ 23. $(-7,30,18)$

24. 27 25. $\sqrt{337}$ 26. $4\sqrt{2}$

27.(1) 16；15.125 (2)(D) 28.(1)(C) (2) $\dfrac{5}{6}$ (3) $\dfrac{8}{21}$

29.(1) 60 (2) 12 (3) $(-\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{6}}{4},\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$

1.因為 C 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分面上，所以 $\overline{AC}=\overline{BC}$

$\sqrt{(3-2)^2+[2-(-3)]^2+(3-4)^2}$

$=\sqrt{(3-4)^2+(2-1)^2+(3-a)^2}$

$\Rightarrow\ \sqrt{27}=\sqrt{11-6a+a^2}$

$\Rightarrow\ 27=11-6a+a^2\ \Rightarrow\ a^2-6a-16=0$

$\Rightarrow\ (a-8)(a+2)=0\ \Rightarrow\ a=8$ 或 -2

又 B 點在第一卦限，所以 a 為正，故 $a=8$

2.令 $A(0,0,0)$、$B(0,6,0)$、$D(-7,0,0)$、$E(0,0,8)$

則 $F(0,6,8)$、$H(-7,0,8)$

$\therefore\ \overrightarrow{AF}=(0,6,8)$，$\overrightarrow{AH}=(-7,0,8)$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AH}=0\times(-7)+6\times0+8\times8=64$

87 3.令 $A(0,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(-1,1,0)$、$D(-1,0,0)$

、$E(0,0,1)$、$F(0,1,1)$、$G(-1,1,1)$、$H(-1,0,1)$

$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AH}=(-1,0,1)$

$\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AH}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(1,-1,1)$

(A) $\overrightarrow{AG}=(-1,1,1)$　(B) $\overrightarrow{BH}=(-1,-1,1)$

(C) $\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$　(D) $\overrightarrow{DF}=(1,1,1)$

(E) $\overrightarrow{FH}=(-1,-1,0)$

4.(A)因為 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，所以

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=0$

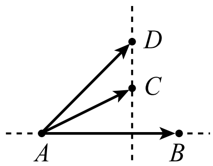
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

(B)由(A)得知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

又四點相異，故 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

因此可推得 C、D 只要在同一條

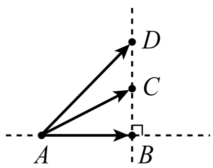
與 $\overrightarrow{AB}$ 垂直的線上即可，如右圖



(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，又四點相異，故 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

(D)不一定，例如 B、C、D 三點共線

即為反例。如右圖



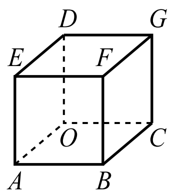
(E)不一定，例如在空間坐標中

$A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$C(0,0,1)$

、$D(0,1,1)$ 不在同一平面上，但

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，滿足題意

5.設正立方體 $OABC-DEFG$ 坐標化



$O(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、

$B(1,1,0)$、$C(0,1,0)$、

$D(0,0,1)$、$E(1,0,1)$、

$F(1,1,1)$、$G(0,1,1)$

期望值 $=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})}{P_2^7}$

$+\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})}{P_2^7}+\cdots$

$+\dfrac{\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})}{P_2^7}$

$=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})}{42}-\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}}{42}$

$+\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}}{42}$

$+\cdots+\dfrac{\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})-\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OG}}{42}$

$=\dfrac{1}{42}\cdot[(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})$

$\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})$

$-|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OD}|^2-|\overrightarrow{OE}|^2-|\overrightarrow{OF}|^2-|\overrightarrow{OG}|^2]$

$=\dfrac{1}{42}\cdot[(4,4,4)\cdot(4,4,4)-1-2-1-1-2-3-2]$

$=\dfrac{36}{42}=\dfrac{6}{7}$

6.(B)設 O 為原點

則 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(1,0,4)+(3,2,6)=(4,2,10)$

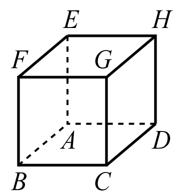
即 $C(4,2,10)$

(C) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2,-6)=-\overrightarrow{AC}$　$\therefore\ \overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$　$\therefore\ |\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CA}|$

(E) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}=(6,4,12)$

7.(A)例如：$\overline{AD}$ 中點 M_1



則 $\overrightarrow{AM_1}=(0,\frac{1}{2},0)$

(B)例如：$\overline{BC}$ 中點 M_2

則 $\overrightarrow{AM_2}=(1,\frac{1}{2},0)$

(C)若 $\overrightarrow{AN_1}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，則 N_1 為 $BCGF$ 的中心

(D)例如：$\overline{FG}$ 中點 M_3，則 $\overrightarrow{AM_3}=(1,\frac{1}{2},1)$

(E)若 $\overrightarrow{AN_2}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，則 N_2 是此正立方體的中心

8.(A) $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 、$\vec{v}$ 共平面　(B) $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ 且 $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$

(C) $[\vec{u}+(\vec{u}\times\vec{v})]\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2+(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2\neq0$

$\therefore\ \vec{u}+(\vec{u}\times\vec{v})$ 不垂直 $\vec{u}$

(D) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{v}$

故 $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{v}$ 為 $\vec{u}$ 、$\vec{v}$ 的公垂向量

(E) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}\times\vec{v})$ 與 $\vec{u}+\vec{v}$ 垂直，且與 $\vec{u}\times\vec{v}$ 垂直

88 9.(A)(E)行列式運算無此規則

(B)正確

(C)每一列（行）都可提出公因數，故

$\begin{vmatrix}1.1&1.2&1.3\\1.4&1.5&1.6\\1.7&1.8&1.9\end{vmatrix}=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}\times\begin{vmatrix}11&12&13\\14&15&16\\17&18&19\end{vmatrix}$

(D)行列式中，任一列 $\times k$ 倍加到另一列中，其值不變

故 $\begin{vmatrix}100&200&300\\4&5&6\\107&208&309\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}100&200&300\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

10.(A) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$

又 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

故 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overline{AD}^2$

(B)若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{AD}^2>0$　$\therefore\ \angle BDC$ 為銳角

地毯式

高中數學複習講義

3A → 4A 冊

課後練習本

OF HIGH SCHOOL MATH

11 空間向量

概念 1 空間概念

1. 已知 L_1、L_2、L_3 為空間中三條直線，試問下列敘述哪些正確？（多選）________

(A)若 L_1、L_2 都與 L_3 平行，則 L_1、L_2 在同一平面上

(B)若 L_1、L_2 都與 L_3 平行，則 L_1、L_2、L_3 在同一平面上

(C)若 L_1 與 L_2 垂直且 L_1 與 L_3 垂直，則 L_2、L_3 在同一平面上

(D)若 L_1 與 L_2 垂直且 L_1 與 L_3 平行，則 L_2、L_3 在同一平面上

(E)若 L_1 與 L_2 平行，L_3 與 L_1 垂直，L_3 與 L_2 垂直，則 L_1、L_2、L_3 在同一平面上

解

2. 已知空間中有兩相異直線 L_1 與 L_2，且點 A、B 在 L_1 上，點 C、D 在 L_2 上，則下列敘述何者正確？（單選）______

(A)若 A、B、C、D 四點共平面，則 L_1 與 L_2 共平面

(B)若平面 ABC 與平面 ACD 重合，則 $L_1 /\!/ L_2$

(C)若 L_1 在平面 E_1 上，L_2 在平面 E_2 上，且 $L_1 /\!/ L_2$，則 $E_1 /\!/ E_2$

(D)若 L_1 在平面 E_1 上，L_2 在平面 E_2 上，且 $E_1 /\!/ E_2$，則 $L_1 /\!/ L_2$

(E)若 L_1 在平面 E_1 上，L_2 在平面 E_2 上，且 L_1 與 L_2 歪斜，則 E_1 與 E_2 必交於一線

解

3. 下列有關空間中直線與平面的敘述，哪些正確？（多選）________

(A)若直線 L_1 與 L_2 垂直，則恰有一平面包含 L_1 與 L_2

(B)若直線 L_1 與 L_2 平行，則恰有一平面包含 L_1 與 L_2

(C)若直線 L_1 與 L_2 歪斜，則至少有一平面包含 L_1 與 L_2

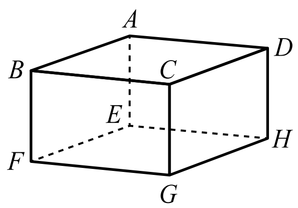
(D)若直線 L_1 與 L_2 歪斜，且平面 E 包含 L_1，則 L_2 平行平面 E

(E)若平面 E 包含直線 L_1，且直線 L_2 平行平面 E，則 L_1 與 L_2 平行

解

4. 如右圖，$ABCD-EFGH$ 為一長方體，則下列哪些線段與 $\overleftrightarrow{AC}$ 歪斜？（多選）__________

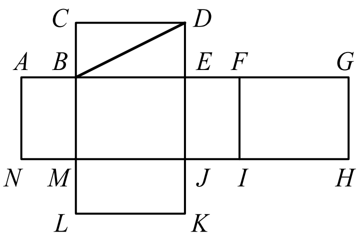
(A) $\overline{BC}$　(B) $\overline{EF}$　(C) $\overline{BG}$　(D) $\overline{DH}$　(E) $\overline{EG}$



解

11 空間向量

5. 右圖為一長方體的展開圖，若將此展開圖組合成長方體後，試問：



⑴下列哪些直線與 $\overleftrightarrow{BD}$ 互為歪斜線？（多選）________

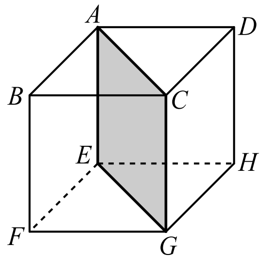
(A) $\overleftrightarrow{JL}$　(B) $\overleftrightarrow{MK}$　(C) $\overleftrightarrow{EI}$　(D) $\overleftrightarrow{FJ}$　(E) $\overleftrightarrow{AN}$

⑵設 $\overline{AB}=2$，$\overline{BM}=3$，$\overline{BE}=4$，則 $\overleftrightarrow{BD}$ 與平面 $FGHI$ 夾的銳角為 θ，則 $\tan\theta=$______。

解

概念 2　兩面角、三垂線定理

6. 有一正立方體 $ABCD-EFGH$，試問：

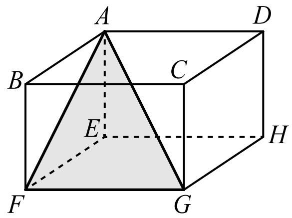


⑴平面 $AEGC$ 與平面 $ABCD$ 的兩面角為______度。

⑵平面 $AEGC$ 與平面 $ABFE$ 的兩面角為______度。

解

7. 如右圖，$ABCD-EFGH$ 為一長方體，$\overline{AB}=3$，$\overline{BF}=4$，$\overline{BC}=6$，試問：



⑴設銳角 α 為平面 AFG 與平面 $EFGH$ 的兩面角，則 $\cos\alpha=$______。

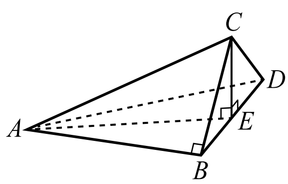
⑵設 β 為平面 AFG 與平面 $ABFE$ 的兩面角，則 $\cos\beta=$______。

解

8. 若將一張正方形紙片 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{AC}$ 摺起，使得平面 ABC 和平面 ACD 的夾角為 90°，則此時 $\angle BCD=$______。

解

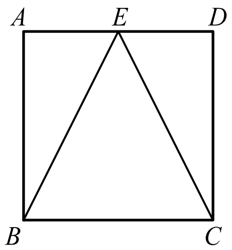
9.如右圖，有一個四面體 $ABCD$，已知 E 在 $\overline{BD}$ 上，$\overline{CE}\perp\overline{BD}$，$\overline{CE}\perp\overline{AE}$，$\overline{BC}\perp\overline{AB}$，$\overline{CE}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=13$，$\overline{AD}=15$。若平面 ABC 與平面 ABD 的兩面角為 θ，試求：

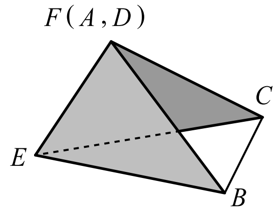


⑴ $\sin\theta=$______　⑵ $\overline{DE}=$______　⑶ $\overline{CD}=$________。

解

10. 有一正方形紙張 $ABCD$，設 E 點為 $\overline{AD}$ 的中點，若沿 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CE}$ 摺起，使得 $\overline{AE}$ 和 $\overline{DE}$ 重合，且 A、D 兩點重合於紙張上方的 F 點。試問：





⑴平面 BEF 和平面 CEF 的兩面角為何？（單選）

(A) $\angle BEC$　(B) $\angle BFC$　(C) $\angle BEF$
(D) $\angle FBE$　(E) $\angle FBC$

⑵平面 BEF 和平面 BCF 的兩面角為______度。

解

概念 3　空間向量及運算

11. 在空間坐標系中，有一點 $P(4,-3,-2)$，則：

⑴ P 點在 xy 平面的投影點坐標為____________。

⑵ P 點在 y 軸的投影點坐標為____________。

解

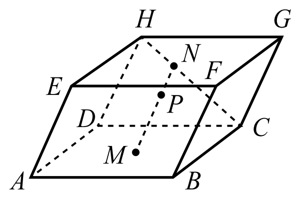
12. 設 $\vec{a}=(5,-4,2)$，$\vec{b}=(0,4,3)$，$\vec{c}=(3,0,-2)$，$\vec{d}=(2,-2,-7)$，若 $(\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\,/\!/\,\vec{d}$，則數對 $(s,t)=$__________。

解

13. 試求 $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+16}+\sqrt{(x+7)^2+(y-6)^2+4}$ 的最小值為_____。

解

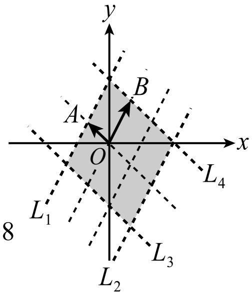
14. 如右圖，空間中有一個平行六面體 $ABCD-EFGH$，已知 M 是平行四邊形 $ABCD$ 對角線的交點，N 在平行四邊形 $CDHG$ 上，且 $\overline{CN}:\overline{NH}=2:1$，$P$ 點在 $\overline{MN}$ 上且 $\overline{MP}:\overline{NP}=2:1$。若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AE}$，則 $(x,y,z)=$____________。



解

34.18

P 點所在的區域如右圖中 L_1、L_2 與 L_3、L_4 所圍成的區域，其面積為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 所圍成的平行四邊形面積的 6 倍，即



$6\left|\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right| = 6|(-1)\times 2-1\times 1| = 18$

35.(1) 200　(2) 600　(3) 600

(1) $\left|\begin{vmatrix}11 & 21\\ 31 & 41\end{vmatrix}\right| = |11\times 41-21\times 31| = |-200| = 200$

(2) $\left|\begin{vmatrix}11 & 21\\ 11+3\times 31 & 21+3\times 41\end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix}11 & 21\\ 11 & 21\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}11 & 21\\ 31 & 41\end{vmatrix}\right|$

$= |0+3\times(-200)| = 600$

(3) $\left|\begin{vmatrix}11 & 21\\ 4\times 11+3\times 31 & 4\times 21+3\times 41\end{vmatrix}\right|$

$= \left|4\begin{vmatrix}11 & 21\\ 11 & 21\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}11 & 21\\ 31 & 41\end{vmatrix}\right| = |4\times 0+3\times(-200)| = 600$

36.$(\frac{41}{37},\frac{33}{37})$

$\Delta = \begin{vmatrix}123 & 234\\ 135 & 246\end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix}123 & 234\\ 12 & 12\end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix}123 & 234\\ 1 & 1\end{vmatrix}$

$= 12\times(123\times 1-234\times 1) = 12\times(-111)$

$\Delta_x = \begin{vmatrix}345 & 234\\ 369 & 246\end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix}345 & 234\\ 24 & 12\end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix}345 & 234\\ 2 & 1\end{vmatrix}$

$= 12\times(345\times 1-234\times 2) = 12\times(-123)$

$\Delta_y = \begin{vmatrix}123 & 345\\ 135 & 369\end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix}123 & 345\\ 12 & 24\end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix}123 & 345\\ 1 & 2\end{vmatrix}$

$= 12\times(123\times 2-345\times 1) = 12\times(-99)$

$\therefore (x,y) = (\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}) = (\frac{12\times(-123)}{12\times(-111)},\frac{12\times(-99)}{12\times(-111)})$

$= (\frac{123}{111},\frac{99}{111}) = (\frac{41}{37},\frac{33}{37})$

11 空間向量

18 1.(A)(E)

(A)若 L_1、L_2 都與 L_3 平行，則 L_1 與 L_2 平行，可決定一平面

(B)反例：三角柱的三個稜邊

(C)(D) L_2 與 L_3 可能為歪斜，則此兩直線就無法共平面

(E)若 L_1 與 L_2 平行，則 L_1 與 L_2 可決定一平面，又 L_3 又與這兩條直線垂直，故 L_3 亦在此平面上

2.(A)

(B)不一定，L_1 和 L_2 共平面，可能平行也可能交於一點

(C)不一定，E_1 和 E_2 也可能交於一線

(D)不一定，L_1 和 L_2 也可能歪斜

(E)不一定，E_1 和 E_2 也可能平行

3.(A)(B)

(C)沒有平面同時包含 L_1 和 L_2

(D) L_2 也可能與平面 E 交於一點

(E) L_1 和 L_2 也可能歪斜

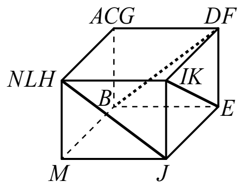
4.(B)(C)(D)

與 $\overleftrightarrow{AC}$ 不相交的直線中，$\overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{AC}$，其餘都與 $\overleftrightarrow{AC}$ 歪斜

故選(B)(C)(D)

19 5.(1)(A)(C)(E)　(2) $\frac{1}{2}$

將展開圖組合後可得右圖



(1)由圖可知 $\overleftrightarrow{JL}$、$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{AN}$ 都與 $\overleftrightarrow{BD}$ 互為歪斜線

$\overleftrightarrow{MK}$ 和 $\overleftrightarrow{BD}$ 平行

$\overleftrightarrow{FJ}$ 和 $\overleftrightarrow{BD}$ 交於一點

(2)由組合後的立體圖形可知 $\overline{BD}$ 在平面 $EGHI$ 的投影為 $\overline{CD}$，故 $\theta = \angle BDC$　$\therefore \tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

6.(1) 90　(2) 45

(1)$\because$ $\overline{AE}$ 垂直平面 $ABCD$

$\therefore$包含 $\overline{AE}$ 的平面都垂直平面 $ABCD$

故平面 $AEGC$ 和平面 $ABCD$ 的兩面角為 90 度

(2)$\because$ $\angle AEF = 90^\circ$，$\angle AEG = 90^\circ$

$\therefore$平面 $AEGC$ 和平面 $ABFE$ 的兩面角 $= \angle GEF = 45^\circ$

7.(1) $\frac{3}{5}$　(2) 0

(1) $\cos\alpha = \cos\angle AFE = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$

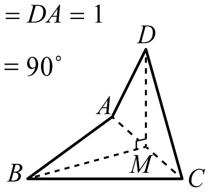
(2)$\because$ $\overline{FG} \perp$ 平面 $ABFE$　$\therefore$平面 $AFG \perp$ 平面 $ABFE$

即 $\beta = 90^\circ$　$\therefore \cos\beta = 0$

8.60°

設 $\overline{AC}$ 中點為 M，令 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$

則 $\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，摺起後 $\angle BMD = 90^\circ$



$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BM}^2+\overline{DM}^2} = 1$

$\therefore \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD} = 1$，即摺起後 ΔBCD 為正三角形，故 $\angle BCD = 60^\circ$

9.(1) $\frac{4}{5}$　(2) 6　(3) $2\sqrt{13}$

(1)由題意知 $\overline{CE} \perp$ 平面 ABD，又 $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

由三垂線定理知 $\sin\theta = \sin\angle CBE = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \frac{4}{5}$

(2) $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$

$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AB}^2} = \sqrt{15^2-12^2} = 9$

$\overline{BE} = \sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CE}^2} = \sqrt{5^2-4^2} = 3$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BD}-\overline{BE} = 9-3 = 6$

(3) $\overline{CD} = \sqrt{\overline{CE}^2+\overline{DE}^2} = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}$

20 10.(1)(B)　(2) 90

(1)平面 BEF 和平面 CEF 的交線為 $\overleftrightarrow{EF}$

又 $\overline{BF} \perp \overline{EF}$，$\overline{CF} \perp \overline{EF}$

所以 $\angle BFC$ 為平面 BEF 和平面 CEF 的兩面角

(2) $\overline{BF} \perp \overline{EF}$，$\overline{CF} \perp \overline{EF}$，所以 $\overline{EF}$ 垂直平面 BCF

故包含 $\overline{EF}$ 的平面都與平面 BCF 垂直

因此平面 BEF 和平面 BCF 的兩面角為 90 度

11.$(4,-3,0)$；$(0,-3,0)$

12.$(2,-3)$

$\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c} = (5+3t,-4+4s,2+3s-2t) \parallel \vec{d} = (2,-2,-7)$