目次

4 數列與級數

1. 等差數列與等比數列

(1)若 $\langle a_n\rangle$ 成等差，且公差為 d，則 $a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) a、b、c 三數成等差，則等差中項 $b = \dfrac{a+c}{2}$

(1)若 $\langle a_n\rangle$ 成等比，且公比為 r，則 $a_n = a_1 r^{n-1}$（a_1、r 皆不為 0）

(2) a、b、c 三數成等比，則等比中項 b，且 $b^2 = ac$

2. 等差級數與等比級數

等差數列 $\langle a_n\rangle$ 前 n 項和 $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = \dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

等比數列 $\langle a_n\rangle$ 前 n 項和 S_n

(1)若 $r = 1$，則 $S_n = na_1$

(2)若 $r \neq 1$，則 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

3. 遞迴數列、數學歸納法

遞迴數列

(1)首項為 a，公差為 d 的等差數列 $\langle a_n\rangle$，遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d，n \in N \end{cases}$

(2)首項為 a，公比為 r 的等比數列 $\langle a_n\rangle$，遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = r \cdot a_n，n \in N \end{cases}$

數學歸納法

設有一關於自然數 n 的敘述，若滿足：

(1)當 $n = 1$ 時，敘述成立

(2)假設當 $n = k$ 時，敘述成立，並由此推得當 $n = k+1$ 時，敘述仍成立

則此敘述對所有自然數 n 皆成立

4. 常用級數和公式

(1) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = [\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$

概念 1　等差數列與等比數列

學測 108・109・111A・112A・112B・113B

1. 若 $\langle a_n \rangle$ 是公差 d 的等差數列，則一般項 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

2. 若 a、b、c 三數成等差，則等差中項 $b = \dfrac{a+c}{2}$。

3. 若 $\langle a_n \rangle$ 是公比 r 的等比數列，且 $a_1 \neq 0$、$r \neq 0$，則一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$。

4. 若 a、b、c 三數成等比，則等比中項為 b，且 $b^2 = ac$。

例 ⑴若一等差數列的首項為 2，公差為 3，則第 20 項為________。

⑵若 x 為 4 和 16 的等差中項，則 $x =$ ________。

⑶若一等比數列的首項為 3，公比為 2，則第 10 項為________。

⑷若 x 為 4 和 16 的等比中項，則 $x =$ ________。

範例 1　等差數列

有一等差數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_7 = 19$，$a_{12} = 64$，試求：

⑴此數列的公差 $d =$ ______　⑵首項 $a_1 =$ ______

⑶一般項 $a_n =$ ______　⑷若 $a_n > 500$，則 n 的最小值為______。

類題 1

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = bn + c$，且 $a_{10} = 1$，試選出正確的選項。________

(A) $10b + c = 1$　(B) $\langle a_n \rangle$ 是等差數列　(C) $a_9 - a_8 = c$

(D) $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = b$　(E) $a_n = 1 + b(n-10)$

範例 2 古算書中的等差問題

中國古算書《九章算術》有題：「今有竹九節，下三節容四升，上四節容三升。問中間二節欲均容各多少？」意指：「竹子有 9 節，各節容積成等差數列，下 3 節容量共 4 升，上 4 節容量共 3 升，則中間 2 節（由上面數第 5、6 節）容量各為多少？ ________

提示
利用首項和公差列式求解

類題 2

中國古算書《九章算術》有題：「今有五人分五錢，令上二人所得與下三人等。問各得幾何？」若這 5 人所得者成等差數列，則分得最重者為幾錢？（錢為古代重量單位） ________

範例 3 等比數列

有一等比數列 $\langle a_n \rangle$，已知首項 $a_1 = 3$，$a_2 = -\frac{3}{2}$，試求：

⑴此數列的公比 $r =$ ________ ⑵一般項 $a_n =$ ________

⑶第 10 項 $a_{10} =$ ________。

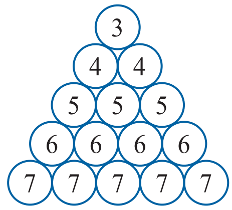
類題 3

設 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且 $a_2 = 5$，$a_5 = 320$，試求：

⑴ $\langle a_n \rangle$ 的公比 $r =$ ________ ⑵若 $a_m > 5000$，則整數 m 最小值為 ________。

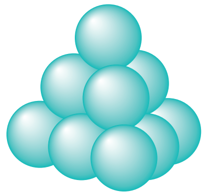
類題 15

依照右圖的規則把數字作排列，若排到第 10 列，則所有的數字和為多少？________



類題 16

有一個實心三角形垛，其排列方式如右圖，每一層都將相同大小的球排成一個三角形，例如第四層為 。若最底層各邊有 10 顆球，最上層只有 1 顆球，則此三角形垛共有幾顆球？__________



綜合實力測驗

一、單選題

______ 1. 設 $a_{n+1}=a_n-\sqrt{10}$，n 為正整數。令 $b_n=10^{a_n}$，則數列 $b_1,b_2,b_3,\cdots$為：

(A)公差為正數的等差數列　(B)公差為負數的等差數列
(C)公比為大於 1 的等比數列　(D)公比為大於 0 且小於 1 的等比數列
(E)公比為負數的等比數列

二、多選題

______ 2. 有一個公差不為 0 的等差數列 $\langle a_n\rangle$，前 3 項的和與前 6 項的和相同。請選出正確的選項。

(A) $a_4+a_5+a_6=0$　(B) $a_3=0$　(C)若公差為正，則首項為負
(D) $a_3\times a_6<0$　(E) $a_3\times a_4<0$

______ 3. 設 $a_1=-1$，且 $a_1,a_2,a_3,\cdots$為等比數列，公比 r 為非零實數。請選出正確的選項。

(A)若 $a_{100}>0$，則 $r<0$　(B) $\dfrac{a_{1000}}{a_{100}}>0$　(C)若 $a_{100}>0$，則 $a_{1000}>0$
(D)若 $a_{99}<0$，則 $a_{999}<0$　(E)若 $a_{99}<0$，則 $a_{1000}>0$

三、填充題

4. 已知一等差數列第 9 項為 21，公差為 4，則第______項開始為三位數。

5. 在 0 和 100 之間，插入 49 個數，使這 51 個數形成一個等差數列，則此等差數列的公差為______，插入的第 42 個數（即等差數列的第 43 項）是______。

6. 已知非零數列 a、$2a+b$、$a-2b$、$a+2$，若前三項成等差數列，後三項成等比數列，則數對 $(a,b)=$________。

7. 設等差數列的第 5 項為 -105，第 11 項為 -63，若前 n 項的和為 S_n，則 n 的值為________時，S_n 有最小值為________。

> **提示**
> 若首項 <0，公差 >0，$a_n \le 0$，$a_{n+1} \ge 0$，
> 則 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le 0$
> $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$

8. 有一個等比數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_4 + a_6 = 120$，$a_5 = -48$，則公比 $r=$________。

9. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，且遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1}=a_n+f(n-1)$，其中 $n \in N$。若 $a_1=1$、$a_2=1$、$a_3=2$、$a_4=3$，則 $c=$______，$a_5=$______。

10. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1=1$，對於任意自然數 n，$a_{n+1}=a_n+n^2$，則 $a_{10}=$________。

11. 有______個正整數 n，使得 $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+24^2}{n}$ 為完全平方數。

12. 右圖 1 ～圖 n 的點陣列，試問：
(1)圖 10 的點陣列中，底邊有______個點。
(2)圖 10 的點陣列中，總共有________個點。

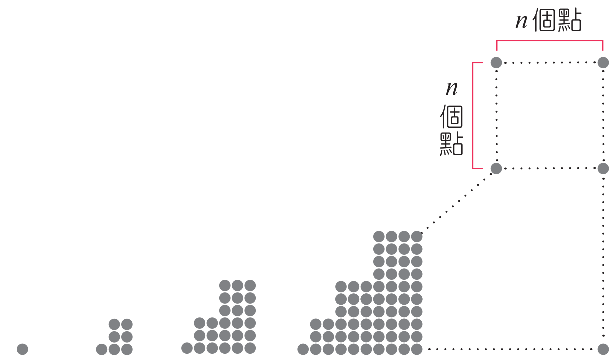


圖 1　圖 2　圖 3　圖 n

13. 以天干（甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸）與地支（子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥）搭配計年，可得甲子、乙丑、丙寅、…，每 60 年為一循環。已知西元 2020 年的農曆年開始為庚子年，則西元 2030 年的農曆年開始為________年，2032 年的農曆年開始為________年。下一個甲子年從西元________年的農曆年開始。

精選歷屆試題

一、單選題

______ 1. 第 1 天獲得 1 元，第 2 天獲得 2 元，第 3 天獲得 4 元，第 4 天獲得 8 元，依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

(A) 10,000 元　(B) 1,000,000 元　(C) 100,000,000 元
(D) 1,000,000,000 元　(E) 1,000,000,000,000 元

104 學測 | 答對率 68%

______ 2. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 80$，前五個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$，請選出首項 a_1 的正確範圍。

(A) $a_1 < 80$　(B) $80 \leq a_1 < 90$　(C) $90 \leq a_1 < 100$
(D) $100 \leq a_1 < 110$　(E) $110 \leq a_1$

105 學測 | 答對率 28%

______ 3. 某燈會布置變色閃燈，每次啟動後的閃燈顏色會依照以下的順序做週期性變換：藍－白－紅－白－藍－白－紅－白－藍－白－紅－白⋯，每四次一循環，其中藍光每次持續 5 秒，白光每次持續 2 秒，而紅光每次持續 6 秒。假設換燈號的時間極短可被忽略，試選出啟動後第 99 至 101 秒之間的燈號。

(A)皆為藍燈　(B)皆為白燈　(C)皆為紅燈
(D)先亮藍燈再亮白燈　(E)先亮白燈再亮紅燈

111 學測 B | 答對率 83%

二、多選題

______ 4. 設實數組成的數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列。已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$。請選出正確的選項。

(A) $a_9 \times a_{10} < 0$　(B) $b_{10} > 0$　(C) $b_9 > b_{10}$
(D) $a_9 > a_{10}$　(E) $a_8 > b_8$

102 學測 | 全對率 21%

______ 5. 設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 之公差為正實數 α。試選出正確的選項。

(A)若 $b_n = -a_n$，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$
(B)若 $c_n = a_n^2$，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots$
(C)若 $d_n = a_n + a_{n+1}$，則 $d_1, d_2, d_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列
(D)若 $e_n = a_n + n$，則 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ 是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列
(E)若 f_n 為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列

108 學測 | 全對率 28%

____ 6. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(A)甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元

(B)工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高

(C)工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高

(D)工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少

(E)工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高

112 學測 A | 全對率 46%

____ 7. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 是首項為 3 且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式 $\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}\log_3 a_n > 18$ 的項數 n 之可能選項。

(A) 23　(B) 24　(C) 25　(D) 26　(E) 27

112 學測 A | 全對率 22%

____ 8. 已知正實數數列 a, b, c, d, e 為等比數列，且 $a < b < c < d < e$，試選出下列為等比數列的選項。

(A) $a, -b, c, -d, e$

(B) e, d, c, b, a

(C) $\log a, \log b, \log c, \log d, \log e$

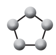
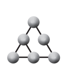
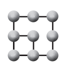
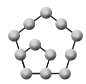
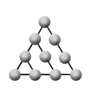
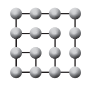
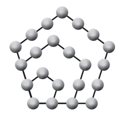
(D) $3^a, 3^b, 3^c, 3^d, 3^e$

(E) abc, bcd, cde

113 學測 B

三、填充題

9. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠			
每邊 2 個鋼珠			
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n =$ ____，$m =$ ____。

97 指考甲 | 答對率 58%

(C) $g(x)=f(-x)-3 \Rightarrow f(x)=g(-x)+3$

$\therefore f(x)$ 圖形是 $g(x)$ 圖形先對稱於 y 軸再向上平移 3 單位

故 $f(x)$ 的對稱中心是 $(-(-1),3)=(1,3)$

(D) $f(100)=g(-100)+3$，雖然 $g(-100)<0$，但可能 $g(-100)>-3$

例如 $g(x)=-10^{-1000000}\cdot x(x-1)(x-2)$

則 $f(-100)=g(100)+3=-\dfrac{100\times 99\times 88}{1000000}+3>0$

(E) $g(x)=-ax(x-1)(x-2)$

$f(x)=g(-x)+3$

$=ax(-x-1)(-x-2)+3$

$=ax^3+3ax^2+2ax+3$

$=a(x+1)^3-a(x+1)+3$

$$\begin{array}{cccc|c} a & +3a & +2a & +3 & -1 \\ & -a & -2a & -0 & \\ \hline a & +2a & +0 & +3 & \\ & -a & -a & & \\ \hline a & +a & -a & & \\ & -a & & & \\ \hline a & +0 & & & \end{array}$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 的近似直線為 $y=-a(x+1)+3$，斜率為 $-a$

76 7. 設 $[g(x)]^2=f(x)\cdot Q(x)+g(x)$

$\because \deg g(x)=2$ 且 $y=f(x)$ 圖形與 x 軸無交點

$\therefore \deg f(x)=4 \Rightarrow Q(x)$ 為常數多項式 c

$\Rightarrow [g(x)]^2=c\cdot f(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow c\cdot f(x)=[g(x)]^2-g(x)=g(x)\cdot(g(x)-1)$

為首項係數為正的四次式

$\therefore y=cf(x)$ 恆正 $\Rightarrow g(x)\cdot(g(x)-1)>0$

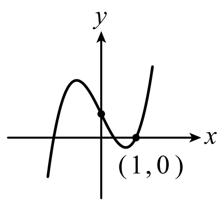
$\Rightarrow g(x)<0$ 或 $g(x)>1$

$\therefore y=g(x)$ 圖形頂點不可能在 $[0,1]$ 之間

8. (A) $f(1)=2-3+1=0$

(B) 對稱中心 $(0,1)$，由圖形知當 $x<0$ 時，與 x 軸亦有一個交點，且 $f(x)$ 過 $(1,0)$

故至少有兩個交點



(C) 對稱中心為 $(0,1)$

(D) 在對稱中心附近的一次近似為 $y=-3x+1$

(E) $y=f(x)$ 平移所得函數形如

$f(x-h)+k=2(x-h)^3-3(x-h)+1+k$

首項係數仍為 2，不可能是 3

9. 設 $ax^2+bx+c=0$ 的根為 α、β 且 $1<\alpha<3$，$1<\beta<3$

不失一般性，以下考慮 α 即可

(A) $x-2=\alpha \Rightarrow 3<x=2+\alpha<5$

(B) $x+2=\alpha \Rightarrow -1<x=\alpha-2<1$

(C) $2x-7=\alpha \Rightarrow x=\dfrac{\alpha+7}{2}$

$\therefore 4=\dfrac{1+7}{2}<\dfrac{\alpha+7}{2}<\dfrac{3+7}{2}=5$

(D) $\dfrac{x+7}{2}=\alpha \Rightarrow x=2\alpha-7$

$\therefore -5=2\times 1-7<2\alpha-7<2\times 3-7=-1$

(E) $3x-11=\alpha \Rightarrow x=\dfrac{\alpha+11}{3}$

$\therefore 4=\dfrac{1+11}{3}<\dfrac{\alpha+11}{3}<\dfrac{3+11}{3}=\dfrac{14}{3}<5$

10. 由除法原理可知

$f(x)=(x^2+5x+1)(x^3+7x^2+x+3)+R(x)$

其中 $\deg R(x)<\deg(x^2+5x+1)=2$

故(B)選項可能為 $f(x)$（$\because -x$ 的次數為 1）

(D) $(x^3+7x^2+x+4)(x^2+5x+1)-x$

$=(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+x^2+5x+1-x$

$\because x^2+5x+1-x$ 的次數為 2

$\therefore$ 不可能為 $f(x)$

(E) $(x^3+7x^2+x+4)(x^2+5x+1)-x^2$

$=(x^3+7x^2+x+3)(x^2+5x+1)+x^2+5x+1-x^2$

$\because x^2+5x+1-x^2=5x+1$，次數為 1

$\therefore$ 可能為 $f(x)$

11. 由除法原理

$ax^2+(2a+b)\cdot x-12=[x^2+(2-a)x-2a]\cdot a+R(x)$

$\Rightarrow R(x)=[ax^2+(2a+b)x-12]-a[x^2+(2-a)x-2a]$

$=(a^2+b)x+2a^2-12$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b=0 & \cdots ① \\ 2a^2-12=6 & \cdots ② \end{cases}$

由②得 $a=\pm 3$（$\because a>0 \quad \therefore$ 負不合）

代入①得 $b=-a^2=-9$

12. 設 $f(x)=(x^2-2x+3)Q_1(x)+x+1$

$g(x)=(x^2-2x+3)Q_2(x)+x-3$

$h(x)=(x^2-2x+3)Q_3(x)-2$

而 $xf(x)+ag(x)+bh(x)$

$=(x^2-2x+3)[xQ_1(x)+aQ_2(x)+bQ_3(x)]$
$\qquad +x(x+1)+a(x-3)-2b$

$=(x^2-2x+3)[xQ_1(x)+aQ_2(x)+bQ_3(x)]$
$\qquad +x^2+(a+1)x-3a-2b$

可以被 x^2-2x+3 整除

所以 $a+1=-2$ 且 $-3a-2b=3 \Rightarrow a=-3$，$b=3$

4 數列與級數

78 **概念 1** (1) 59 (2) 10 (3) 1536 (4) 8 或 -8

範例 1 (1) 9 (2) -35 (3) $-44+9n$ (4) 61

(1) $a_{12}-a_7=5d$，即 $5d=64-19=45$

所以公差 $d=9$

(2) $\because a_7=a_1+6d$，即 $19=a_1+6\times 9$

$\therefore a_1=19-6\times 9=-35$

(3) 首項為 -35，公差為 9

所以一般項 $a_n=a_1+(n-1)d=-35+(n-1)\times 9$

$=-44+9n$

(4) $a_n>500$，即 $-44+9n>500$

$\Rightarrow n>\dfrac{544}{9}=60\dfrac{4}{9}$

故 n 的最小值為 61

類題 1 (A)(B)(E)

(A) $a_{10}=10b+c=1$
(B) $a_n-a_{n-1}=(bn+c)-[b(n-1)+c]$
$=b[n-(n-1)]=b$
$\therefore \langle a_n\rangle$ 是公差為 b 的等差數列
(C) $a_9-a_8=$ 公差 b
(D)首項 $a_1=b+c$
(E) $a_n-a_{10}=(bn+c)-(10b+c)=(n-10)b$
$\therefore a_n=a_{10}+(n-10)b=1+b(n-10)$

79 範例 2 $\frac{67}{66}$ 升，$\frac{37}{33}$ 升

設 a_n 為竹子由上往下數第 n 節的容量
$\langle a_n\rangle$ 的公差為 d，則 $a_n=a_1+(n-1)d$

則 $\begin{cases}a_7+a_8+a_9=4\\ a_1+a_2+a_3+a_4=3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(a_1+6d)+(a_1+7d)+(a_1+8d)=4\\ a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}3a_1+21d=4\\ 4a_1+6d=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1=\frac{13}{22}\\ d=\frac{7}{66}\end{cases}$

所以第 5 節容量 $a_5=\frac{13}{22}+4\times\frac{7}{66}=\frac{67}{66}$ 升

第 6 節容量 $a_6=\frac{13}{22}+5\times\frac{7}{66}=\frac{37}{33}$ 升

類題 2 $\frac{4}{3}$ 錢

設 5 人所得由重到輕各 a 錢、$a+d$ 錢、$a+2d$ 錢、$a+3d$ 錢、$a+4d$ 錢

則 $\begin{cases}a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=5\\ a+(a+d)=(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}5a+10d=5\\ 2a+d=3a+9d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ d=\frac{-1}{6}\end{cases}$

故最重為 $\frac{4}{3}$ 錢

範例 3 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-6\times(-\frac{1}{2})^n$ (3) $-\frac{3}{512}$

(1) $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}=-\frac{1}{2}$

(2) $a_n=a_1\times r^{n-1}=3\times(-\frac{1}{2})^{n-1}=-6\times(-\frac{1}{2})^n$

(3) $a_{10}=-6\times(-\frac{1}{2})^{10}=-6\times\frac{1}{1024}=-\frac{3}{512}$

類題 3 (1) 4 (2) 7

(1) $r^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{320}{5}=64 \quad \therefore r=4$

(2) $a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{5}{4}$，$a_m=\frac{5}{4}\cdot 4^{m-1}=\frac{5}{16}\cdot 4^m>5000$
$\Rightarrow \quad 4^m>16000$
$\because 4^5=1024$，$4^6=4096$，$4^7=16384$，故 m 最小值為 7

80 範例 4 $(4,16)$ 或 $(2,18)$

因為 a、$a+4$、b 成等比，所以 $(a+4)^2=ab$
因為 $a-4$、4、$b-8$ 成等差
所以 $4\times 2=(a-4)+(b-8) \quad \Rightarrow \quad b=20-a$
代入 $(a+4)^2=ab$，得 $(a+4)^2=a(20-a)$
$\Rightarrow \quad a=4$ 或 2
①當 $a=4$ 時，$b=20-4=16$
②當 $a=2$ 時，$b=20-2=18$
故 $(a,b)=(4,16)$ 或 $(2,18)$

類題 4 $(1,2)$

$\because a+b$、$2a+7$、$10b+7$ 成等比
$\therefore (2a+7)^2=(a+b)(10b+7)$
$\because a$、b、$a+b$ 成等差 $\quad \therefore \frac{a+(a+b)}{2}=b$
$\Rightarrow \quad b=2a$，代入 $(2a+7)^2=(a+b)(10b+7)$
得 $(2a+7)^2=3a\times(20a+7) \quad \Rightarrow \quad 56a^2-7a-49=0$
$\Rightarrow \quad 7(a-1)(8a+7)=0$
$\therefore a=1$ 或 $-\frac{7}{8}$（不合）
故數對 $(a,b)=(1,2)$

範例 5 6

將數列分組：$(1),(2,1),(3,2,1),(4,3,2,1),(5,4,3,2,1),\cdots$
則第 k 組結束時共有 $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 項
檢查 $\frac{12\times13}{2}=78$，$\frac{13\times14}{2}=91$，$\frac{14\times15}{2}=105$
故第 91 項為第 13 組最末項，第 92 項為 14，第 93 項為 13，…，第 100 項為 6

類題 5 (1) $\frac{1024}{5}$ (2) 64

(1)觀察數列並分組
$(\frac{2}{1}),(\frac{4}{1},\frac{4}{2}),(\frac{8}{1},\frac{8}{2},\frac{8}{3}),(\frac{16}{1},\frac{16}{2},\frac{16}{3},\frac{16}{4}),\cdots,(\frac{2^k}{1},\frac{2^k}{2},\frac{2^k}{3},\cdots,\frac{2^k}{k})$
第 k 組的第 i 項是整個數列的第 $1+2+\cdots+(k-1)+i$ 項
$\because \frac{10\times9}{2}+5=50$
$\therefore$第 50 項在第 10 組的第 5 項，故為 $\frac{2^{10}}{5}=\frac{1024}{5}$
(2) $\frac{2048}{9}=\frac{2^{11}}{9}$，即 $k=11$，在第 11 組的第 9 項
即第 $(1+2+3+\cdots+10)+9=64$ 項

81 範例 6 (1) $\frac{1}{64}$ (2) 10

相鄰兩個圖形中，左邊圖形黃色三角形面積是右邊圖形黃色三角形面積的 4 倍，所以第 1 個圖形面積是 1，則第 k 個圖形黃色三角形面積是 $(\frac{1}{4})^{k-1}$，設 $a_k=(\frac{1}{4})^{k-1}$

核心思考

高中數學 1-2冊 課後練習本

班級：＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿ 座號：＿＿＿＿

4 數列與級數

概念 1 等差數列與等比數列

1. 已知一等差數列的第 10 項為 $\frac{2}{3}$，第 15 項為 $\frac{3}{2}$，則首項為__________。

解

2. 已知一等比數列的公比為 $\frac{3}{2}$，且第 9 項為 1，則第 13 項為__________。

解

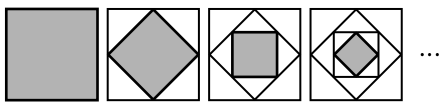
3. 若 $a+\frac{1}{3}$、$b+1$、$3a+2b$ 三數成等比數列，且 $3a$、$4b$、$6a+2b$ 三數成等差數列，則數對 $(a,b)=$____________________。

解

4. 有一個公比為 r 的等比數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_5=a_2+57$，$a_4-a_3=18$，則 $r=$____________。

解

5. 已知右邊第一個圖的灰色正方形（最左邊的正方形）的邊長為 1，第二個圖的灰色正方形為原正方形各邊中點連線圍成的區域，求第十個圖的灰色正方形周長為__________。



解

6. 已知一等差數列首項為 32，公差為 -5，則第______項開始出現負數。

解

概念 2 等差級數與等比級數

7. 有兩等差數列 $7, 10, 13, 16, \cdots$ 和 $-6, -2, 2, 6, \cdots$，若兩數列前 n 項的和剛好相同，則 $n=$ ______。

解

8. 設 $f(x)=x^2-4x-2$ 與 x 軸的交點為 $(\alpha, 0)$ 和 $(\beta, 0)$，其中 $\alpha<\beta$。已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的前兩項 $a_1=\alpha+\beta$，$a_2=\alpha\beta$，則此等比數列前 10 項的和 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$ ______。

解

9. 已知一等差數列的前 3 項和為 8，前 6 項的和為 72，則此數列前 12 項的和為______。

解

10. 有一等差數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=a_{100}$，則 $a_{50}=$ ______。

解

11. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，且前 n 項和 $S_n=3n^2+3n+3$，則 $a_1=$ ______，$a_{10}=$ ______。

解

12. 已知 $\log 1.995 \approx 0.2999$，則和 $\log 19.95+\log 199.5+\log 1995+\cdots+\log 19950000000$ 最接近的整數為______。

解

29. $x<1$ 或 $2\le x\le 4$

因為 $1-x^3=-(x-1)(x^2+x+1)$，且 x^2+x+1 的判別式 <0

故 $\dfrac{(x-2)^3(x-4)}{(1-x^3)}\ge 0$ 的解與

$\begin{cases}(x-1)(x-2)(x-4)\le 0\\ x\ne 1\ (\text{分母不為 }0)\end{cases}$ 相同

畫出 $y=(x-1)(x-2)(x-4)$ 的概略圖形

$\Rightarrow\ x<1$ 或 $2\le x\le 4$

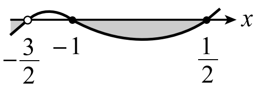
30. $x<-\dfrac{3}{2}$ 或 $-1\le x\le\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2}{2x+3}\le 1-x\ \Rightarrow\ \dfrac{2}{2x+3}-(1-x)\le 0$

$\Rightarrow\ \dfrac{2-(2x+3)(1-x)}{2x+3}\le 0\ \Rightarrow\ \dfrac{(2x-1)(x+1)}{2x+3}\le 0$

$\Rightarrow\ \begin{cases}(2x-1)(x+1)(2x+3)\le 0\\ 2x+3\ne 0\end{cases}$

畫出 $y=(2x-1)(x+1)(2x+3)$ 的概略圖形



$\Rightarrow\ x<-\dfrac{3}{2}$ 或 $-1\le x\le\dfrac{1}{2}$

31. $x\le\dfrac{1}{4}$ 或 $x\ge 1$

因為 $f(x)\ge 0$ 的解與 $(x+1)(x-2)\le 0$ 的解都是

$-1\le x\le 2$，所以 $f(3-4x)\le 0$ 的解與

$[(3-4x)+1][(3-4x)-2]\ge 0$ 的解相同

即 $(-4x+4)(-4x+1)\ge 0\ \Leftrightarrow\ x\le\dfrac{1}{4}$ 或 $x\ge 1$

32. $x<11$ 或 $x>13$

因為 $f(2x+5)<0$ 的解與 $(x-3)(x-4)<0$ 的解都是

$3<x<4$，令 $t=2x+5\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{t-5}{2}$

所以 $f(t)>0$ 的解與 $(\dfrac{t-5}{2}-3)(\dfrac{t-5}{2}-4)>0$ 的解相同

即 $(t-11)(t-13)>0\ \Leftrightarrow\ t<11$ 或 $t>13$

故 $f(x)>0$ 的解為 $x<11$ 或 $x>13$

33. $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ 或 $x>2$

設 $f(x)=4(x-1)^3+p(x-1)+3$

又 $x-2$ 為 $f(x)$ 的因式

由因式定理知 $f(2)=4+p+3=0\ \Rightarrow\ p=-7$

將 $f(x)=4(x-1)^3-7(x-1)+3$ 展開

得 $f(x)=4x^3-12x^2+5x+6$

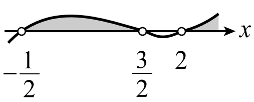
除以 $x-2$ 得商式為

$4x^2-4x-3=(2x+1)(2x-3)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -12 & +5 & +6 & 2\\ & +8 & -8 & -6 & \\ \hline 4 & -4 & -3 & \boxed{+0} & \end{array}$$

所以 $f(x)>0$

$\Leftrightarrow\ (x-2)(2x+1)(2x-3)>0$



$\Leftrightarrow\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ 或 $x>2$

4 數列與級數

概念 1 等差數列與等比數列

20 1. $-\dfrac{5}{6}$

$a_{10}=\dfrac{2}{3}$，$a_{15}=\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ 5d=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}\ \Rightarrow\ d=\dfrac{1}{6}$

$a_{10}=a_1+9d\ \Rightarrow\ \dfrac{2}{3}=a_1+9\times\dfrac{1}{6}\ \Rightarrow\ a_1=-\dfrac{5}{6}$

2. $\dfrac{81}{16}$

$a_{13}=a_9\times r^4=1\times(\dfrac{3}{2})^4=\dfrac{81}{16}$

3. $(\dfrac{2}{3},1)$ 或 $(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{3}{5})$

$\because\ a+\dfrac{1}{3}$、$b+1$、$3a+2b$ 成等比

$\therefore\ (b+1)^2=(a+\dfrac{1}{3})(3a+2b)\ \cdots$①

$\because\ 3a$、$4b$、$6a+2b$ 成等差

$\therefore\ \dfrac{3a+(6a+2b)}{2}=4b\ \Rightarrow\ b=\dfrac{3}{2}a$，代入①

得 $(\dfrac{3}{2}a+1)^2=(a+\dfrac{1}{3})(3a+3a)$

$\Rightarrow\ \dfrac{9}{4}a^2+3a+1=6a^2+2a\ \Rightarrow\ 15a^2-4a-4=0$

$\Rightarrow\ (3a-2)(5a+2)=0\ \Rightarrow\ a=\dfrac{2}{3}$ 或 $-\dfrac{2}{5}$

故 $(a,b)=(\dfrac{2}{3},1)$ 或 $(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{3}{5})$

4. $\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{2}{3}$

$\begin{cases}a_1r^4=a_1r+57\\ a_1r^3-a_1r^2=18\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a_1r(r^3-1)=57\ \cdots①\\ a_1r^2(r-1)=18\ \cdots②\end{cases}$

$\dfrac{①}{②}$ 得 $\dfrac{a_1r(r^3-1)}{a_1r^2(r-1)}=\dfrac{57}{18}\ \Rightarrow\ \dfrac{r^3-1}{r(r-1)}=\dfrac{r^2+r+1}{r}=\dfrac{19}{6}$

$\Rightarrow\ 6r^2-13r+6=0\ \Rightarrow\ r=\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{2}{3}$

5. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

相鄰兩圖形中，右邊圖形灰色正方形邊長是左邊圖形灰色正方形邊長的 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍

設第 n 個圖的灰色正方形邊長為 a_n，則 $a_n=(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$

$\therefore\ a_{10}=(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^9=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$

周長為 $4\times a_{10}=\dfrac{4}{16\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

6. 8

設第 n 項開始為負，則 $32+(n-1)\times(-5)<0$

$\Rightarrow\ n>\dfrac{37}{5}=7\dfrac{2}{5}$

故 n 最小為 8，即第 8 項開始為負數

概念 2 等差級數與等比級數

21 7.27

7, 10, 13, 16, …

前 n 項和為 $\dfrac{[2\times7+(n-1)\times3]n}{2}=\dfrac{n(3n+11)}{2}$

$-6, -2, 2, 6, \cdots$

前 n 項和為 $\dfrac{[2\times(-6)+(n-1)\times4]n}{2}=\dfrac{n(4n-16)}{2}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{n(3n+11)}{2}=\dfrac{n(4n-16)}{2}$，又 $n\neq0$

$\therefore\ 3n+11=4n-16\quad\Rightarrow\quad n=27$

8. $\dfrac{341}{128}$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

比較係數知 $\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=-2$

所以等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比為

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

由等比級數公式知

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{4\cdot[1-(-\frac{1}{2})^{10}]}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{341}{128}$

9. 368

S_3、S_6-S_3、S_9-S_6、$S_{12}-S_9$ 成等差

即 8、$72-8$、S_9-72、$S_{12}-S_9$ 成等差

設公差為 D

則 $D=(72-8)-8=56$

$S_9-72=(72-8)+56\quad\Rightarrow\quad S_9=192$

$S_{12}-S_9=(S_9-72)+56\quad\Rightarrow\quad S_{12}=2S_9-16=368$

10. 0

$\because\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=a_{100}$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}=0$

又 a_{50} 為 a_1 與 a_{99} 的等差中項

$\Rightarrow\quad a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}=\dfrac{(a_1+a_{99})\times99}{2}=a_{50}\times99=0$

$\Rightarrow\quad a_{50}=0$

11. 9；60

$a_1=S_1=3\times1^2+3\times1+3=9$

當 $n\geq2$ 時，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\therefore\ a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(3\times10^2+3\times10+3)-(3\times9^2+3\times9+3)$

$=60$

12. 58

因為數字變成 10 倍，取常用對數後的值增加 1，即

$\log10x=1+\log x$

所以原式

$=(1+\log1.995)+(2+\log1.995)+\cdots+(10+\log1.995)$

$=10\times\log1.995+(1+2+3+\cdots+10)$

$\approx2.999+55=57.999$

故最接近的整數為 58

概念 3 遞迴數列、數學歸納法

22 13. 191

$$\left.\begin{aligned}a_1&=1\\a_2&=a_1+1\\a_3&=a_2+2\\&\ \vdots\\+)\ a_{20}&=a_{19}+19\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_{20}\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_{19})+1+1+2+3+\cdots+19\\&\Rightarrow\quad a_{20}=1+1+2+3+\cdots+19\\&\qquad\quad=1+\frac{19\times(1+19)}{2}=191\end{aligned}$$

14. $\dfrac{n-1}{n+1}$

列出前幾項：$0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{7},\cdots$

可觀察出第 n 項 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

以數學歸納法證明 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$：

①當 $n=1$ 時，$a_1=0=\dfrac{1-1}{1+1}$，原式成立

②假設 $n=k$ 時，$a_k=\dfrac{k-1}{k+1}$

則當 $n=k+1$ 時，由遞迴關係式知

$a_{k+1}=\dfrac{1+a_k}{3-a_k}=\dfrac{1+\frac{k-1}{k+1}}{3-\frac{k-1}{k+1}}=\dfrac{2k}{2k+4}=\dfrac{k}{k+2}=\dfrac{(k+1)-1}{(k+1)+1}$

原式成立

故由數學歸納法得知一般式為 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

15. (1) $4n-1$　(2) 210

觀察圖形的規則，第 n 個圖形比第 $n-1$ 個圖形多出最外層 $4n-1$ 個點，亦可由橫列的點個數來數

即 $a_1=1+2, a_2=1+2+3+4, a_3=1+2+3+4+5+6,$ …，則 $a_n=1+2+\cdots+2n$

所以 $a_{10}=1+2+3+\cdots+20=\dfrac{20\times21}{2}=210$

16. (1) $a_n=\dfrac{n}{3^{n-1}}$

列出前幾項：$1,\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{9},\dfrac{4}{27},\dfrac{5}{81},\cdots$

故可推測一般式為 $a_n=\dfrac{n}{3^{n-1}}$

以數學歸納法證明 $a_n=\dfrac{n}{3^{n-1}}$：

①當 $n=1$ 時，$a_1=\dfrac{1}{3^{1-1}}=1$，原式成立

②假設 $n=k$ 時，$a_k=\dfrac{k}{3^{k-1}}$

則當 $n=k+1$ 時，由遞迴關係式知

$a_{k+1}=\dfrac{a_k}{3}+\dfrac{1}{3^k}=\dfrac{\frac{k}{3^{k-1}}}{3}+\dfrac{1}{3^k}=\dfrac{k+1}{3^k}$，原式成立

故由數學歸納法得知一般式為 $a_n=\dfrac{n}{3^{n-1}}$

概念 4 常用級數和公式

23 17. -24200

$(-2)^3+(-4)^3+(-6)^3+(-8)^3+\cdots+(-20)^3$

$=(-2)^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)=-8\times\dfrac{10^2\times11^2}{4}=-24200$