目 次

1 數與式

學測趨勢 這是一到四冊各章教材中最為「混亂」的一章，所介紹的觀念包山包海，從數字結構到指數對數，因各題型之間欠缺連貫性，導致各版本教科書都有各自的編寫順序，請同學當成是總複習的前菜拼盤吧！

準備方向 解題時為了能夠即時想到應對的方法，請同學務必反覆熟讀本章的概念。在大考試題的「素養」要求之下，本章各題型很容易被加工成為情境閱讀試題，請同學要有心理上的準備。

年　度	105	106	107	108	109	110	111 A+B	112 A+B	113 A+B
學測命題數	2	2	0	2	1	2	3	2	1

★★★★

❶ 分數化成小數

最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 可用除法化成小數，若分母 a 沒有 2、5 以外的質因數，則 $\dfrac{b}{a}$ 可成有限小數，否則就是無限循環小數。

例 A 下列哪些分數可化成有限小數？______

(A) $\dfrac{7}{8}$　(B) $\dfrac{8}{7}$　(C) $\dfrac{21}{75}$　(D) $\dfrac{3}{2^{10}}$

例 B 將 $\dfrac{1234}{9999}$ 化成小數形式為 $0.\overline{1234}$，設小數點後第 n 位的數字為 $f(n)$，求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)=$ ______。

★★★★

❷ 循環小數化成分數

利用解方程式可以把循環小數化成分數，例如 $x=1.2\overline{34}$，則 $10x=12.\overline{34}$，$1000x=1234.\overline{34}$，所以 $1000x-10x=1234-12$，得 $x=\dfrac{1234-12}{990}$。依此類推，例如 $3.\overline{4}=\dfrac{34-3}{9}$，$5.6\overline{789}=\dfrac{56789-56}{9990}$。請注意 $0.\overline{9}=\dfrac{9}{9}=1$。

例 A 設 a、b 為循環小數，$a=0.\overline{12}$，$b=0.\overline{01}$，則 $a-b$ 的值是下列哪一個選項？______。

(A) 0.11　(B) 0.1111　(C) $\dfrac{1}{9}$　(D) $\dfrac{10}{99}$　(E) $\dfrac{100}{999}$

答對率 80%　108 指考乙

例 B 化簡 $\sqrt{(\frac{1}{1.\overline{1}})^2+(\frac{1}{2.\overline{2}})^2+(\frac{1}{3.\overline{3}})^2}=$ ______ 。

讀完可以先練習範例 1、2

★★★★

❸ 有理數、無理數與數系構造 學測 108 109 112B

(1)有限小數與循環小數都可以化成分數 $\frac{b}{a}$ 的形式，其中 a、b 為整數，且 $a\neq 0$，稱為有理數，如 $\frac{-5}{1}$、$\frac{2}{3}$、0、$2.\overline{3}$。全體有理數記為 Q。兩個相異有理數之間有無限多個有理數，稱為稠密性。

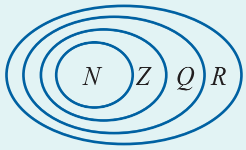
(2)不循環的無限小數無法表為分數形式，稱為無理數，如 π、$\sqrt{3}$。

(3)有理數與無理數合稱為實數，與實數線上的點一一對應。全體實數記為 R。

(4)有理數及實數的四則運算都具有封閉性（除數不可為 0），其加法與乘法有交換律、結合律、分配律，可利用等量公理對等式進行移項處理。

(5)任兩個實數 a、b 可比較大小，「$a>b$、$a=b$、$a<b$」恰有一個成立。可利用等量公理對不等式進行移項處理。

(6)全體正整數記為 N（又稱自然數），全體整數記為 Z。兩個相異整數的差至少是 1，稱為離散性。數系構造如右圖。



例 A 試選出正確的選項：______

(A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數　(B) $0.\overline{34}>\frac{1}{3}$　(C) $0.\overline{34}>0.343$

(D) $0.\overline{34}<0.35$　(E) $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$

例 B 設 a、b、c 為有理數，x、y 為無理數，下列推論哪些為真？______

(A) $ab+c$ 必為有理數　(B) $x+y$ 必為無理數

(C) $a+x$ 必為無理數　(D) ax 必為無理數

例 C 設 $a=\sqrt{7+\sqrt{47}}$，則 a 在哪兩個連續整數之間？______

(A) 0 與 1　(B) 1 與 2　(C) 2 與 3

(D) 3 與 4　(E) 4 與 5

例 D x、$y\in Z$，若 $|x-7|+3(y-4)^2=2$，則數對 $(x,y)=$ ______ 。

範例 1　有理數與無理數

學校園遊會的摸彩攤位有消費滿額的獎金放送活動，主辦人阿財準備了一個摸彩箱，箱中有五張字卡，每張字卡各有一個數值，分別是

$\boxed{3.\overline{57}}$　$\boxed{\sqrt{10}}$　$\boxed{1+\sqrt{5}}$

$\boxed{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}$　$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|}$

同學同時從摸彩箱取出三張字卡，獲得三個字卡的數字後，根據下列規則領取獎金：

有理數的個數比無理數還少	最大數比 4 還小	⇒	獲得獎金 10 元
	最大數比 4 還大	⇒	獲得獎金 8 元
有理數的個數比無理數還多	最大數比 4 還小	⇒	獲得獎金 5 元
	最大數比 4 還大	⇒	獲得獎金 3 元

請回答下列問題：

(1)若小華抽得的三張字卡是 $\boxed{3.\overline{57}}$、$\boxed{1+\sqrt{5}}$、$\boxed{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}$，請問小華獲得的獎金為下列哪一個選項？________

(A) 10 元　(B) 8 元　(C) 5 元　(D) 3 元

(2)若小明獲得獎金 10 元，請問他抽得哪三張字卡？________________

(3)許多人抽完字卡領得獎金之後，阿財發現有一個獎額都沒有人領過，請問是哪一個？________。為什麼沒人領到這個獎額？

(4)阿財設計這個活動時，本以為人人有獎，結果卻發現有人領不到獎金，請問有哪些情形會導致沒有獎金？請全部列出。

解

小小叮嚀
這是結合情境的素養題型，符合 108 課綱教學新趨勢

綜　合　實　力　測　驗

一 單選題

______ 1. 已知 $a=0.\overline{4}+0.\overline{6}$，$b=\sqrt{(0.9)^3+3\times(0.9)^2\times0.1+3\times0.9\times(0.1)^2+(0.1)^3}$，$c=\sqrt{(0.9)^2+0.18+(0.1)^2}$，則下列哪一個選項正確？

(A) $a=b=c$　(B) $a>b=c$　(C) $a>b>c$

(D) $c>a>b$　(E) $b=c>a$

______ 2. 請問下列哪一個選項的數不是有理數？

(A) $0.\overline{23}$　(B) $\sqrt{361}$　(C) 3.14159　(D) $10^{0.301}$　(E) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

______ 3. 設 $k=(\frac{1}{25})^{\frac{1}{4}}$，其中 $\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{5}\approx2.236$，則下列哪一個選項正確？

(A) $0.2<k<0.3$　(B) $0.3<k<0.4$　(C) $0.4<k<0.5$

(D) $0.5<k<0.6$　(E) $0.6<k<0.7$

______ 4. 水溶液中氫離子的濃度 $[H^+]$（單位為莫耳／升）可定義此溶液的酸鹼 pH 值，公式為 $pH=-\log[H^+]$，若某一水溶液的氫離子濃度為 $[H^+]=5.5\times10^{-4}$ 莫耳／升，則此溶液的 pH 值約為下列哪一個選項？（$55\approx10^{1.74}$）

(A) 3.26　(B) 3.52　(C) 4　(D) 4.52　(E) 5

二 多選題

______ 5. 已知 a、b 是有理數，c、d 是無理數，下列選項哪些是正確的？

(A) $a+b$ 是有理數　(B) $a+c$ 是無理數

(C) $c\times d$ 是無理數　(D) $c+d$ 是無理數

(E) $a+c=b+d$，則 $a=b$ 且 $c=d$

三 填充題

9. 某種細菌繁殖，每經過一天細菌數目會增加 a 倍，已知從正式實驗開始計算，2 天後細菌數為 300 個，5 天後細菌數為 37500 個，則_____天後細菌數目為 937500 個。

10. 若聯立不等式 $\begin{cases} |3-x| \le 4 \\ |x+2| \ge 5 \end{cases}$ 和 $|ax+1| \le b$ 有相同的解，則數對 $(a,b)=$ __________ 。

11. 已知 a、b 為有理數，若 $(\sqrt{6-2\sqrt{5}})^3 = a+b\sqrt{5}$，則數對 $(a,b)=$ __________ 。

12. 若 $k = 269 \times 271 \times (270^2+270+1)(270^2-270+1)$，化簡後整數 k 為_____位數。（已知 $\log 3 \approx 0.48$）

四 混合題

13. 某研究機構透過實驗發現：體重 w（公克）的動物在跑動 1 公里時，若以每公克體重計算的基礎耗氧量為 m（毫升），則 w 與 m 的關係式為 $m=\dfrac{9.12}{w^{0.4}}$。

(1) 試求體重 5 公斤的狗，其基礎耗氧量是體重 100 公斤人的幾倍？（請選出最接近的選項，$\log 2 \approx 0.3010$）_____

(A) 2 倍　(B) 3 倍　(C) 4 倍　(D) 5 倍　(E) 6 倍

(2) 令 $w=10^x$，$m=10^y$，且以近似值 $10^{0.96}$ 取代 9.12。設 y 對 x 的關係式為 $y=ax+b$，則數對 $(a,b)=$ __________ 。

(3) 請利用第(2)題 y 對 x 的關係式 $y=ax+b$，計算體重 80 公斤的美洲豹和體重 200 公斤的公獅子，在跑動 1 公里時，兩種動物的基礎耗氧量相差多少毫升？（已知 $10^{1.16} \approx 14.5$，$10^{-1.16} \approx 0.069$）__________

______ 1. 設整數 n 滿足 $|5n-21|\geq 7|n|$。試選出正確的選項。（多選題）

(A) $|5n-7n|\geq 21$

(B) $-1\leq \dfrac{7n}{5n-21}\leq 1$

(C) $7n\leq 5n-21$

(D) $(5n-21)^2\geq 49n^2$

(E)滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個

全對率 37%　111 學測 A

______ 2. 試問有多少個整數 x 滿足 $2|x|+x<10$？

(A) 13 個　(B) 14 個　(C) 15 個

(D) 16 個　(E)無窮多個

答對率 74%　111 學測 B

3. 若 x、y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}}y^2=1$ 及 $2\log y=1$，則 $\dfrac{x-y^2}{10}=$______。

答對率 48%　111 學測 B

______ 4. 若在計算器中鍵入某正整數 N，接著連按「$\sqrt{\ }$」鍵（取正平方根）3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？

(A) 2^3　(B) 2^4　(C) 2^6

(D) 2^8　(E) 2^{12}

答對率 78%　112 學測 A

______ 5. 已知 $a=6$、$b=\dfrac{20}{3}$、$c=2\sqrt{10}$ 和 d，且 d 為有理數，將這四個數標註在數線上，即 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$ 和 $D(d)$。試選出正確的選項。（多選題）

(A) $a+b+c+d$ 必為一個有理數

(B) $abcd$ 必為一個無理數

(C)點 D 有可能與點 C 的距離等於 $2\sqrt{10}+6$

(D)點 A 和點 B 的中點位在點 C 的右邊

(E)數線上和點 B 距離小於 8 的所有點中，正整數有 14 個，負整數有 1 個

全對率 16%　112 學測 B

______ 6. 有兩個光點在一條長度為 120 公分的直線形軌道上移動，碰到端點就反向繼續移動。一開始兩點分別在軌道的兩端相向而動，光點 A、光點 B 的移動速率分別為每秒 5 公分及每秒 10 公分。試選出正確的選項。（多選題）

(A)兩個光點第一次相遇的位置，與其中一個端點的距離為 40 公分

(B)光點 A 的位置呈週期現象，週期為 24 秒

(C)當光點 A 回到 A 的出發點時，光點 B 也在 B 的出發點

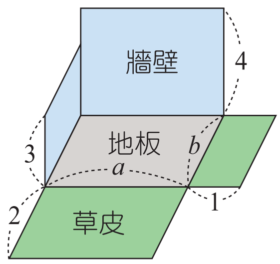
(D)兩個光點第二次相遇在其中一個端點上

(E)兩個光點在軌道上共有 3 個不同的相遇位置

113 學測 B

模　考　滿　分　挑　戰

1. 小明製作袖珍屋的展示模型，包含地板與兩面牆壁，另有兩片草皮與地板相接，已知地板是長 a 公分、寬 b 公分的長方形，兩面牆壁的高度分別是 3 公分與 4 公分，兩片草皮的寬度分別是 2 公分與 1 公分，如右圖。若地板與兩面牆壁的面積總和是 86 平方公分，試問：



(1)兩片草皮的面積和最少是多少平方公分？______
此時 a 與 b 的值各是多少？______

(2)若地板、兩面牆壁與兩片草皮的製作成本以總面積來計算，每平方公分需 5 元，則此袖珍屋的最低成本是多少元？______

(3)設地板每平方公分的製作時間是 3 分鐘，兩面牆壁每平方公分的製作時間是 4 分鐘，兩片草皮每平方公分的製作時間是 1 分鐘，則小明最少要花幾分鐘才能完成袖珍屋？（$\sqrt{3} \approx 1.73$，請四捨五入至整數）______

2. 數線上相異三點 $A(x_1)$、$B(x_2)$、$C(x_3)$，滿足 $x_3 = \dfrac{1.9\overline{4}x_1 - 1.3\overline{8}x_2}{0.\overline{5}}$，試問：

(1) $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的長度比例 $\overline{AB} : \overline{BC} =$ ______。

(2)若 x_1、x_2、x_3 為正數，且 $x_2 \cdot x_3 = 40$，試求 x_1 的最小值可能為 ______。

1 數與式

1 ❶ A (A)(C)(D)　B 246

A (A) $\frac{7}{8}=\frac{7\times125}{8\times125}=\frac{875}{1000}=0.875$　(B) $\frac{8}{7}=1.\overline{142857}$

(C) $\frac{21}{75}=\frac{7}{25}=\frac{28}{100}=0.28$

(D) $\frac{3}{2^{10}}=\frac{3\times5^{10}}{2^{10}\times5^{10}}=\frac{3\times5^{10}}{10^{10}}$，小數點之後共有 10 位

B 從 $f(1)$ 開始每 4 項之和為 10

所求 $=\underbrace{1+2+3+4}_{f(1)\text{到}f(4)}+\underbrace{1+2+3+4}_{f(5)\text{到}f(8)}+\cdots+\underbrace{1+2+3+4}_{f(93)\text{到}f(96)}$

$+1+2+\underbrace{3}_{f(99)}=\underbrace{10+10+\cdots+10}_{24\text{個}}+6=246$

❷ A (C)　B $\frac{21}{20}$

A $a-b=0.\overline{12}-0.\overline{01}=\frac{12}{99}-\frac{1}{99}=\frac{11}{99}=\frac{1}{9}$

2 B 所求 $=\sqrt{(\frac{9}{11-1})^2+(\frac{9}{22-2})^2+(\frac{9}{33-3})^2}$

$=\sqrt{\frac{81}{100}+\frac{81}{400}+\frac{81}{900}}=\sqrt{\frac{81(36+9+4)}{3600}}$

$=\sqrt{\frac{81\times49}{3600}}=\frac{9\times7}{60}=\frac{21}{20}$

❸ A (B)(C)(D)(E)　B (A)(C)　C (D)　D $(9,4)$ 或 $(5,4)$

A (A) $0.3\overline{43}=\frac{343-3}{990}=\frac{34}{99}$，為有理數

(B) $0.343434\cdots>0.333\cdots$　(C) $0.343434\cdots>0.343$

(D) $0.343434\cdots<0.35$　(E) $0.3\overline{43}=0.3434343\cdots=0.\overline{34}$

B (B)反例：$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$　(D)反例：$a=0$，$x=\sqrt{2}$

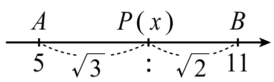
C $a=\sqrt{7+\sqrt{47}}=\sqrt{7+6.\cdots}=\sqrt{13.\cdots}=3.\cdots$　$\therefore 3<a<4$

D $\because 3(y-4)^2=0,3,12,\cdots$，必為 $x-7=\pm2$ 且 $y-4=0$

$\therefore (x,y)=(9,4)$ 或 $(5,4)$

3 ❹ A 23；-6　B (B)(D)

A $x=\frac{11\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$



$=\frac{(11\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=33-11\sqrt{6}+5\sqrt{6}-10$

$=23-6\sqrt{6}$　$\therefore a=23$，$b=-6$

B (A)若 $a+b$ 為負，則 $\frac{a+b}{3}>\frac{a+b}{2}$

(B) $\frac{4a+b}{5}=\frac{16a+4b}{20}$，$\frac{3a+b}{4}=\frac{15a+5b}{20}$

(C) $\frac{a-b}{4}-\frac{2a-b}{5}=\frac{-3a-b}{20}$ 可能為負（如 $a=1$，$b=2$）

(D) $\because a<b<0$　$\therefore \frac{a-b}{4}-\frac{2a-b}{5}=\frac{-3a-b}{20}>0$ 必成立

❺ A 11　B 5；$\sqrt{5}-2$

A $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\times2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\times1}}=\sqrt{5}+\sqrt{1}$

$\therefore \sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}+\sqrt{1})$

$=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$\therefore a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=5$

所求 $=1+2+3+5=11$

B $\sqrt{14+\sqrt{180}}=\sqrt{14+2\sqrt{45}}=\sqrt{(9+5)+2\sqrt{9\times5}}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$，約為 $5.2\cdots$

$\therefore$整數部分為 5，小數部分為 $(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$

4 ❻ A 180；$\frac{45}{2}$；10　B $\pm\sqrt{3}$；7

A $\because \frac{4x^2+9y^2}{2}\geq\sqrt{4x^2\cdot9y^2}=6|xy|=90$

$\therefore 4x^2+9y^2\geq180$

若 $4x^2+9y^2=180$，則 $4x^2=9y^2=90$

得 $x^2=\frac{45}{2}$，$y^2=10$

B $\because \frac{(x^2+1)+\frac{16}{x^2+1}}{2}\geq\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{16}{x^2+1}}=4$

$\therefore x^2+\frac{16}{x^2+1}\geq7$，得 $f(x)$ 最小值為 7

此時 $x^2+1=\frac{16}{x^2+1}$　$\therefore x^2+1=4$，得 $x=\pm\sqrt{3}$

❼ A 368；367　B 45　C 110

A $(4+\sqrt{10})^3+(4-\sqrt{10})^3$

$=[(4+\sqrt{10})+(4-\sqrt{10})]$

$\cdot[(4+\sqrt{10})^2-(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})+(4-\sqrt{10})^2]$

$=8[(26+8\sqrt{10})-6+(26-8\sqrt{10})]=8\times46=368$

因 $0<4-\sqrt{10}<1$　$\therefore 0<(4-\sqrt{10})^3<1$

則 $367<(4+\sqrt{10})^3<368$，得 $n=367$

B $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=9$　$\therefore a^2+b^2=9+4=13$

則 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=3\times(13+2)=45$

C $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x-\frac{3}{x}=5^3-3(x+\frac{1}{x})$

$=125-15=110$

5 ❽ A 4 或 -5　B 10　C 6；$-1\leq x\leq5$

A $2x+1=\pm9$，得 $2x=8$ 或 -10　$\therefore x=4$ 或 -5

B $-10\leq-2x+7\leq10$　$\Rightarrow$　$-17\leq-2x\leq3$

$\Rightarrow$　$\frac{3}{-2}\leq x\leq\frac{17}{2}$　$\therefore x=-1$、0、⋯、8，共 10 個

C 即 $f(x)=|x-(-1)|+|x-5|$

為「x 到 -1 與 5 的距離和」

$-1\leq x\leq5$ 時，$f(x)$ 有最小值為 $|5-(-1)|=6$

❾ A (B)　B (C)　C 72

A (A)應為 $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}$　(C)應為 $16^{-\frac{3}{4}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(D) $-\frac{1}{8}$ 不能取分數次方，在高中視為無意義

B 次數最小為 $\frac{2}{3}$　$\therefore$所求 $=27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9$

C 所求 $=(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(\frac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}=(\frac{27}{8})^{\frac{2}{3}}\times4^{\frac{5}{2}}=\frac{9}{4}\times32=72$

❿ A 1024　B $-\frac{13}{4}$　C (A)(C)(D)

A 所求 $=[(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})]^{10}=2^{10}=1024$

B 左式 $=\dfrac{2^{-\frac{35}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}=2^{-\frac{35}{3}-\frac{4}{3}}=2^{-13}=2^{4x}$　$\therefore x=-\dfrac{13}{4}$

6 C $(81)^x=(3^4)^x=3^{4x}=(3^x)^4$ 或 $(3^2)^{2x}=9^{2x}$

⓫ A 24；6　B 28；9

A 位數為 $23+1=24$，最高位數字為 6

⓬ A $\log 6$；0.7781　B $(2,56)$　C 48

A $k=\log 6$　$\because 10^{0.3010}\approx 2$，且 $10^{0.4771}\approx 3$

則 $6=2\times 3\approx 10^{0.3010}\times 10^{0.4771}=10^{0.7781}$　$\therefore k\approx 0.7781$

B $(\sqrt[3]{49})^{100}=(7^{\frac{2}{3}})^{100}=7^{\frac{200}{3}}\approx(10^{0.8451})^{\frac{200}{3}}$

$=10^{56.34}=10^{0.34}\times 10^{56}$

$\because 10^{0.3010}<10^{0.34}<10^{0.4771}$　$\therefore 2<10^{0.34}<3$

$\therefore (\sqrt[3]{49})^{100}=2.\cdots\times 10^{56}$，得 $m=2$，$n=56$

C 由 $\log 3\approx 0.4771$ 知 $10^{0.4771}\approx 3$

$\therefore 3^{100}\approx(10^{0.4771})^{100}=10^{47.71}=10^{0.71}\times 10^{47}$

$\because 1<10^{0.71}<10$　$\therefore 3^{100}$ 為 $47+1=48$ 位數

7 **範例 1** (1)(D)　(2) $3.\overline{57}$、$\sqrt{10}$、$1+\sqrt{5}$　(3) 5 元

$3.\overline{57}$ 為有理數且比 4 小

$(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

而 $|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|=(\sqrt{2}+2)+(-\sqrt{2}+2)=4$ 為有理數

	有理數	無理數
比 4 大	$(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$	無
比 4 小	$3.\overline{57}$	$\sqrt{10}$,$1+\sqrt{5}$

(1) $3.\overline{57}$ 與 $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ 為有理數，所以有理數個數較多且最大數為 6，所以獎金為 3 元

(2)小明抽得 $\boxed{3.\overline{57}、\sqrt{10}、1+\sqrt{5}}$

(3)抽得 $\boxed{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2、\sqrt{10}、1+\sqrt{5}}$ 可得獎金 8 元

抽得 $\boxed{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2、3.\overline{57}、\sqrt{10}}$ 可得獎金 3 元

（還有別的情形）

三個有理數 $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$、$|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|$、$3.\overline{57}$ 取兩個，最大數不可能小於 4，所以不可能獲得 5 元獎金

(4)若最大數是 4，則按規則無法領取獎金，所以

$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|、\sqrt{10}、1+\sqrt{5}}$、

$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|、3.\overline{57}、\sqrt{10}}$、

$\boxed{|\sqrt{2}+2|+|\sqrt{2}-2|、3.\overline{57}、1+\sqrt{5}}$

這三種情形無法領取獎金

8 **類題 1** (A)(D)

(A)因 $(3.5)^2=12.25$　$\therefore 13>(3.5)^2$

(B)因 $(3.6)^2=12.96$　$\therefore 13>(3.6)^2$ 才對

(C)因 $\sqrt{13}-\sqrt{3}\approx 3.6-1.7=1.9$

而 $\sqrt{10}\approx 3.2$，應 $\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$ 才對

(D)因 $\sqrt{13}+\sqrt{3}\approx 3.6+1.7=5.3>4$

(E)因 $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{13-3}\approx\dfrac{3.6+1.7}{10}=0.53<0.6$

類題 2 (D)

列表討論，數值若重複就消去

m	1								2			
n	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$

m	3		4		5	6	7	8
n	1	2	1	2	1	1	1	1
$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore$共 $8+2+2+1+1+1+1+1=17$ 個

範例 2 (B)(C)

(A)若 a、b 為正數，則 $a^2>b^2$　$\Rightarrow$　$a^2-b^2>0$

$\Rightarrow$　$(a+b)(a-b)>0$　$\Rightarrow$　$a-b>0$　$\Rightarrow$　$a>b$

而 $(9\sqrt{5})^2=405$，$20^2=400$　$\Rightarrow$　$9\sqrt{5}>20$ 才對

(B) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=7+2\sqrt{14}+2=9+2\sqrt{14}=9+\sqrt{56}$

$4^2=16=9+7=9+\sqrt{49}$　$\therefore \sqrt{7}+\sqrt{2}>4$

(C) $\sqrt{13}-\sqrt{10}=\dfrac{3}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}$，$\sqrt{11}-2\sqrt{2}=\dfrac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}$

$\because \sqrt{13}+\sqrt{10}>\sqrt{11}+\sqrt{8}$　$\therefore \sqrt{13}-\sqrt{10}<\sqrt{11}-2\sqrt{2}$

(D)反例：$x=0$，滿足 $-1\le x\le 3$，但不滿足 $1\le x^2\le 9$

(E) $2\le y\le 3$　$\Rightarrow$　$-6\le -2y\le -4$

又 $-2\le x\le 5$　$\Rightarrow$　$-8\le x-2y\le 1$ 才對

類題 3 (A)(B)(E)

(A) $0+0<a+b<1+1$

(B)將 $0<a<1$ 同乘 b，得 $0<ab<b$　$\therefore 0<ab<1$

(C)應為 $-1<b-a<1$

$\because b$ 可接近 1，a 可接近 0，則 $b-a$ 接近 1

(D)應為 $0<\dfrac{a}{b}$，而 $\dfrac{a}{b}$ 沒有上限　$\because a$ 可接近 1，b 可接近 0

(E)$\because -1<a-b<1$，得 $|a-b|<1$

9 **類題 4** (C)(E)

$|2x-1|\le 7$　$\Rightarrow$　$-3\le x\le 4$，$|y-4|\le 2$　$\Rightarrow$　$2\le y\le 6$

(A)
$$\begin{array}{r} -3\le x\le 4 \\ +)\ -6\le -y\le -2 \\ \hline -9\le x-y\le 2 \end{array}$$

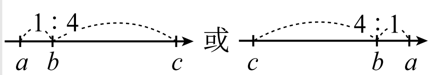
(B) x 可以為 0　$\therefore 0\le x^2\le 16$

(C) $(-3)^3\le x^3\le 4^3$　$\Rightarrow$　$-27\le x^3\le 64$

(D) $-18\le xy\le 24$ 才對　(E) $2\le y\le 6$　$\Rightarrow$　$\dfrac{1}{6}\le\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{2}$

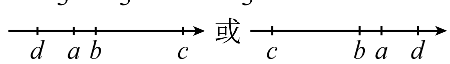
範例 3 (A)(D)

由分點公式，a、b、c 在數線上為



(B)不一定

(C) $d=\dfrac{4}{3}a-\dfrac{1}{3}c=a+\dfrac{a-c}{3}$ 在數線上為



d 在 a、c 之外，故不在 a、b 之間

因 $\sqrt{101}=10.\cdots$，得 $5.\cdots<x<15.\cdots$

則 $x=6,7,8,9,10,\cdots,15$，而 $\sqrt{38}=6.\cdots$

與 $\sqrt{38}$ 相距超過 3 的有 10,11,12,13,14,15，共 6 個

範例 8 (1)(B)(D)　(2) $a<b$　(3) $a\approx1.2777$，$b\approx1.3732$

(1)(A) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\sqrt2$ 次方

得 $(a^{\sqrt2})^{\sqrt2}=a^2=2^{\frac{\sqrt2}{2}}<2$ 才對

(B) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 3 次方

得 $(a^{\sqrt2})^3=a^{3\sqrt2}=2^{\frac32}=2\sqrt2$，可

(C) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\frac12$ 次方

得 $(a^{\sqrt2})^{\frac12}=a^{\frac{1}{\sqrt2}}=(2^{\frac12})^{\frac12}=2^{\frac14}\neq\sqrt{\frac12}$

(D) $a^{\sqrt2}=\sqrt2$ 的兩邊同取倒數，得 $a^{-\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$，可

(2) $a^{\sqrt2}=\sqrt2$ 的兩邊同取 $6\sqrt2$ 次方，得 $(a^{\sqrt2})^{6\sqrt2}=(\sqrt2)^{6\sqrt2}$

即 $a^{12}=2^{3\sqrt2}=8^{\sqrt2}$

$b^{\sqrt3}=\sqrt3$ 的兩邊同取 $4\sqrt3$ 次方，得 $(b^{\sqrt3})^{4\sqrt3}=(\sqrt3)^{4\sqrt3}$

即 $b^{12}=3^{2\sqrt3}=9^{\sqrt3}$

$\because 8^{\sqrt2}<9^{\sqrt2}<9^{\sqrt3}$　$\therefore a^{12}<b^{12}$，知 $a<b$

(3) $a^{\sqrt2}=2^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\frac{1}{\sqrt2}$ 次方

得 $a=(2^{\frac12})^{\frac{1}{\sqrt2}}=2^{\frac{\sqrt2}{4}}=1.277703\cdots\approx1.2777$

$b^{\sqrt3}=3^{\frac12}$ 的兩邊同取 $\frac{1}{\sqrt3}$ 次方

得 $b=(3^{\frac12})^{\frac{1}{\sqrt3}}=3^{\frac{\sqrt3}{6}}=1.373197\cdots\approx1.3732$

13 **類題 15** (C)

① $a^6=[(\frac12)^{\frac12}]^6=(\frac12)^3=\frac18$，$b^6=[(\frac13)^{\frac13}]^6=(\frac13)^2=\frac19$

$\therefore a>b$

② $a^4=[(\frac12)^{\frac12}]^4=(\frac12)^2=\frac14$，$c^4=[(\frac14)^{\frac14}]^4=\frac14$　$\therefore a=c$

由①②得知 $a=c>b$

類題 16 (C)

$b \xrightarrow[\text{點擊一次}]{} b^2 \xrightarrow[\text{點擊二次}]{} b^4 \xrightarrow[\text{點擊三次}]{} b^8$

$\therefore b^8\approx81^3=3^{12}$

得 $b=(3^{12})^{\frac18}=3^{\frac32}=3\sqrt3\approx3\times1.732=5.196$

範例 9 (1)(B)(C)(E)　(2)(B)(C)(D)　(3) 5

(1)可令 $x=2$，則(A) $x^2=4>2$　(B) $\frac1x=\frac12<2$

(C) $\sqrt x=\sqrt2<2$　(D) $10^x=100>2$

(E) $\log_{10}x=\log_{10}2\approx0.3010<2$

(2)可令 $x=0.5$，則(A) $x^2=0.25<0.5$　(B) $\frac1x=2>0.5$

(C) $\sqrt x=\sqrt{0.5}\approx0.71>0.5$　(D) $10^x=10^{\frac12}=\sqrt{10}>0.5$

(E) $\log_{10}x=\log_{10}\frac12=-\log_{10}2<0.5$

(3) $0.2\xrightarrow{x^2}0.04\xrightarrow{\frac1x}25\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}5$

$\xrightarrow{10^x}100000\xrightarrow{\log_{10}}5$

14 **類題 17** (D)

$1234^2=1522756$，在 10^6 與 10^7 之間

$\because \log(10^6)=6$ 且 $\log(10^7)=7$

$\therefore \log1522756$ 在 6 與 7 之間

類題 18 (D)

原式 $=2\log b+2+\log b=7$　$\therefore \log b=\frac53$

得 $b=10^{\frac53}=10^{\frac{10}{6}}$，而 $10\sqrt{10}=10\cdot10^{\frac12}=10^{\frac32}=10^{\frac96}$

$\therefore 10\sqrt{10}<b<100$

範例 10 2.54×10^{244}；245

知 $10^{2.44404}\approx278$，$10^{0.40400}\approx2.5351$

$\therefore 278^{100}\approx(10^{2.44404})^{100}=10^{244.404}=10^{0.404}\times10^{244}$

$\approx2.5351\times10^{244}\approx2.54\times10^{244}$

為 245 位數

類題 19 40

13 位數的範圍為 $10^{12}\sim10^{13}$（含 10^{12} 但不含 10^{13}）

等比數列第 n 項為 2^n

∴希望 $10^{12}\le2^n<10^{13}$，即 $10^{12}\le(10^{0.3010})^n<10^{13}$

$\therefore 12\le0.3010\times n<13 \Rightarrow \frac{12}{0.3010}\le n<\frac{13}{0.3010}$

$\Rightarrow 39.9\le n<43.2$　$\therefore n=40$

類題 20 (17,2)

$(\frac23)^{100}\approx(\frac{10^{0.3010}}{10^{0.4771}})^{100}=(10^{-0.1761})^{100}=10^{-17.61}=10^{-18+0.39}$

$=10^{0.39}\times10^{-18}$

而 $10^{0.3010}<10^{0.39}<10^{0.4771}$　$\therefore 2<10^{0.39}<3$

$\therefore (\frac23)^{100}=0.\underbrace{00\cdots0}_{17\text{ 個 }0}2\cdots$，得 $n=17$，$a_1=2$

綜合實力測驗

1.(B)	2.(D)	3.(C)	4.(A)	5.(A)(B)	6.(C)(D)(E)	7.(A)(D)
8.(A)(C)(E)	9. 7	10. $(-\frac15,\frac25)$	11. $(-16,8)$			
12. 15	13.(1)(B)	(2) $(-0.4,0.96)$	(3) 0.031 毫升			

15 1. $a=0.\bar4+0.\bar6=\frac49+\frac69=\frac{10}{9}$，$b=\sqrt{(0.9+0.1)^3}=\sqrt1=1$

$c=\sqrt{(0.9+0.1)^2}=\sqrt1=1$，得 $a>b=c$

2. (A) $0.\overline{23}=\frac{23}{99}$　(B) $\sqrt{361}=19$　(C)有限小數

(D)無限小數　(E) $\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac54$

3. $(\frac{1}{25})^{\frac14}=(\frac15)^{2\times\frac14}=(\frac15)^{\frac12}=\sqrt{\frac15}=\frac{\sqrt5}{5}\approx\frac{2.236}{5}=0.4472$

$\therefore 0.4<k<0.5$

4. $10^{1.74}\approx 55\quad \therefore 5.5\approx 10^{0.74}$

$\text{pH}=-\log[\text{H}^+]=-\log(5.5\times 10^{-4})$

$\approx-\log(10^{0.74}\times 10^{-4})=-\log(10^{-3.26})=3.26$

5. (A)封閉性　(C)取 $c=\sqrt{2}$，$d=-\sqrt{2}$

(D)取 $c=2+\sqrt{3}$，$d=2-\sqrt{3}$

(E)取 $a=5$，$c=1+\sqrt{2}$，$b=3$，$d=3+\sqrt{2}$

則 $a+c=b+d=6+\sqrt{2}$，但 $a\neq b$ 且 $c\neq d$

16 6. (A) $\sqrt{(\pi-3.15)^2}=|\pi-3.15|=3.15-\pi$

(B) $0.\overline{9}=\dfrac{9}{9}=1$

(C) $\sqrt{100}-\sqrt{99}=\dfrac{(\sqrt{100}-\sqrt{99})(\sqrt{100}+\sqrt{99})}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

$\sqrt{99}-\sqrt{98}=\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}$

$\because \sqrt{100}+\sqrt{99}>\sqrt{99}+\sqrt{98}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}<\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}$

$\Rightarrow\quad \sqrt{100}-\sqrt{99}<\sqrt{99}-\sqrt{98}$

(D) $[(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}]^6=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，$[(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}]^6=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$

$\therefore (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}>(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$

(E) $\dfrac{8+11}{2}>\sqrt{88}=2\sqrt{22}$

7. (A) $(\frac{1000}{125})^{-\frac{2}{3}}=(8)^{-\frac{2}{3}}=(\frac{1}{8})^{\frac{2}{3}}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

(B) $(10\sqrt{10})^{\log 8}=(10^{\frac{3}{2}})^{\log 8}=(10^{\log 8})^{\frac{3}{2}}=8^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{9}{2}}$

(C) $3^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{17}{12}}=\sqrt[12]{3^{17}}$

(D) $7^{-\frac{3}{2}}\times 63^{\frac{1}{2}}=(\frac{1}{7})^{\frac{3}{2}}\times 63^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{7^3}\times 7\times 9}=\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{3}{7}$

(E) $(7.826-5.1)\times 10^9=2.726\times 10^9$

答案應取 2 位有效數字，故原式 $\approx 2.7\times 10^9$

8. $a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}\xrightarrow{10^x}10^{\sqrt{a}}\xrightarrow{\log_{10}}\log(10^{\sqrt{a}})=\sqrt{a}$

(A) $a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}\xrightarrow{\log_{10}}\log\sqrt{a}\xrightarrow{10^x}10^{\log\sqrt{a}}=\sqrt{a}$

(B) $a\xrightarrow{10^x}10^a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{10^a}\xrightarrow{\log_{10}}\log_{10}(10^{\frac{a}{2}})=\dfrac{a}{2}$

(C) $a\xrightarrow{10^x}10^a\xrightarrow{\log_{10}}\log 10^a=a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}$

(D) $a\xrightarrow{\log_{10}}\log a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{\log a}\xrightarrow{10^x}10^{\sqrt{\log a}}$

(E) $a\xrightarrow{\log_{10}}\log a\xrightarrow{10^x}10^{\log a}=a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{a}$

17 9. 設原有細菌 k 個

$k(1+a)^2=300\cdots$①

$k(1+a)^5=37500\cdots$②

$\dfrac{②}{①}$ 得 $(1+a)^3=125=5^3$，得 $1+a=5$

令 n 天後細菌數目為 937500 個

$k(1+a)^n=k(1+a)^5(1+a)^{n-5}$

$\Rightarrow\quad 937500=37500\times(1+a)^{n-5}$

$\Rightarrow\quad (1+a)^{n-5}=25\quad\Rightarrow\quad 5^{n-5}=5^2\quad\Rightarrow\quad n=7$

10. $|3-x|\leq 4\quad\Rightarrow\quad |x-3|\leq 4\quad\Rightarrow\quad -4\leq x-3\leq 4$

$\Rightarrow\quad -1\leq x\leq 7\cdots$①

$|x+2|\geq 5\quad\Rightarrow\quad x+2\geq 5$ 或 $x+2\leq-5$

$\Rightarrow\quad x\geq 3$ 或 $x\leq-7\cdots$②

由①②得 $3\leq x\leq 7\quad\Rightarrow\quad 3-5\leq x-5\leq 7-5$

$\Rightarrow\quad -2\leq x-5\leq 2\quad\Rightarrow\quad |x-5|\leq 2\quad\Rightarrow\quad |-x+5|\leq 2$

$\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{5}\right||-x+5|\leq\left|\frac{1}{5}\right|\times 2\quad\Rightarrow\quad \left|-\frac{1}{5}x+1\right|\leq\frac{2}{5}$

得 $a=-\frac{1}{5}$，$b=\frac{2}{5}$，故數對 $(a,b)=(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$

11. $(\sqrt{6-2\sqrt{5}})^3=(\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2})^3=(\sqrt{5}-1)^3$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot(\sqrt{5})^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{5}\cdot 1^2-1^3=5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1$

$=-16+8\sqrt{5}$

$\therefore$數對 $(a,b)=(-16,8)$

12. $k=[(270+1)(270^2-270+1)]\cdot[(270-1)(270^2+270+1)]$

$=(270^3+1)(270^3-1)=270^6-1$

$=3^{18}\times 10^6-1\approx(10^{0.48})^{18}\times 10^6-1$

$=10^{14.64}-1\approx 10^{0.64}\times 10^{14}$

$\therefore k$ 為 15 位數

13. (1)狗：$w_1=5000$，$m_1=\dfrac{9.12}{5000^{0.4}}$

人：$w_2=100000$，$m_2=\dfrac{9.12}{100000^{0.4}}$

$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\frac{9.12}{5000^{0.4}}}{\frac{9.12}{100000^{0.4}}}=(\dfrac{100000}{5000})^{0.4}=20^{0.4}=(10^{\log 20})^{0.4}$

$=10^{0.4\times\log 20}=10^{0.4(1+\log 2)}\approx 10^{0.4\times 1.3010}$

$\approx 10^{0.52}\approx 10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3.1\cdots$

(2) $m=\dfrac{9.12}{w^{0.4}}\quad\Rightarrow\quad 10^y=\dfrac{10^{0.96}}{10^{0.4x}}\quad\Rightarrow\quad 10^y=10^{0.96-0.4x}$

$\Rightarrow\quad y=-0.4x+0.96$

故數對 $(a,b)=(-0.4,0.96)$

(3)由 $y=-0.4x+0.96$ 列式

美洲豹：$w_1=80000\quad\Rightarrow\quad x_1=\log 80000$

$y_1=-0.4x_1+0.96=-0.4\times\log 80000+0.96$

$=-0.4\times(4+\log 8)+0.96$

$=-0.4\times(4+3\log 2)+0.96$

$\approx-0.4\times 4.903+0.96\approx-1$

則 $m_1=10^{y_1}\approx 10^{-1}=0.1$

公獅子：$w_2=200000\quad\Rightarrow\quad x_2=\log 200000$

$y_2=-0.4x_2+0.96=-0.4\times\log 200000+0.96$

$=-0.4\times(5+\log 2)+0.96$

$\approx-0.4\times 5.301+0.96\approx-1.16$

則 $m_2=10^{y_2}\approx 10^{-1.16}\approx 0.069$

所求 $=0.1-0.069=0.031$ 毫升

最　新　大　考　精　選

1.(B)(D)　2.(A)　3. 99　4.(D)　5.(C)(D)(E)　6.(A)(C)(D)

18 1. (A)(C) $n=1$ 為反例

(B)$\because \left|\dfrac{7n}{5n-21}\right| \le 1$　$\therefore -1 \le \dfrac{7n}{5n-21} \le 1$ 成立

(D)(E) $|5n-21| \ge 7|n|$　$\Rightarrow$　$(5n-21)^2 \ge 49n^2$

$\Rightarrow$　$25n^2-210n+441 \ge 49n^2$

$\Rightarrow$　$0 \ge 24n^2+210n-441$

題設不等式的整數解在 $24n^2+210n-441=0$ 的兩實根之範圍內

2. ①若 $x<0$，則 $2\cdot(-x)+x<10$　$\Rightarrow$　$-x<10$

$\Rightarrow$　$x>-10$，得 $x=-9,-8,-7,\cdots,-1$

②若 $x \ge 0$，則 $2\cdot x+x<10$　$\Rightarrow$　$x<\dfrac{10}{3}$

得 $x=0,1,2,3$

$\therefore x=-9,-8,\cdots,3$，共 13 個

3. 由 $x^{-\frac{1}{3}}y^2=\dfrac{y^2}{\sqrt[3]{x}}=1$ 得 $y^2=\sqrt[3]{x}$，同取三次方得 $x=y^6$

由 $2\log y=1$ 得 $y=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$，則 $x=(\sqrt{10})^6=1000$

所求 $=\dfrac{1000-10}{10}=\dfrac{990}{10}=99$

4. 由 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}}=[(N^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=N^{\frac{1}{8}}=2$，得 $N=2^8$

5. (A)$\because a+b+d$ 為有理數，c 為無理數

$\therefore a+b+c+d$ 必為無理數

(B)若 $d=0$，則 $abcd=0$ 為有理數

(C) $\overline{CD}=\left|d-2\sqrt{10}\right|=2\sqrt{10}+6$

$\therefore d-2\sqrt{10}=\pm(2\sqrt{10}+6)$

$\because d\in Q$，得 $d=-6$，合

(D) $\overline{AB}$ 中點為 $\dfrac{6+\frac{20}{3}}{2}=\dfrac{19}{3}$，平方得 $\dfrac{361}{9}$

而 $c^2=(2\sqrt{10})^2=40$，$\dfrac{361}{9}>40$　$\therefore \dfrac{19}{3}$ 在 $2\sqrt{10}$ 之右

(E)解 $\left|x-\dfrac{20}{3}\right|<8$ 得 $-8+\dfrac{20}{3}<x<8+\dfrac{20}{3}$，即 $-\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{44}{3}$

$\therefore x=-1,0,1,2,\cdots,14$ 為其中的整數，合

19 6. (A)設兩個光點第一次相遇需 k 秒，則 $5k+10k=120$

$\therefore k=8$，即 A 移動 40 公分，B 移動 80 公分

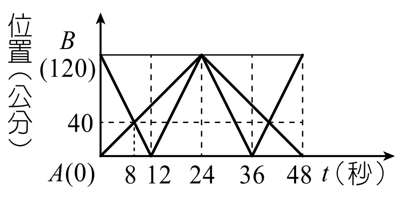
(B) A 走 120 公分需 $\dfrac{120}{5}=24$ 秒

故位置的週期為 $24\times 2=48$ 秒

(C)如右圖，B 的位置週期為 24 秒

(D)第二次相遇在 B 的出發初始位置

(E)只有 2 個不同的相遇位置如右圖



模　考　滿　分　挑　戰

1.(1) 18 平方公分；$a=4$，$b=10$　(2) 520 元　(3) 321 分鐘

2.(1) $2:7$　(2) $\dfrac{40}{7}$　3. -2；5；$[-3,5]$

4.(1) $n-6$　(2) $n-4$　(3) $n-5$

(4) $|n|+|n-6|+|n-4|+|n-5|$

(5) $n=4$ 或 5；$f(4)=f(5)=7$

1. 已知面積和為 $\underbrace{ab}_{\text{地板}}+\underbrace{4a+3b}_{\text{牆壁}}=86$，強迫分解為

$(a+3)(b+4)=ab+4a+3b+12=86+12=98$

(1)草皮面積和 $=2a+b$，希望求其最小值

用算幾不等式 $\dfrac{2(a+3)+(b+4)}{2}\ge\sqrt{2(a+3)(b+4)}$

$\Rightarrow$　$\dfrac{2a+b+10}{2}\ge\sqrt{2\times 98}=\sqrt{2^2\times 7^2}=14$

$\therefore 2a+b+10\ge 2\times 14=28$，得 $2a+b\ge 18$ 必成立

在 $2(a+3)=b+4$，即 $2(a+3)^2=98$ 時

得 $a+3=7$　$\Rightarrow$　$a=4$，$b=10$

使 $2a+b$ 有最小值為 18

(2)成本 $=(86+\underbrace{2a+b}_{\text{草皮}})\times 5\ge(86+18)\times 5=520$

故袖珍屋的最低成本為 520 元

(3)時間 $=\underbrace{3ab}_{\text{地板}}+\underbrace{4(4a+3b)}_{\text{牆壁}}+\underbrace{(2a+b)}_{\text{草皮}}$

$=3ab+18a+13b$（運用 $ab=86-4a-3b$）

$=3(86-4a-3b)+18a+13b$

$=6a+4b+258$

用算幾不等式 $\dfrac{6(a+3)+4(b+4)}{2}\ge\sqrt{24(a+3)(b+4)}$

$\Rightarrow$　$\dfrac{6a+4b+34}{2}\ge\sqrt{24\times 98}=28\sqrt{3}$

$\therefore 6a+4b\ge 56\sqrt{3}-34$

時間的最小值為 $(56\sqrt{3}-34)+258=224+56\sqrt{3}$

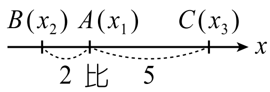
$\approx 224+56\times 1.73=320.88\approx 321$ 分鐘

2. $x_3=\dfrac{1.9\bar{4}x_1-1.3\bar{8}x_2}{0.\bar{5}}=\dfrac{\frac{194-19}{90}x_1-\frac{138-13}{90}x_2}{\frac{5}{9}}$

$\Rightarrow$　$\dfrac{5}{9}x_3=\dfrac{175}{90}x_1-\dfrac{125}{90}x_2$

同乘 90 為 $50x_3=175x_1-125x_2$

即 $175x_1=125x_2+50x_3$　$\therefore x_1=\dfrac{5x_2+2x_3}{7}$

(1)作圖 

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=2:7$

(2)用算幾不等式 $\dfrac{5x_2+2x_3}{2}\ge\sqrt{10x_2x_3}=\sqrt{400}=20$

得 $5x_2+2x_3\ge 40$ 必成立　$\therefore x_1=\dfrac{5x_2+2x_3}{7}\ge\dfrac{40}{7}$

在 $5x_2=2x_3$ 時，x_1 有最小值為 $\dfrac{40}{7}$

Archimedes

對話式®

高中數學 1-2 冊

學測複習講義

課後練習本

白德超／葉晉宏

班級：

姓名：

座號：

第1回 數與式

1 下列選項哪些為真？________

(A)一個無理數的平方一定是有理數

(B)設 a、b 為實數，若 $a+3\sqrt{2}=3+b\sqrt{2}$，則 $a=3$ 且 $b=3$

(C)若 $a<b$，則 $\dfrac{3a+2b}{5}<\dfrac{4a+3b}{7}$ 必定成立

(D)已知數線上三點 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$，若 A 與 B、C 的距離分別為 2 和 1，則 $|b-c|=1$

(E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}<2+\sqrt{5}$

解

2 設 a、b 為有理數，若 $x=\sqrt{2}-1$，則 $\dfrac{x^3-8}{x-2}+\dfrac{2x^2-8}{x+2}=a+b\sqrt{2}$，則數對 $(a,b)=$ __________。

解

3 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。________

(A) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=0.\overline{6}+0.\overline{4}$　(B) $0.\overline{72}+0.\overline{28}=1.\overline{1}$　(C) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=1$

(D) $0.\overline{5}+0.\overline{5}=1.\overline{1}$　(E) $0.\overline{49}=0.5$

解

4 下列哪些數值是有理數？__________

(A) $0.1\overline{3}$　(B) $3+\sqrt{2}$　(C) 0　(D) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}$　(E) π

解

5 已知 $\sqrt{16+\sqrt{252}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，試求 $2a+b-\dfrac{3}{b}=$ _____ 。

解

6 數線上 P、Q 兩點在 A、B 之間，設 P 點坐標為 0，Q 點坐標為 14，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:3$，$\overline{AQ}:\overline{QB}=3:2$，則 A 點坐標為________。

解

7 設 a、b 為正實數且 $2a+3b=12$，則 ab 的最大值為______，此時 a、b 之值為________________。

解

8 若不等式 $|ax+1|\geq b$ 之解為 $x\geq 3$ 或 $x\leq -2$，則數對 $(a,b)=$____________。

解

9 已知 $0<x<1$，若 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=4$，則 $x=$______。

解

10 解不等式 $|x|+2|x-1|<4$。______________

解

∴ $\cos\theta=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ 或 1（1 使分母為 0，不合）

⑶設鐘擺在 A 為最高點，B 為最低點

頂端為 O，A 投影到 $\overline{OB}$ 為 H

則 $\overline{AH}=r\sin\theta=20$ ⋯①

$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=r-r\cos\theta$

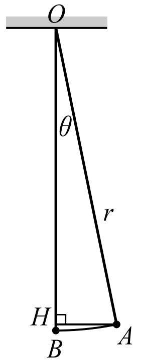
$=r(1-\cos\theta)=2$ ⋯②

①÷②得 $\dfrac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)}=\dfrac{20}{2}$

即 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=10$

由⑵得知 $\cos\theta=\dfrac{10^2-1}{10^2+1}=\dfrac{99}{101}$

代回②得 $r=\dfrac{2}{1-\dfrac{99}{101}}=\dfrac{2}{\dfrac{2}{101}}=101$



164 3. ⑴ $\cos\angle ABC=\dfrac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=\dfrac{-6}{2\times3\times7}=-\dfrac{1}{7}$

⑵ $\cos\angle PQR=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\dfrac{10}{2\times5\times7}=\dfrac{1}{7}$

⑶∵ $\cos\angle ABC=-\cos\angle PQR$

∴ $\angle ABC+\angle PQR=180^\circ$，又 $\overline{AB}=\overline{PQ}=7$

∴ $\overline{AB}$ 與 $\overline{PQ}$ 貼合之後，B、Q 重合且在 $\overline{CR}$ 上

則 $\overline{CR}=\overline{CB}+\overline{QR}=3+5=8$

∴ $\overline{AC}=\overline{PR}=\overline{CR}=8$，$\Delta ACR$ 為正三角形

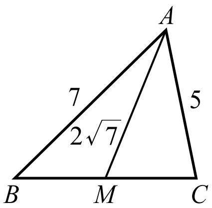
4. ⑴由中線定理

$7^2+5^2=2\times[(2\sqrt{7})^2+\overline{BM}^2]$

得 $\overline{BM}^2=9$ $\Rightarrow$ $\overline{BM}=3$

∴ ΔABC 三邊長為 5 , 6 , 7

半周長 $=\dfrac{5+6+7}{2}=9$



由海龍公式得 ΔABC 面積

$=\sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$

⑵令 $\angle ACB=\theta$，由正弦定理，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2R$

即 $\dfrac{5}{\sin\theta}=\dfrac{25}{3}$　∴ $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，得 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

令 $\overline{AC}=x$，由餘弦定理，$\cos\theta=\dfrac{25+x^2-25}{2\cdot5\cdot x}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{10x}=\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $x=8$，即 $\overline{AC}=8$

ΔACD 中，$\overline{AD}^2=8^2+10^2-2\cdot8\cdot10\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

$=64+100-160\times(\dfrac{-4}{5})=292$

故 $\overline{AD}=\sqrt{292}=2\sqrt{73}$

⑶ ΔABC 用正弦定理，$\dfrac{\overline{AC}}{\sin45^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin60^\circ}$

即 $\dfrac{\overline{AC}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，得 $\overline{AC}=\sqrt{6}$

ΔACD 用餘弦定理得

$\overline{AD}^2=(\sqrt{6})^2+2^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot2\cdot\cos60^\circ=6+4-2\sqrt{6}$

∴ $\overline{AD}=\sqrt{10-2\sqrt{6}}=\sqrt{10-\sqrt{24}}$

∴ $a=10$，$b=24$

課後練習本

第 1 回

1.(C)(E)	2.$(-1,2)$	3.(A)(D)	4.(A)(C)(D)
5. 6	6. -10	7. 6；$a=3$，$b=2$	
8.$(-2,5)$	9. $\dfrac{1}{2}$	10. $-\dfrac{2}{3}<x<2$	

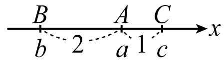
1 1. (A)反例：如 $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$

(B)取 $a=3+\sqrt{2}$，$b=4$

(C) $\dfrac{21a+14b}{35}-\dfrac{20a+15b}{35}=\dfrac{a-b}{35}<0$

∴ $\dfrac{3a+2b}{5}<\dfrac{4a+3b}{7}$

(D)如右圖，$|b-c|=3$



(E) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}$，$(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}=9+2\sqrt{20}$

∴ $\sqrt{6}+\sqrt{3}<2+\sqrt{5}$

2. $\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}+\dfrac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)}$

$=(x^2+2x+4)+(2x-4)=x^2+4x$

$=(\sqrt{2}-1)^2+4(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4=-1+2\sqrt{2}$

故數對 $(a,b)=(-1,2)$

3. (A)左式 $=\dfrac{7}{9}+\dfrac{3}{9}$，右式 $=\dfrac{6}{9}+\dfrac{4}{9}$

∴左式 = 右式 $=\dfrac{10}{9}$

(B)左式 $=\dfrac{72}{99}+\dfrac{28}{99}=\dfrac{100}{99}$，右式 $=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}=\dfrac{110}{99}$

∴左式 < 右式

(C) $\dfrac{7}{9}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{10}{9}>1$

(D)左式 $=\dfrac{5}{9}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{9}$，右式 $=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}$

∴左式 = 右式

(E)左式 $=\dfrac{49}{99}=\dfrac{490}{990}<\dfrac{495}{990}=0.5=$ 右式

4. (A) $0.1\overline{3}=\dfrac{13-1}{90}=\dfrac{12}{90}=\dfrac{2}{15}$

(B)(E) $3+\sqrt{2}$、π 皆為無理數　(D) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2}$

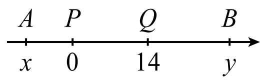
5. $\sqrt{16+\sqrt{252}}=\sqrt{16+2\sqrt{63}}=\sqrt{9}+\sqrt{7}=3+\sqrt{7}$

∵ $2<\sqrt{7}<3$ $\Rightarrow$ $5<3+\sqrt{7}<6$

$3+\sqrt{7}=5+(\sqrt{7}-2)$　∴ $a=5$，$b=\sqrt{7}-2$

$2a+b-\dfrac{3}{b}=10+\sqrt{7}-2-\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}=8+\sqrt{7}-(\sqrt{7}+2)=6$

2 6. 設 $A(x)$、$B(y)$



$\begin{cases}\dfrac{3x+y}{4}=0\\ \dfrac{2x+3y}{5}=14\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}3x+y=0\\ 2x+3y=70\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=-10$

故 A 點坐標為 -10

7. $\frac{2a+3b}{2}\ge\sqrt{2a\cdot 3b} \quad\Rightarrow\quad \frac{12}{2}\ge\sqrt{6ab}$

平方得 $36\ge 6ab \quad\Rightarrow\quad ab\le 6$

∴ ab 的最大值為 6，此時 $2a=3b=6$，即 $a=3$，$b=2$

8. $x\ge 3$ 或 $x\le -2 \quad\Rightarrow\quad x-\frac{1}{2}\ge\frac{5}{2}$ 或 $x-\frac{1}{2}\le-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\quad \left|x-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad \left|-(x-\frac{1}{2})\right|\ge\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\quad \left|-x+\frac{1}{2}\right|\ge\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad |2|\times\left|-x+\frac{1}{2}\right|\ge|2|\times\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\quad \left|2(-x+\frac{1}{2})\right|\ge 2\times\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad |-2x+1|\ge 5$

∴數對 $(a,b)=(-2,5)$

9. $\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}=4 \quad\Rightarrow\quad \left|x+\frac{1}{x}\right|+\left|x-\frac{1}{x}\right|=4$

$\Rightarrow\quad (x+\frac{1}{x})+(\frac{1}{x}-x)=4 \quad ∴\ \frac{2}{x}=4$，得 $x=\frac{1}{2}$

10. ①當 $x\ge 1$ 時，$x+2(x-1)<4$

$\Rightarrow\quad 3x<6 \quad\Rightarrow\quad x<2$

在 $x\ge 1$ 的限制下，其解為 $1\le x<2$…❶

②當 $0\le x<1$ 時，$x+2(1-x)<4$

$\Rightarrow\quad x+2-2x<4 \quad\Rightarrow\quad -x<2 \quad\Rightarrow\quad x>-2$

在 $0\le x<1$ 的限制下，其解為 $0\le x<1$…❷

③當 $x<0$ 時，$-x+2(1-x)<4$

$\Rightarrow\quad -x+2-2x<4 \quad\Rightarrow\quad -3x<2 \quad\Rightarrow\quad x>-\frac{2}{3}$

在 $x<0$ 的限制下，其解為 $-\frac{2}{3}<x<0$ …❸

綜合❶❷❸得 $-\frac{2}{3}<x<2$

第 2 回

1.(1) 63 (2) 7	2.(1) $\frac{19}{2}$ (2) 72	3.(E)	
4. $4\sqrt{2}$	5. $(2.92,-7)$	6. $\frac{1}{4}$	7. 28
8. 10000	9. $10\sqrt{10}$	10.(1) 6	(2) 0.0003

3 1. (1) $8^x+(\frac{1}{4})^{-x-1}=2^{3x}+4^{x+1}=(2^x)^3+4\cdot(2^x)^2$

$=3^3+4\times 3^2=27+36=63$

(2) $4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$

$=9-2=7$

2. (1) $\left[(\frac{2}{3})^4\right]^{-0.25}+(5\times\frac{4}{5})^{\frac{3}{2}}=(\frac{2}{3})^{-1}+(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}+8=\frac{19}{2}$

(2) $25\times(10^{\log 5})^{-2}+10^1\times 10^{\log 7.1}$

$=25\times 5^{-2}+10\times 7.1=1+71=72$

3. $a^5=(\sqrt[3]{10})^5=10^{\frac{5}{3}}=10\sqrt[3]{100}$

$4^3\le 100<5^3$，$4.5^3=91.125 \quad ∴\ 4.5^3\le 100<5^3$

$4.5\le 10^{\frac{2}{3}}<5 \quad\Rightarrow\quad 45\le 10^{\frac{5}{3}}<50 \quad\Rightarrow\quad 45\le a^5<50$

4. 1.5 小時 = 90 分鐘，$128\times(\frac{1}{2})^{\frac{90}{20}}=2^7\times 2^{-4.5}=2^{2.5}=4\sqrt{2}$

故 1.5 小時後剩下 $4\sqrt{2}$ 公克

5. $a-b=3\times 10^{-7}-0.08\times 10^{-7}=2.92\times 10^{-7}$

$k=2.92$，$n=-7$，故 $(k,n)=(2.92,-7)$

4 6. $2^a+2^{-3b}\ge 2\sqrt{2^a\cdot 2^{-3b}}=2\sqrt{2^{a-3b}}=2\sqrt{2^{-6}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

7. $x=10^9+1$

$x^3=(10^9+1)^3=10^{27}+3\times 10^{18}+3\times 10^9+1\approx 10^{27}$

∴ x^3 是 28 位整數

8. $\begin{cases} 40=10\log\frac{I_1}{I_0} & ∴\ \log\frac{I_1}{I_0}=4，得\ \frac{I_1}{I_0}=10^4\cdots① \\ 80=10\log\frac{I_2}{I_0} & ∴\ \log\frac{I_2}{I_0}=8，得\ \frac{I_2}{I_0}=10^8\cdots② \end{cases}$

則②÷①，得 $\frac{I_2}{I_1}=\frac{10^8}{10^4}=10000$

9. 設釋放出的能量為 E'

$\log E'=11.8+1.5(r+1)=13.3+1.5r$，$\log E=11.8+1.5r$

$k=\frac{E'}{E}=\frac{10^{\log E'}}{10^{\log E}}=\frac{10^{13.3+1.5r}}{10^{11.8+1.5r}}=10^{13.3-11.8}=10^{1.5}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

10. (1) $10^n<10^{\log 5432100}<10^{n+1}$

$\Rightarrow\quad 10^n<5.4321\times 10^6<10^{n+1}$，得 $n=6$

(2) $\log x\approx -3-0.5229=-4+0.4771$

$\Rightarrow\quad x\approx 10^{-4+0.4771}=10^{-4}\times 10^{0.4771}\approx 10^{-4}\times 10^{\log 3}$

$=3\times 10^{-4}=0.0003$

第 3 回

1.(C)	2.(1) 1 (2) $\frac{1}{2}$	3.(1) $x-y+2=0$	(2) $3\sqrt{2}$
4. 4	5. 33	6. 75	7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{26}{3}$	9. $k<-2$	10. $\frac{625}{24}$	

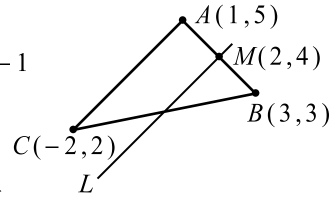
5 1. $m_1>0$，$m_2<0$，$m_3<0$

又 $|m_3|>|m_2| \quad\Rightarrow\quad m_3<m_2$，得 $m_3<m_2<m_1$

2. (1) $\frac{-k}{2k-1}=-1 \quad\Rightarrow\quad k=2k-1 \quad\Rightarrow\quad k=1$

(2)斜率不存在 $\Rightarrow$ 鉛直線，即 $k=3k-1 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{2}$

3. (1) $\overline{AB}$ 中點 $M(2,4)$



$\overline{AB}$ 斜率 $m_{\overline{AB}}=\frac{3-5}{3-1}=-1$

中垂線 L 垂直 $\overline{AB}$

因此 $m_L=1$

由點斜式知 L 的方程式

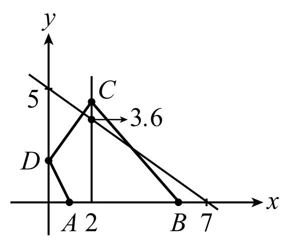
為 $y-4=1(x-2)$，即 $x-y+2=0$

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式 $y-5=-(x-1)$

$\Rightarrow\quad y-5=-x+1 \quad\Rightarrow\quad x+y-6=0$

$d(C,\overleftrightarrow{AB})=\frac{|-2+2-6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

4. L 過 $(7,0)$ 與 $(0,5)$ 兩點



則 L 為 $\frac{x}{7}+\frac{y}{5}=1$

令 $x=2$ 代入 L 得 $\frac{2}{7}+\frac{y}{5}=1$

$\Rightarrow\quad y=\frac{25}{7}\approx 3.6$

作圖如右 ∴ a 至少為 4