目次

配合
課後練習本

9 平面向量

學測趨勢 「向量」是處理圖形問題的基本工具，測驗命題常常與其它章節如三角、直線、圓相結合，空間中平面與直線的分析更是緊扣向量的概念。同學準備大考，本章絕對不可輕忽。

準備方向 處理向量的問題常需畫圖思考，請同學聯想相關公式並善加應用，而且要有面對多步推理與繁複計算的心理準備。

年　度	105	106	107	108	109	110	111A+B	112A+B	113A+B
學測命題數	1	1	4	1	3	2	4	5	5

一、向量的概念與運算

★★★★

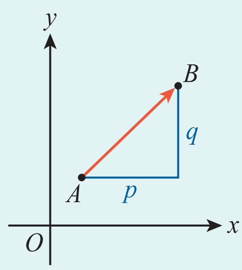
❶ 向量定義與坐標表示法 學測 110 111B 113A

(1)有大小及方向的量即為向量，在平面或空間中，由 A 點朝 B 點連成的有向線段記為 $\overrightarrow{AB}$，其大小為 $|\overrightarrow{AB}|$，即為 $\overline{AB}$ 的長度。

(2)向量可平移，同向且等長的向量記為相等。

(3)稱 $\overrightarrow{AA}$ 為零向量，記為 $\vec{0}$，方向任意。

(4)平面上，點 A 沿 x 軸方向移 p，再沿 y 軸方向移 q，到達 B 點，則 $\overrightarrow{AB}$ 用數對 (p,q) 表示，所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{p^2+q^2}$。



(5)平面上點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，得 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$。

例 A 平面上 A、B、C、D 為相異四點，則下列各選項的推論哪些正確？＿＿＿＿

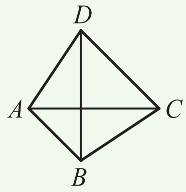
(A) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 必兩兩相異
(B) $|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{AC}|$、$|\overrightarrow{AD}|$ 必兩兩相異
(C) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$ 必兩兩相異
(D)若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，則 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
(E)若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，則 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

例 B 平面上兩點 $A(2,1)$、$B(-6,7)$，則 $\overrightarrow{AB}=$＿＿＿＿，$|\overrightarrow{AB}|=$＿＿＿，若 $\overrightarrow{AC}=(5,-3)$，求 C 點坐標為＿＿＿＿。

範例 1 向量的加減法

答對率 17%　108 學測

如右圖（此為示意圖），A、B、C、D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD=$______。



解

再講清楚

若不用坐標，則需繁複的拆解推導，還要用內積處理

類題 1 正方形 $ABCD$ 的邊長是 1 單位，則下列哪些選項的向量運算結果，長度也是 1 單位？______

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$　(B) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$　(C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$　(D) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$　(E) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$

類題 2 平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 滿足 $\vec{a}+\vec{b}=(1,6)$，$\vec{b}+\vec{c}=(4,7)$，$\vec{c}+\vec{a}=(-3,11)$，則下列各選項的推論哪些正確？______

(A) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 以 $\vec{a}$ 的長度為最大

(B) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 以 $\vec{b}$ 的長度為最小

(C) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 兩兩互不平行

(D)可找到三點 P、Q、R，使 $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$、$\overrightarrow{QR}=\vec{b}$、$\overrightarrow{RP}=\vec{c}$

(E)可找到三點 P、Q、R，使 $|\overrightarrow{PQ}|=|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{QR}|=|\vec{b}|$、$|\overrightarrow{RP}|=|\vec{c}|$

綜 合 實 力 測 驗

一 單選題

______ 1. 已知 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，且 $\sqrt{3}\,\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，若 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角為下列哪一個選項？

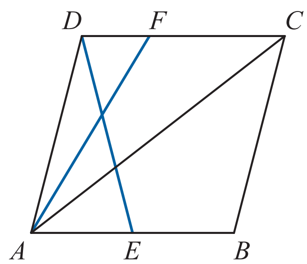
(A) 45°　(B) 60°　(C) 90°　(D) 135°　(E) 150°

______ 2. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩個不平行的非零向量，且 $\vec{c}=x\vec{a}+3\vec{b}$，$x<0$。若 $\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 所張成的平行四邊形面積為 15，$\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積為 10，則 x 之值為下列哪一個選項？

(A) -5　(B) -4　(C) -3　(D) -2　(E) -1

______ 3. 平行四邊形 $ABCD$ 如右圖，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，若 $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{DE}$，則 $\alpha+\beta$ 之值為下列哪一個選項？

(A) 1　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{9}$　(D) $-\frac{1}{3}$　(E) $-\frac{1}{9}$



______ 4. 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 滿足 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-6$ 且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為下列哪一個選項？

(A) $\frac{5\pi}{6}$　(B) $\frac{2\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) $\frac{\pi}{3}$　(E) $\frac{\pi}{6}$

二 多選題

______ 5. 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 為平面上三個非零的向量，則下列敘述哪些正確？

(A)若 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相平行且方向相反

(B)若 $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{a}|$，則 $\vec{c}=\vec{0}$

(C)若 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，則 $\vec{a}=\vec{b}$

(D)若 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$，其中 x、y 為實數，則 $x=0$，$y=0$

(E)若 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 為不平行的兩向量，且 $|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，則 $3\vec{b}+2\vec{c}$ 必可平分 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的夾角

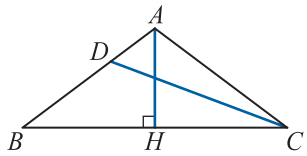
三 填充題

9. 坐標平面上設 $\vec{a}=(4,-3)$，$\vec{b}=(-1,2)$，設 $\vec{a}=\vec{d}+\vec{n}$ 且 $\vec{d}\,/\!/\,\vec{b}$，$\vec{n}\perp\vec{b}$，則 $\vec{n}=$______。

10. 已知正方形 $ABCD$ 邊長為 $2\sqrt{3}$，且一點 P 滿足 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AP}$，則 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$______。

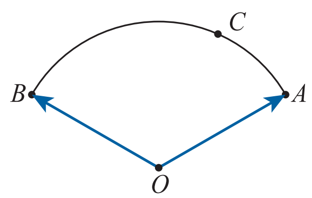
11. 已知 $A(3,0)$、$B(0,-4)$，P 為圓 C：$x^2+y^2=25$ 上任一點，則 ΔAPB 最大面積為______。

12. 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=8$，若 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}:\overline{DB}=1:2$，則 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=$______。



四 混合題

13. 如右圖，給定兩個長度皆為 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2}$，若點 C 在以 O 為圓心的圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上變動，且 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x$、$y$ 為實數，則：



(1) $\angle AOB=$______。

(2)若 $\angle AOC=30^\circ$，則 $x+y$ 之值為下列哪一個選項？______

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) $-\sqrt{3}$　(E) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)試求 $x+y$ 的最大值。（寫出計算過程）。

作	答	區

最　新　大　考　精　選

______ 1. 已知 P 為 ΔABC 內一點，且 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，其中 a、b 為相異實數。設 Q、R 在同一平面上，且 $\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AR}=a\overrightarrow{AB}+(b-0.05)\overrightarrow{AC}$。試選出正確的選項。（多選題）

(A) Q、R 也都在 ΔABC 內部　(B) $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$
(C) ΔABP 面積 $=\Delta ACQ$ 面積　(D) ΔBCP 面積 $=\Delta BCQ$ 面積
(E) ΔABP 面積 $>\Delta ABR$ 面積

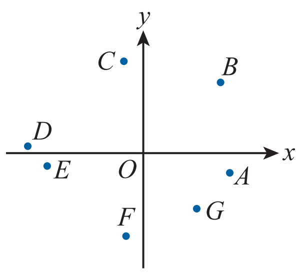
全對率 4%　111 學測 A

______ 2. 在坐標平面上，已知向量 $\overrightarrow{PQ}=(\log\frac{1}{5},-10^{-5})$，其中點 P 的坐標為 $(\log\frac{1}{2},2^{-5})$。試選出正確的選項。

(A)點 Q 在第一象限　(B)點 Q 在第二象限
(C)點 Q 在第三象限　(D)點 Q 在第四象限
(E)點 Q 位於坐標軸上

答對率 49%　111 學測 B

______ 3. 考慮坐標平面上的點 $O(0,0)$、A、B、C、D、E、F、G，如右圖所示。其中 B 點、C 與 D 點、E 與 F 點、G 與 A 點依序在一、二、三、四象限內。若 $\vec{v}$ 為坐標平面上的向量，且滿足 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}>0$ 及 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，則 $\vec{v}$ 與下列哪些向量的內積一定小於 0？（多選題）



(A) $\overrightarrow{OC}$　(B) $\overrightarrow{OD}$　(C) $\overrightarrow{OE}$　(D) $\overrightarrow{OF}$　(E) $\overrightarrow{OG}$

全對率 34%　111 學測 B

4. 坐標平面上有一個半徑為 7 的圓，其圓心為 O 點。已知圓上有 A、B 兩點，且 $\overline{AB}=8$，則內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ ______。

答對率 44%　111 學測 B

5. 設 O、A、B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$。若 C、D 兩點在直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，$3\overline{AD}=8\overline{BD}$，且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，則 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=$ ______。（化為最簡分數）

答對率 25%　112 學測 A

10. 坐標平面上，在以 $O(0,0)$、$A(0,1)$、$B(1,1)$、$C(1,0)$ 為頂點的正方形（含邊界）內，令 R 為滿足下述條件的點 $P(x,y)$ 所成區域：與點 $P(x,y)$ 的距離為 $|x-y|$ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $OABC$（含邊界）內。則區域 R 的面積為 ＿＿＿＿。（化為最簡分數）
113 學測 A

＿＿＿＿ 11. 已知坐標平面上有一向量 $\vec{v}=(-2,3)$ 及兩點 A、B，且點 A 的 x 坐標和 y 坐標、點 B 的 x 坐標和 y 坐標都落在區間 $[0,1]$ 內，試問 $|\vec{v}+\overrightarrow{AB}|$ 的最大值為下列哪一個選項？
113 學測 B

(A) $\sqrt{13}$　(B) $\sqrt{17}$　(C) $3\sqrt{2}$　(D) 5　(E) $\sqrt{2}+\sqrt{13}$

12. 已知 P_1、P_2、Q_1、Q_2、R 為平面上相異五點，其中 P_1、P_2、R 三點不共線，且滿足，$\overrightarrow{P_1R}=4\overrightarrow{P_1Q_1}$，$\overrightarrow{P_2R}=7\overrightarrow{P_2Q_2}$，則 $\overrightarrow{Q_1Q_2}=$ ＿＿＿＿ $\overrightarrow{P_1Q_1}+$ ＿＿＿＿ $\overrightarrow{P_2Q_2}$。
113 學測 B

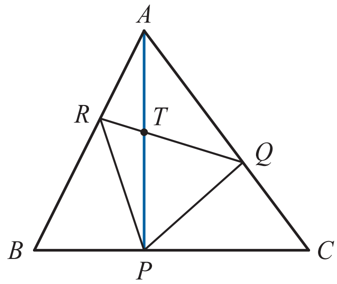
模　考　滿　分　挑　戰

1. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為非零向量，滿足 $\left|\vec{a}+5\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，試問：

(1) 實數 $k=$ ＿＿＿＿ 時，使得 $\left|\vec{a}+k\vec{b}\right|$ 有最小值。

(2) 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 亦滿足 $\left|2\vec{a}-7\vec{b}\right|=\left|2\vec{a}+p\vec{b}\right|$，求正實數 $p=$ ＿＿＿＿。

2. 在 ΔABC 的三邊各取一點連成 ΔPQR，如右圖，設 $\overline{AR}:\overline{RB}=\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{CQ}:\overline{QA}=\alpha:\beta$，且 $\overline{AP}$ 與 $\overline{QR}$ 交於 T 點，試問：



(1) 若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AQ}+y\overrightarrow{AR}$，求 $xy=$ ＿＿＿＿。

(2) 請以 α、β 表示 $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{AP}}$。＿＿＿＿

(3) 請以 α、β 表示 $\dfrac{\overline{QT}}{\overline{TR}}$。＿＿＿＿

⑵ a_1 到 a_{11} 的平均成長率為

$(\sqrt[10]{\frac{a_{11}}{a_1}}-1)\times 100\% = (\sqrt[10]{\frac{15d}{5d}}-1)\times 100\%$

$=(3^{\frac{1}{10}}-1)\times 100\% \approx [(10^{0.4771})^{\frac{1}{10}}-1]\times 100\%$

$=(10^{0.04771}-1)\times 100\% \approx (1.1161-1)\times 100\%$

$\approx 11.6\%$

⑶ $\because (\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)\times 100\% = k\%$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{k}{100}$ 為定值

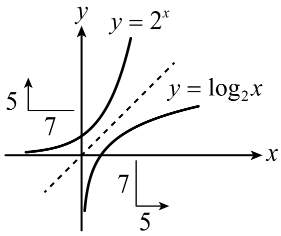
故 $a_n=a_1\cdot(1+\frac{k}{100})^{n-1}$，$\langle a_n\rangle$ 為等比數列

3. ⑴ $y=2^{x+7}+5$ 為

「$y=2^x$ 向左移 7 再向上移 5」，所以 $y=\log_2 x$ 向下移 7 再向右移 5 為

$y=\log_2(x-5)-7$

$\therefore m=-5$，$n=-7$



⑵兩函數一起向左移 6，則

「$y=3^{x+7}+2$ 與 $y=\log_3(x+6+p)+q$ 對稱於 $x-y=0$」

$y=3^{x+7}+2$ 為 $y=3^x$ 向左移 7 再向上移 2

$y=\log_3 x$ 向下移 7 再向右移 2 為 $y=\log_3(x-2)-7$

$\therefore 6+p=-2$，得 $p=-8$，$q=-7$

4. ⑴ $(\frac{128}{5})^{100}=\frac{128^{100}}{5^{100}}=\frac{128^{100}\times 2^{100}}{10^{100}}$

在小數點之右有 100 位

$\log(\frac{128}{5})^{100}=100\log\frac{256}{10}=100(\log 256-\log 10)$

$=100(\log 2^8-\log 10)$

$=100(8\log 2-\log 10)$

$\approx 100\times(8\times 0.3010-1)=140.80$

在小數點之左有 141 位，所求 $=141-100=41$ 位

⑵ $(\frac{128}{5})^n$ 在小數點之右有 n 位

則小數點之左希望有 $n+10$ 位

$\log(\frac{128}{5})^n=n\log\frac{256}{10}=n\log\frac{2^8}{10}=n(8\log 2-\log 10)$

$\approx n(8\times 0.3010-1)=1.4080\times n$

滿足 $n+9\le 1.4080n<n+10$

$\Rightarrow\ 9\le 0.408n<10 \ \Rightarrow\ \frac{9}{0.408}\le n<\frac{10}{0.408}$

$\Rightarrow\ 22.06\le n<24.51$，得 $n=23$ 或 24

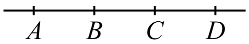
9 平面向量

53 ❶ A (A)(E)　B $(-8,6)$；10；$(7,-2)$　C (B)(C)(D)

A (A)若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，則 B 與 C 重合，不合題意

(B)若 A 為圓心，B、C、D 在圓周上

則 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|$

(C)若  依序在直線上且等距

則 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$

(D)(E)若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 平行且等長

故 $ABDC$ 連成平行四邊形

得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，而 $\overrightarrow{AD}\ne\overrightarrow{BC}$

B $\overrightarrow{AB}=(-6-2,7-1)=(-8,6)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$，令 $C(x,y)$

$\overrightarrow{AC}=(x-2,y-1)=(5,-3)$

得 $x=7$，$y=-2$，則 C 點坐標為 $(7,-2)$

54 C (A)作圖知物體會經過原點，不會進入第一象限

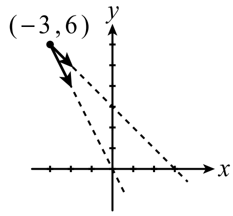
(B)作圖知物體會交 y 軸於 $(0,3)$ 後進入第一象限內

(C)(D) $\vec{v}=(0.001,0)$ 為朝右

$\vec{v}=(0.001,1)$ 為朝右上

由 $(-3,6)$ 朝右或朝右上必可進入第一象限

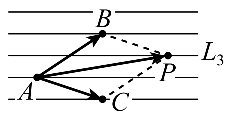
(E) $\vec{v}=(-0.001,1)$ 朝左上，不合



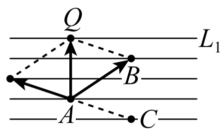
❷ A (C)；(A)　B $(8,5)$；$(-2,-9)$　C (C)

D ⑴(A)(E)　⑵(D)　⑶(B)

A



$\therefore P$ 在 L_3 上



$\therefore Q$ 在 L_1 上

B $\vec{a}+\vec{b}=(3+5,-2+7)=(8,5)$

$\vec{a}-\vec{b}=(3-5,-2-7)=(-2,-9)$

C $\overrightarrow{PO}=(2,3)$，$\overrightarrow{QO}=(-5,2)$，則 $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}+$ 所求 $=\vec{0}$

得所求 $=-\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{QO}=-(2,3)-(-5,2)=(3,-5)=\overrightarrow{CO}$

55 D ⑴由三角不等式知 $3-1\le|\vec{a}+\vec{b}|\le 3+1$ 必成立

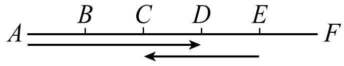
所以(A)、(E)不可能發生

⑵若 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|=4$，則 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 同向

⑶若 $|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||=2$，則 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 反向

❸ A $\frac{3}{5}$；$-\frac{2}{3}$　B $(-9,-1)$　C $\frac{7}{5}$　D $(-3,26)$

A



$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{EC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

B $2\vec{a}+3\vec{b}=(6,-4)+(-15,3)=(-9,-1)$

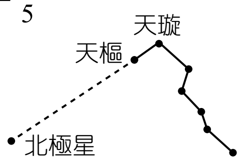
C $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{-3}$

$\therefore -3x+3=2x-4 \ \Rightarrow\ x=\frac{7}{5}$

D 令 $A(9,8)$、$B(7,11)$

北極星為 $C(x,y)$

則 $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AB}$



⑱ A $4\,;-3$　B 1 與 -2　C -15

A $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{8}{2}=4$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-6}{2}=-3$

B $\Delta=\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & k+1 \end{vmatrix}=k^2+k-2=(k+2)(k-1)\neq 0$

$\therefore k\neq -2$ 且 $k\neq 1$

C 已知 $\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ r & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}=\dfrac{cq-br}{aq-bp}=3$

所求 $=\dfrac{\begin{vmatrix} -5c & -2b \\ 5r & 2q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -2b \\ -p & 2q \end{vmatrix}}=\dfrac{-10(cq-br)}{2(aq-bp)}=-5\cdot\dfrac{cq-br}{aq-bp}$

$=-5\cdot 3=-15$

65 **範例 1**　-3

設 $A(0,0)$、$C(k,0)$、$B(p,q)$

則 $D(p,q+k)$，$\overrightarrow{BC}=(k-p,-q)$

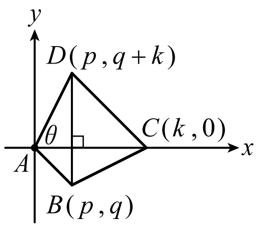
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(p,q)+(p,q+k)=(2p,2q+k)$

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\therefore \begin{cases} k-p=2p \\ -q=2q+k \end{cases}$

$\Rightarrow\ p=\dfrac{k}{3}$，$q=-\dfrac{k}{3}$

$\therefore B(\dfrac{k}{3},-\dfrac{k}{3})$、$D(\dfrac{k}{3},\dfrac{2k}{3})$



則 $\angle CAB=45^\circ$，令 $\angle CAD=\theta$

則 $\tan\theta=\dfrac{q+k}{p}=\dfrac{2k}{3}\div\dfrac{k}{3}=2$

則 $\tan\angle BAD=\tan(45^\circ+\theta)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan\theta}{1-\tan 45^\circ\times\tan\theta}$

$=\dfrac{1+2}{1-1\times 2}=\dfrac{3}{-1}=-3$

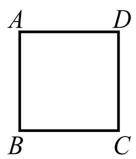
類題 1 (B)(C)

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，大小為 $\sqrt{2}$，不合

(B) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，大小為 1，合

(C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

大小為 1，合



(D) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，大小為 2，不合

(E) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$，大小為 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，不合

類題 2 (B)(C)(E)

$\vec{a}+\vec{b}=(1,6)\cdots$①，$\vec{b}+\vec{c}=(4,7)\cdots$②，$\vec{c}+\vec{a}=(-3,11)\cdots$③

①+②+③得 $2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(1,6)+(4,7)+(-3,11)=(2,24)$

$\therefore \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1,12)\cdots$④，④－①得 $\vec{c}=(0,6)$

④－②得 $\vec{a}=(-3,5)$，④－③得 $\vec{b}=(4,1)$

$\therefore |\vec{a}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$，$|\vec{b}|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

$|\vec{c}|=\sqrt{0+36}=6$

(A) $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$|\vec{c}|$ 中應以 $|\vec{c}|$ 為最大

(D)因為 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\neq\vec{0}$，所以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 無法頭尾相連成為封閉三角形

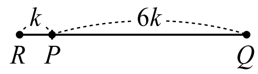
(E) $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$|\vec{c}|$ 可作為三角形的三邊長

（$\because \sqrt{34}+\sqrt{17}>6$）

66 **範例 2** (A)(D)

$3\overrightarrow{PQ}+2(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ})=-4\overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=-6\overrightarrow{PR}$，作圖如右

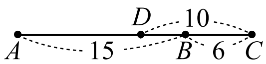


$\therefore P$ 在 $\overline{QR}$ 上，且 $\overline{PR}<\overline{PQ}<\overline{QR}$

類題 3 $-\dfrac{21}{4}$

為方便，令 $|\overrightarrow{AB}|=15$，則 $|\overrightarrow{BC}|=6$，$|\overrightarrow{CD}|=10$

作圖



$\overline{AC}=15+6=21$，$\overline{BD}=10-6=4$

$\because \overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 方向相反

$\therefore \overrightarrow{AC}=-\dfrac{21}{4}\overrightarrow{BD}$，得 $r=-\dfrac{21}{4}$

類題 4　7；10

$\vec{a}+\vec{b}=(3+t,3t-1)\,/\!/\,(1,2)$

$\therefore \dfrac{3+t}{1}=\dfrac{3t-1}{2}$，即 $6+2t=3t-1$，得 $t=7$

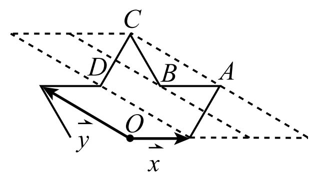
代回得 $\vec{a}+\vec{b}=(10,20)=k(1,2)$，$k=10$

範例 3 (D)

建立斜坐標看出

$\overrightarrow{OA}=3\vec{x}+\vec{y}$，$\overrightarrow{OB}=2\vec{x}+\vec{y}$

$\overrightarrow{OC}=3\vec{x}+2\vec{y}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{x}+\vec{y}$



其它頂點的寫法其 a、b

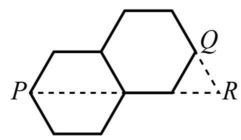
不全為正，數值和會更小，可不考慮

$\therefore$在 $\overrightarrow{OC}$ 發生所求最大的 $(a,b)=(3,2)$，得 $a+b=5$

67 **類題 5**　$(4,1)$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=4\vec{a}+\vec{b}$

$\therefore x=4$，$y=1$



類題 6 (C)

$\alpha=-3$ 且 $\beta=-4$ 時，$\overrightarrow{OP}=-3(3,4)-4(1,-2)=(-13,-4)$

$\alpha=-3$ 且 $\beta=5$ 時，$\overrightarrow{OP}=-3(3,4)+5(1,-2)=(-4,-22)$

$\alpha=2$ 且 $\beta=-4$ 時，$\overrightarrow{OP}=2(3,4)-4(1,-2)=(2,16)$

$\alpha=2$ 且 $\beta=5$ 時，$\overrightarrow{OP}=2(3,4)+5(1,-2)=(11,-2)$

$\therefore$ 4 個頂點有 2 個在第三象限

代入 $x-ay=122$，得 $\frac{a-2}{-3}-a\cdot\frac{2a-1}{-3}=122$

同乘 3，得 $2a^2-2a+2=366$

$\therefore a^2-a-182=(a-14)(a+13)=0$

$\therefore a=14$ 或 -13（不合）

綜　合　實　力　測　驗

1.(E)	2.(D)	3.(C)	4.(D)	5.(A)(E)	6.(A)(C)(E)
7.(A)(C)(D)(E)	8.(A)(C)(D)	9.$(2,1)$	10.-3		
11.$\frac{37}{2}$	12.-6	13.(1) 120°	(2)(C)	(3) 2	

79 1. $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\ |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\ 4\vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\therefore \vec{a}\perp\vec{b}$

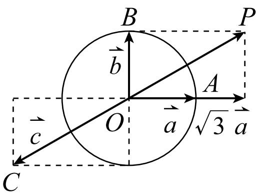
設 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，作單位圓 O

令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$\because \sqrt{3}\,\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\sqrt{3}\,\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=-\overrightarrow{OP}$，如右圖所示



得 $\angle AOC=150^\circ$，故 $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角為 150°

2. $\because \dfrac{\vec{c}\text{ 與 }\vec{a}\text{ 所張平行四邊形面積}}{\vec{a}\text{ 與 }\vec{b}\text{ 所張平行四邊形面積}}$

$=\dfrac{x\vec{a}+3\vec{b}\text{ 與 }\vec{a}\text{ 所張平行四邊形面積}}{\vec{a}\text{ 與 }\vec{b}\text{ 所張平行四邊形面積}}$

$=\dfrac{3\vec{b}\text{ 與 }\vec{a}\text{ 所張平行四邊形面積}}{\vec{a}\text{ 與 }\vec{b}\text{ 所張平行四邊形面積}}=3$

$\therefore \vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張平行四邊形面積為 $\frac{15}{3}=5$

$|x|=\dfrac{\vec{c}\text{ 與 }\vec{b}\text{ 所張平行四邊形面積}}{\vec{a}\text{ 與 }\vec{b}\text{ 所張平行四邊形面積}}=\frac{10}{5}=2\quad\therefore x=\pm 2$

$\because x<0\quad\therefore x=-2$

3. $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{DE}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\beta(\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$=\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AD}-\beta\overrightarrow{AD}+\frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB}$

$=(\alpha-\beta)\overrightarrow{AD}+(\alpha+\frac{\beta}{2})\overrightarrow{AB}$

且 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$（$\because \overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{FC}$，

得 $\overline{DF}:\overline{FC}=1:2$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$）

$\therefore \begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \alpha+\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}$，得 $\alpha=\frac{5}{9}$，$\beta=-\frac{4}{9}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{5}{9}+(-\frac{4}{9})=\frac{1}{9}$

4. $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-6\quad\Rightarrow\quad|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=-6$

$\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-6-1+8=1$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\dfrac{\pi}{3}$

5. (A)如圖(一)

(B)反例：$\vec{c}=-2\vec{a}$

(C)如圖(二)

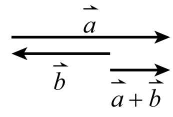
(D)$\vec{a}=(1,-1)$

$\vec{b}=(-2,2)$

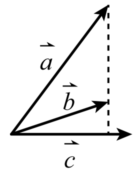
則 $2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，$x=2$，$y=1$

(E)$|3\vec{b}|=3|\vec{b}|=6$，$|2\vec{c}|=2|\vec{c}|=6$

$\therefore 3\vec{b}$ 和 $2\vec{c}$ 所張成的平行四邊形為菱形，菱形對角線互相平分對角

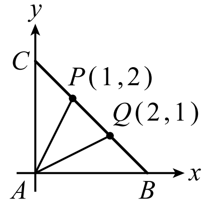


圖(一)



圖(二)

80 6. 如右圖，以 A 為坐標原點，B 點在 x 軸上，C 點在 y 軸上，為計算方便取 $B(3,0)$、$C(0,3)$，則 $P(1,2)$、$Q(2,1)$ 為 $\overline{BC}$ 的等分點



(A) $\cos\angle PAQ=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}$

$=\dfrac{(1,2)\cdot(2,1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

(B) $\cos\angle BAQ=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{(3,0)\cdot(2,1)}{3\times\sqrt{5}}=\dfrac{6}{3\sqrt{5}}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}>\dfrac{4}{5}=\cos\angle PAQ$

$\therefore \angle PAQ>\angle BAQ$

(C) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(1,2)+(2,1)=(3,3)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,3)$

$(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})\cdot\overrightarrow{BC}=(3,3)\cdot(-3,3)=-9+9=0$

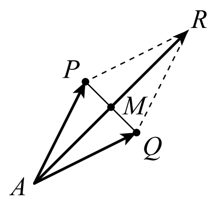
$\therefore (\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})\perp\overrightarrow{BC}$

(D) $(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{BC}|\cos 0^\circ$

$=|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{BC}|>0$

(E)如右圖，取 $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AQ}$ 使 $APRQ$ 為菱形，對角線互相平分

$\therefore \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AM}$



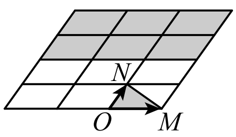
7. (B)應為一線段

(C) $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OM}+\frac{2}{4}\overrightarrow{ON}\quad\because \frac{5}{4}+\frac{2}{4}>1\quad\therefore P$點在區域①

(D) $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OM}-\frac{2}{4}\overrightarrow{ON}$

$\frac{5}{4}+(-\frac{2}{4})<1$

$\therefore P$ 點在區域③



(E) $(1+2)(4-2)\times 10=60$

8. (A) $\Delta=\begin{vmatrix}k & -6\\ 2 & k-7\end{vmatrix}=k^2-7k+12=(k-3)(k-4)$

當 $\Delta\neq 0$，即 $k\neq 3$ 且 $k\neq 4$ 時，原方程組恰有一解

(B)可能有無限多解

(C)當 $\Delta=0$ 時，即 $k=3$ 或 4，當 $k=3$ 時

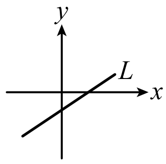
原式化為 $\begin{cases}3x-6y=12\\ 2x-4y=8\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x-2y=4\\ x-2y=4\end{cases}$

方程組有無限多解

(D)當 $k=4$ 時，原式化為

$$\begin{cases}4x-6y=17\\2x-3y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y=\dfrac{17}{2}\\2x-3y=1\end{cases}$$，方程組無解

$$d=\frac{\left|\frac{17}{2}-1\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{15}{2\sqrt{13}}$$



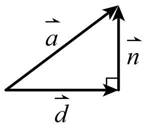
(E)如右圖，不通過第二象限

81 9. $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影為

$(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=(\dfrac{-10}{5})\vec{b}=-2\vec{b}=(2,-4)$

$\therefore\ \vec{d}=(2,-4)$

$\vec{n}=\vec{a}-\vec{d}=(4,-3)-(2,-4)=(2,1)$



10. $\because\ \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore$ P 為 $\overline{BC}$ 的中點，則 $\overline{PB}=\sqrt{3}$

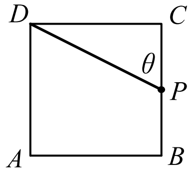
$\overline{PD}=\sqrt{\overline{PC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{3+12}=\sqrt{15}$

設 $\angle CPD=\theta$，則 $\angle BPD=180^\circ-\theta$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=|\overrightarrow{PB}|\times|\overrightarrow{PD}|\times\cos(180^\circ-\theta)$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{15}\times(-\cos\theta)$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{15}\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}})=-3$



11. 設 $P(x,y)$，$\overrightarrow{PA}=(3-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-x,-4-y)$

ΔAPB 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3-x&-y\\-x&-4-y\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|-12-3y+4x+xy-xy|$

$=\dfrac{1}{2}|4x-3y-12|$

$(x^2+y^2)[4^2+(-3)^2]\ge(4x-3y)^2$

$\Rightarrow\quad(4x-3y)^2\le25^2$

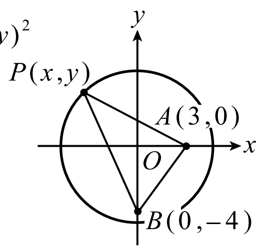
$\Rightarrow\quad|4x-3y|\le25$

$\Rightarrow\quad-25\le4x-3y\le25$

$\Rightarrow\quad-37\le4x-3y-12\le13$

ΔAPB 有最大面積為

$\dfrac{1}{2}|-37|=\dfrac{37}{2}$



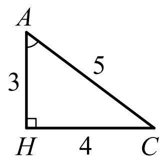
12. $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=\dfrac{1}{3}\times0-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

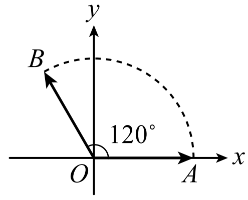
$=-\dfrac{2}{3}\times3\times5\times\cos\angle CAH=-10\times\dfrac{3}{5}=-6$



13. (1) $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1\times1}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \angle AOB=120^\circ$

(2)以 O 為原點，直線 OA 為 x 軸建立坐標系，則



$\overrightarrow{OA}=(1,0)$

$\overrightarrow{OB}=(\cos120^\circ,\sin120^\circ)$

$=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{OC}=(\cos30^\circ,\sin30^\circ)=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$

由 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 可得

$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})=x(1,0)+y(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})=(x-\dfrac{1}{2}y,\dfrac{\sqrt{3}}{2}y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\quad x=\frac{2\sqrt{3}}{3}，y=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore\ x+y=\sqrt{3}$

(3)設 $\overrightarrow{OC}=(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\le\theta\le120^\circ$

$\cos\theta=x-\dfrac{1}{2}y\ \cdots①$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\ \cdots②$

由①$+\sqrt{3}\times$②，得

$x+y=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2(\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$

$=2(\sin30^\circ\cos\theta+\cos30^\circ\sin\theta)=2\sin(30^\circ+\theta)$

當 $\theta=60^\circ$ 時，$x+y$ 有最大值

$2\sin(30^\circ+60^\circ)=2\sin90^\circ=2$

最　新　大　考　精　選

1.(C)(D)　2.(B)　3.(B)(C)　4. 17　5. $\dfrac{3}{4}$

6.(1)(D)　(2) $Q(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})$　(3) $\dfrac{72}{25}$；$\dfrac{108}{25}$　7. $2\sqrt{2}$

8.(C)(E)　9. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　10. $\dfrac{1}{3}$　11.(D)　12. 3；-6

82 1. (A)反例：$a=\dfrac{1}{2}$，$b=0.01$，使 R 在 ΔABC 之外

(B)反例：$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1)$，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{4}$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=(1,\dfrac{1}{4})$

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

$\therefore\ |\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\dfrac{17}{16}}$ 且 $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{\dfrac{2}{4}}$，得 $|\overrightarrow{AP}|\ne|\overrightarrow{AQ}|$

(C)設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$

則 $\overrightarrow{AP}=(ax_1+bx_2,ay_1+by_2)$，$\overrightarrow{AQ}=(bx_1+ax_2,by_1+ay_2)$

$\therefore\ \Delta ABP=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1\\ax_1+bx_2&ay_1+by_2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{b}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right|$

$\Delta ACQ=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_2&y_2\\bx_1+ax_2&by_1+ay_2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{b}{2}\left|\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_1&y_1\end{vmatrix}\right|$

$\Rightarrow\quad\Delta ABP=\Delta ACQ$

(D)如(C)，同理得 $\Delta ABQ=\Delta ACP=\frac{a}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$

$\Delta BCP=\Delta ABC-\Delta ABP-\Delta ACP$

$\Delta BCQ=\Delta ABC-\Delta ABQ-\Delta ACQ$

$\therefore\ \Delta BCP=\Delta BCQ$，成立

(E)若 $a=\frac{1}{2}$，$b=0.01$，則作圖知 $\Delta ABR=4\Delta ABP$

2. 設 O 為 $(0,0)$

則 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=(\log\frac{1}{2},\frac{1}{32})+(\log\frac{1}{5},-\frac{1}{100000})$

$=(\log\frac{1}{10},\frac{1}{32}-\frac{1}{100000})=(-1,+)$

∴點 Q 坐標為 $(-,+)$，在第二象限

3. 過 O 作 $\overline{OA}$ 的垂線為 L_1，過 O 作 $\overline{OB}$ 的垂線為 L_2

則 C、D、E 在 L_1 之左，D、E、F、G 在 L_2 之左

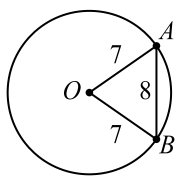
所以 D、E 在 L_1 之左且在 L_2 之左

則 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OD}<0$ 且 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OE}<0$ 必成立

4. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\angle AOB$

$=7\times7\times\frac{7^2+7^2-8^2}{2\times7\times7}$

$=\frac{49+49-64}{2}=\frac{34}{2}=17$

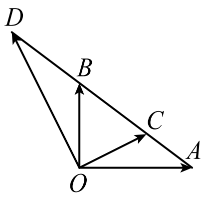


5. 設 $\overrightarrow{OA}=(a,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,b)$，其中 $a>0$，$b>0$

則 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}(a,0)+\frac{2}{5}(0,b)=(\frac{3a}{5},\frac{2b}{5})$

設 $D(x,y)$，由 $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$

得 $(x-0,y-b)=\frac{3}{8}(x-a,y-0)$



$\therefore\begin{cases} x=\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}a \\ y-b=\frac{3}{8}y \end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{5x}{8}=-\frac{3a}{8}$ 且 $\frac{5y}{8}=b$

得 $x=-\frac{3a}{5}$，$y=\frac{8b}{5}$，$\overrightarrow{OD}=(-\frac{3a}{5},\frac{8b}{5})$

由 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=(\frac{3a}{5},\frac{2b}{5})\cdot(-\frac{3a}{5},\frac{8b}{5})=-\frac{9a^2}{25}+\frac{16b^2}{25}=0$

$\Rightarrow\ 16b^2=9a^2$，得 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

83 6. A 對 $\overline{OP}$ 的垂足為 H，B 對 $\overline{OQ}$ 的垂足為 K

(1) $\because\ \overline{OH}=\overline{OA}\times\cos\theta=1\times\cos\theta$

$\therefore\ \overline{OP}=2\overline{OH}=2\cos\theta$

(2) $\overline{OQ}=2\overline{OK}=2(\overline{OB}\times\cos(90^\circ-\theta))=2\times2\times\sin\theta$

$=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

Q 的坐標為 $[\frac{12}{5},\theta+90^\circ]$

$=(\frac{12}{5}\cos(\theta+90^\circ),\frac{12}{5}\sin(\theta+90^\circ))$

$=(\frac{12}{5}\sin(-\theta),\frac{12}{5}\cos(-\theta))$

$=(\frac{12}{5}\times\frac{-3}{5},\frac{12}{5}\times\frac{4}{5})=(-\frac{36}{25},\frac{48}{25})$

而 P 的坐標為 $[2\times\frac{4}{5},\theta]=(\frac{8}{5}\cos\theta,\frac{8}{5}\sin\theta)$

$=(\frac{8}{5}\times\frac{4}{5},\frac{8}{5}\times\frac{3}{5})=(\frac{32}{25},\frac{24}{25})$

$\therefore\ \overrightarrow{BQ}=(-\frac{36}{25}+2,\frac{48}{25}-0)=(\frac{14}{25},\frac{48}{25})$

$\overrightarrow{AP}=(\frac{32}{25}-1,\frac{24}{25}-0)=(\frac{7}{25},\frac{24}{25})$

故 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$ 成立

(3) $\overline{BQ}$ 斜率為 $\frac{48}{25}\div\frac{14}{25}=\frac{24}{7}$

$\overleftrightarrow{BQ}$ 為 $y-0=\frac{24}{7}(x+2)$，即 $24x-7y+48=0$

$d(A,\overleftrightarrow{BQ})=\frac{24+0+48}{\sqrt{24^2+7^2}}=\frac{72}{25}$

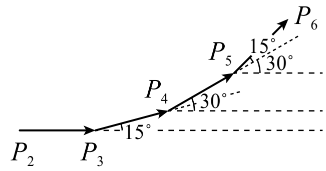
所以 $PABQ$ 面積為 $(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\frac{72}{25}\times\frac{1}{2}=3\times\frac{36}{25}=\frac{108}{25}$

7. $\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{P_5P_6}$ 夾 45°

$\therefore\ \overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_5P_6}$

$=2\times2\times\cos45^\circ$

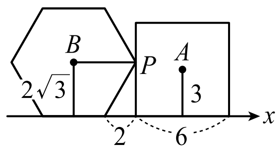
$=2\sqrt{2}$



8. (A)如右圖，A 距離 x 軸為 3

B 距離 x 軸為 $2\sqrt{3}\approx3.464$

應是 B 距離 x 軸較遠



(B)正六邊形的邊長應為 4

(C) B 向右移 7 再向下移 $2\sqrt{3}-3$ 到 A，合

(D) $\overline{AP}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3}-3)^2}=\sqrt{9+(12-12\sqrt{3}+9)}$

$=\sqrt{30-12\sqrt{3}}\approx\sqrt{30-12\times1.732}=\sqrt{30-20.784}$

$=\sqrt{9.216}<\sqrt{10}$

(E) $m_{\overline{AP}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{0-3}\approx\frac{2\times1.732-3}{-3}=-\frac{0.464}{3}=-0.15\cdots$

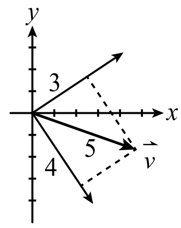
而 $-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx-\frac{1.732}{3}=-0.57\cdots$　$\therefore\ m_{\overline{AP}}>-\frac{1}{\sqrt{3}}$，合

9. 因為 $(2,-3)\perp(3,2)$

設 $|\vec{v}|=k$

則 $k-1,k-2,k$ 為直角

三角形的邊長



$\therefore\ (k-1)^2+(k-2)^2=k^2$

$\Rightarrow\ \ k^2-6k+5=0$

$\Rightarrow\ \ (k-1)(k-5)=0$

$\therefore\ k=5$（$k=1$ 不合）

$\therefore\ \vec{v}=\frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}(2,-3)+\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2}}(3,2)$

$=(\frac{17}{\sqrt{13}},\frac{-6}{\sqrt{13}})$

所求 $=\left|\frac{\vec{v}\cdot(4,7)}{|(4,7)|^2}(4,7)\right|=\frac{|\vec{v}\cdot(4,7)|}{|(4,7)|}=\frac{\frac{68}{\sqrt{13}}-\frac{42}{\sqrt{13}}}{\sqrt{65}}$

$=\frac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

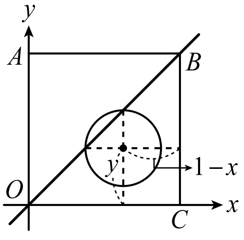
84 10. 如圖㈠，以 $P(x,y)$ 為圓心 $|x-y|$ 為半徑作圓，希望此圓完全落在正方形 $OABC$ 內（含邊界）

設 $x \geq y$，則 P 點在 ΔOBC 區域內（含邊界）

P 點距離 x 軸為 $y \geq x-y$

P 點距離 $\overline{BC}$ 為 $1-x \geq x-y$

$\therefore \begin{cases} x-2y \leq 0 \text{（左半平面）} \\ 2x-y \leq 1 \text{（左半平面）} \end{cases}$

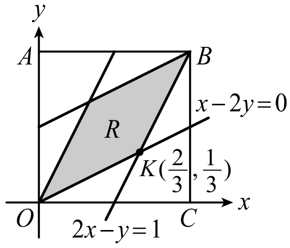


圖㈠

由 $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 得 $K(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

當 $x \leq y$ 時，同理可推

所求如圖㈡，區域 R 為菱形，面積與 $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OK}$ 張成的平行四邊形面積相同



圖㈡

所求 $=\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}$

11. 設 $\overrightarrow{AB}=(p,q)$，則 $-1 \leq p \leq 1$ 且 $-1 \leq q \leq 1$

$|\vec{v}+\overrightarrow{AB}|=|(-2+p,3+q)|=\sqrt{(-2+p)^2+(3+q)^2}$

在 $p=-1$ 且 $q=1$ 時，使 $|\vec{v}+\overrightarrow{AB}|$ 有最大值為

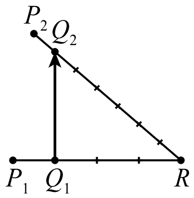
$\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

12. 如右圖

$\overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{RQ_2}-\overrightarrow{RQ_1}$

$=(-6\overrightarrow{P_2Q_2})-(-3\overrightarrow{P_1Q_1})$

$=3\overrightarrow{P_1Q_1}-6\overrightarrow{P_2Q_2}$

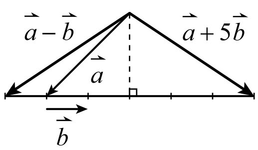


模　考　滿　分　挑　戰

1.⑴ 2　⑵ 15	2.⑴ 1　⑵ $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$　⑶ $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$
3.⑴ 36　⑵ $\frac{27}{2}$；$\frac{3}{5}$	4.⑴ 60°　⑵ 4；$\frac{16}{3}$

1. ⑴作圖如右，$\vec{a}-\vec{b}$ 與 $\vec{a}+5\vec{b}$ 張成等腰三角形，可看出 $\vec{a}+2\vec{b}$ 為此三角形的高

故 $k=2$ 使 $|\vec{a}+k\vec{b}|$ 為最小



《另解》

$|\vec{a}+5\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\ |\vec{a}|^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

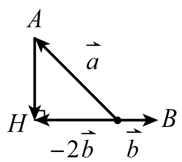
$\Rightarrow\ 24|\vec{b}|^2=-12\vec{a}\cdot\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=-2|\vec{b}|^2$

$\therefore \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=-2$，得 $(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=-2\vec{b}$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $-2\vec{b}$

當 $\vec{a}+k\vec{b}$ 和 $\vec{b}$ 垂直時

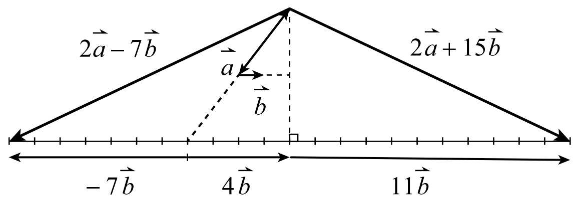
$|\vec{a}+k\vec{b}|$ 有最小值



此時 $\vec{a}+\overrightarrow{AH}=-2\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{AH}=-\vec{a}-2\vec{b}$

$\Rightarrow\quad|\overrightarrow{AH}|=|-\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$，得 $k=2$

⑵



$2\vec{a}-7\vec{b}$ 與 $2\vec{a}+15\vec{b}$ 可張成等腰三角形

$\therefore p=15$

《另解》

$|2\vec{a}-7\vec{b}|^2=|2\vec{a}+p\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\quad 4|\vec{a}|^2-28\vec{a}\cdot\vec{b}+49|\vec{b}|^2$

$=4|\vec{a}|^2+4p\vec{a}\cdot\vec{b}+p^2|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\quad(4p+28)\vec{a}\cdot\vec{b}=(49-p^2)|\vec{b}|^2$

由⑴將 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2|\vec{b}|^2$ 代入得

$-8p|\vec{b}|^2-56|\vec{b}|^2=(49-p^2)|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\quad 105|\vec{b}|^2=-8p|\vec{b}|^2+p^2|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow\quad p^2-8p-105=0\quad\Rightarrow\quad(p+7)(p-15)=0$

$\Rightarrow\quad p=15$ 或 -7（負不合）

2. ⑴ $\overrightarrow{AP}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{\beta}{\alpha+\beta}(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\overrightarrow{AR})+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\overrightarrow{AQ})$

$=\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{AQ}+\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AR}$

$\therefore x=\frac{\alpha}{\beta}$，$y=\frac{\beta}{\alpha}$，得 $xy=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$

⑵承⑴，可設 $\overrightarrow{AT}=k\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha k}{\beta}\overrightarrow{AQ}+\frac{\beta k}{\alpha}\overrightarrow{AR}$

$\because T$ 在 $\overline{QR}$ 上，即 R、T、Q 三點共線

$\therefore \frac{\alpha k}{\beta}+\frac{\beta k}{\alpha}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{(\alpha^2+\beta^2)k}{\alpha\beta}=1$

$\Rightarrow\quad k=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

故 $\overrightarrow{AT}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\overrightarrow{AP}\quad\Rightarrow\quad\frac{\overline{AT}}{\overline{AP}}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

⑶承⑵，$\overrightarrow{AT}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}(\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{AQ}+\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AR})$

$=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\overrightarrow{AQ}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\overrightarrow{AR}$

$\therefore \overline{QT}:\overline{TR}=\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}:\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\overline{QT}}{\overline{TR}}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$

85 3. ⑴ $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AR}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR})$

$=\underbrace{\cancel{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}}_{=0}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DR}+\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{AD}+\underbrace{\cancel{\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{DR}}}_{=0}$

$=\overline{AB}\times\overline{DR}+\overline{BQ}\times\overline{AD}$

$=\overline{AB}\times(\overline{DR}+\overline{BQ})$（$\because \overline{AB}=\overline{AD}$）

$=\overline{AB}\times\overline{CD}=6\times6=36$

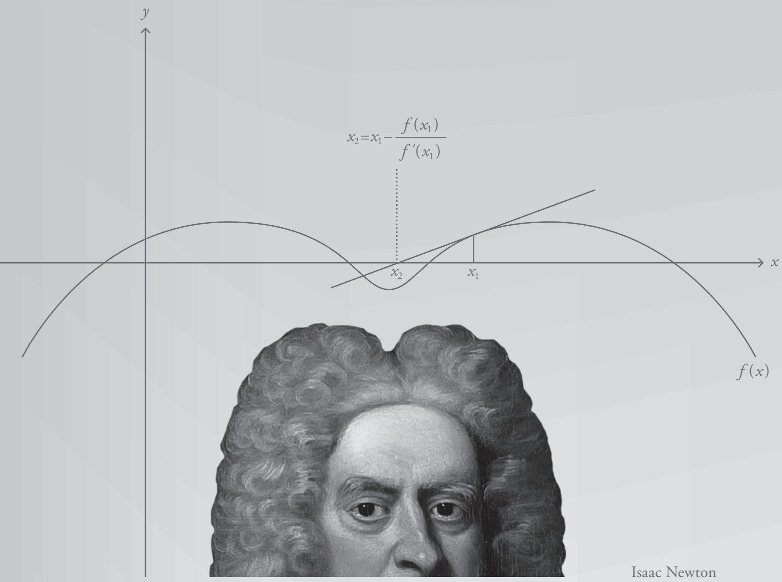
對話式®

高中數學 3A-4A 冊

學測複習講義

課後練習本

白德超／葉晉宏



Isaac Newton

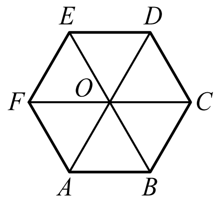
班級：

姓名：

座號：

第 5 回　平面向量的運算與內積

1 正六邊形 $ABCDEF$，如右圖，下列哪一個向量的長度最短？______

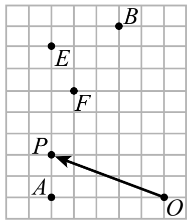


(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$　(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$　(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$　(E) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$

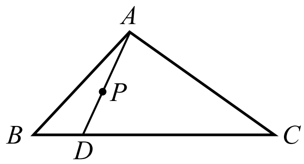
解

2 右圖方格紙中，設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{EF}$，求數對 $(x,y)=$ ______。



解

3 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AP}:\overline{PD}=3:2$，$\overline{BD}:\overline{DC}=1:4$。

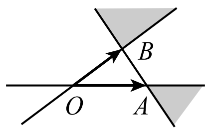


(1)若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$ ______。

(2)點 O 為 ΔABC 外一點，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，則序組 $(\alpha,\beta,\gamma)=$ ______。

解

4 如右圖，下列哪些向量端點 P 會落在陰影區域內？______



(A) $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　(B) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

(C) $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　(D) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(E) $\overrightarrow{OP}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{OA}+101\overrightarrow{OB}$

解

5 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=6$，則：

(1) $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=$ ______　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$ ______　(3) $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=$ ______。

解

6 若 $\vec{a}=(-4,-2)$，$\vec{b}=(3,-1)$，$\vec{c}=(1,1)$，則：

(1) $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角為 ______ 度　(2) $(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$，則 $t=$ ______。

解

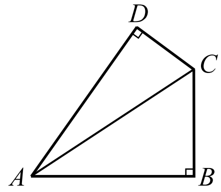
7 平行四邊形 $ABCD$，O 為對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點，P 為四邊形外一點，下列選項哪些正確？__________

(A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　(B) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$　(C) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$

(D) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$　(E) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}$

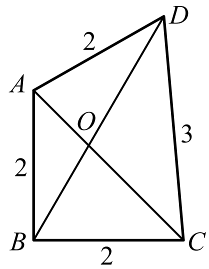
解

8 如右圖，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=3$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=$ ______。



解

9 如右圖，四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點。若 $\ell=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$m=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$n=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，請比較 ℓ、m、n 的大小為__________。



解

10 若 $|\vec{a}|=2\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$，則：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____　(2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|=$________。

解

11 ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，$\angle BAC=60^\circ$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，請選出正確的選項。__________

(A) $x+y=1$ 時，點 P 所成圖形為一直線

(B) $x+y=1$，$x\geq 0$，$y\geq 0$ 時，點 P 所成圖形為一線段

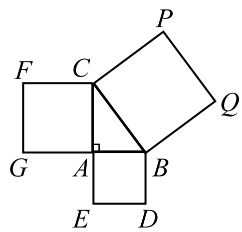
(C) $x=1$ 時，點 P 所成圖形為一直線

(D) ΔABC 面積為 $3\sqrt{3}$

(E) $\overline{BC}=\sqrt{7}$

解

12 如右圖，ΔABC 中 $\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，四邊形 $ABDE$、$ACFG$、$BCPQ$ 均為正方形，則 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BF}=$________。



解

(C) $\log_2 6=\log_2 2+\log_2 3=1+\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{a-1}$

(D) $\log_3 12=\log_3 6+\log_3 2=a+(a-1)=2a-1$

(E) $\log_3 4=2\log_3 2=2(a-1)=2a-2$

6. $y=\log_2 x\xrightarrow{\text{向右}}y=\log_2(x-2)\xrightarrow{\text{向下}}y=\log_2(x-2)-3$

$y=\log_2(x-2)-3=\log_2(x-2)-\log_2 8$

$=\log_2\dfrac{x-2}{8}=\log_2(\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{4})$

$\therefore\ p=\dfrac{1}{8}$，$q=-\dfrac{1}{4}$

8 7. (1) $\begin{cases}2=a+\log_3(h) & \cdots① \\ 4=a+\log_3(8+h) & \cdots②\end{cases}$

②－①得 $2=\log_3(8+h)-\log_3 h\ \Rightarrow\ 2=\log_3\dfrac{8+h}{h}$

$\Rightarrow\ \dfrac{8+h}{h}=3^2\ \Rightarrow\ h=1$

代入①得 $a=2$，故數對 $(a,h)=(2,1)$

(2) Γ：$y=2+\log_3(x+1)$，點 $(3,\beta)$ 代入 Γ

得 $\beta=2+\log_3 4\ \Rightarrow\ \beta=\log_3 9+\log_3 4=\log_3 36$

$\Rightarrow\ 3^\beta=36\ \Rightarrow\ 9^\beta=(3^\beta)^2=36^2=1296$

8. (A) $y=(x-3)^2$ 即將 $y=x^2$ 向右平移 3 單位，合

(B) $y=\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$

即將 $y=\log_2 x$ 的圖形向上平移 2 單位，合

(C) $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 兩圖形對稱於 x 軸，不合

(D) $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 對稱於直線 $y=x$，不合

9. $b=\log_{64}125=\log_{2^6}5^3=\dfrac{1}{2}\log_2 5=\log_2\sqrt{5}$

$c=\log_{\frac14}\dfrac{1}{3}=\log_{4^{-1}}3^{-1}=\log_4 3=\dfrac{1}{2}\log_2 3=\log_2\sqrt{3}$

$d=\log_{2^{\frac12}}7^{\frac14}=\dfrac{1}{2}\log_2 7=\log_2\sqrt{7}$

$\because\ 3>\sqrt{7}>\sqrt{5}>\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \log_2 3>\log_2\sqrt{7}>\log_2\sqrt{5}>\log_2\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ a>d>b>c$

10. (1)原式 $\Rightarrow\ \log_2 x^2-\log_2(x+3)=2$

$\Rightarrow\ \log_2\dfrac{x^2}{x+3}=\log_2 4\ \Rightarrow\ \dfrac{x^2}{x+3}=4$

$\Rightarrow\ x^2-4x-12=0\ \Rightarrow\ (x-6)(x+2)=0$

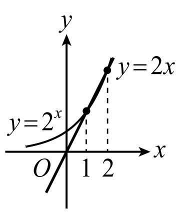
$\therefore\ x=6$ 或 -2（不合），故 $x=6$

(2) $\log_{\frac13}(4x-1)>\log_{\frac13}(\dfrac{1}{3})^{-1}\ \Rightarrow\ 4x-1<3$

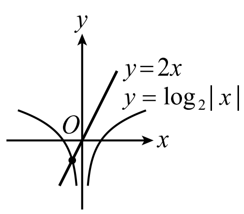
$\Rightarrow\ x<1\cdots①$，真數條件 $4x-1>0$

$\Rightarrow\ x>\dfrac{1}{4}\cdots②$，由①②得 $\dfrac{1}{4}<x<1$

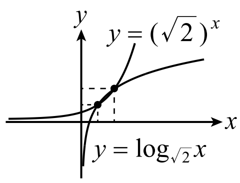
11. (A)有 2 個交點



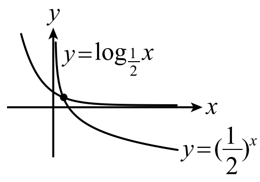
(B)有 1 個交點



(C)有 2 個交點



(D) $\log_2\dfrac{1}{x}=-\log_2 x=\log_{\frac12}x$



12. $d(I)=10\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\times\log 10^8=10\times 8=80$ 分貝

第 5 回

1.(C) 2. $(-\dfrac{4}{7},-\dfrac{23}{7})$ 3.(1) $(\dfrac{12}{25},\dfrac{3}{25})$ (2) $(\dfrac{2}{5},\dfrac{12}{25},\dfrac{3}{25})$

4.(C)(E) 5.(1) 12 (2) 20 (3) 104 6.(1) 135 (2) $\dfrac{1}{2}$

7.(A)(C)(E) 8. 25 9. $n<\ell<m$ 10.(1) 1 (2) $\sqrt{109}$

11.(A)(B)(C)(E) 12. -37

9 1. 設正六邊形邊長為 1 (A) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$

(B) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$

(C) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{AO}|=1$

(D) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{EB}|=2$ (E) $|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{EC}|=\sqrt{3}$

2. $\overrightarrow{OP}=(-5,2)$，$\overrightarrow{AB}=(3,8)$，$\overrightarrow{EF}=(1,-2)$

$(-5,2)=x(3,8)+y(1,-2)$

$=(3x,8x)+(y,-2y)=(3x+y,8x-2y)$

解 $\begin{cases}3x+y=-5\\8x-2y=2\end{cases}$，得 $x=-\dfrac{4}{7}$，$y=-\dfrac{23}{7}$

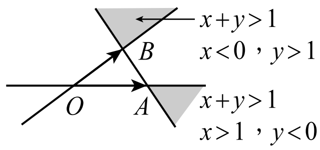
3. (1) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}(\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC})=\dfrac{12}{25}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{25}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+(\dfrac{12}{25}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{25}\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{12}{25}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\dfrac{3}{25}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{12}{25}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{25}\overrightarrow{OC}$

4. 令 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$



(A) $x=2>1$，$y=1>0$

(B) $x=1$，$y=-1<0$

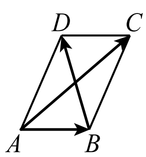
$x+y=0$

(C) $x=3>1$，$y=-1<0$，$x+y=2>1$

(D) $x=\dfrac{1}{2}<1$，$y=\dfrac{1}{3}>0$

(E) $x=\dfrac{-1}{2}<0$，$y=101>1$，$x+y=\dfrac{201}{2}>1$

5. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$



(1) $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=|2\overrightarrow{AD}|=12$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=20$

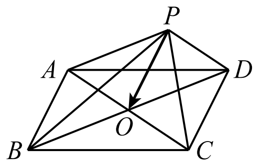
(3) $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=2(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2)=2\times(16+36)=104$

6. (1) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-10}{\sqrt{20}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=135^\circ$

(2) $\vec{a}+t\vec{b}=(-4,-2)+(3t,-t)=(-4+3t,-2-t)$

$(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{-4+3t}{1}=\dfrac{-2-t}{1}\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{1}{2}$

10 7. (A) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$



$\therefore\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(B)(C) O 為 $\overline{AC}$ 中點

故 $\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$

即 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$

O 為 $\overline{BD}$ 中點，故 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$

(D)(E) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PO}=4\overrightarrow{PO}$

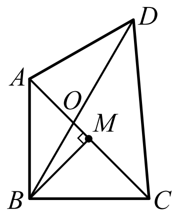
8. 設 $\angle CAB=\alpha$，$\angle CAD=\beta$

所求 $=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\alpha+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\beta$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2=4^2+3^2=25$

9. 取 $\overline{AC}$ 中點 M



$\because$ 等腰直角 ΔABC 的中線必垂直底邊　$\therefore\ \overline{BM}\perp\overline{AC}$

$\Rightarrow\quad\angle BOC$ 是銳角

$\Rightarrow\quad\angle AOB=\angle COD>90^\circ$

$m=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}>0$，$\ell=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

$n=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}<0$，由圖知 $|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|>|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$

$\therefore\ |\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cos\angle COD<|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$

$\Rightarrow\quad\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}<\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\quad\Rightarrow\quad n<\ell$，故 $n<\ell<m$

10. (1) $\vec{a}+2\vec{b}=-3\vec{c}\qquad\therefore\ |\vec{a}+2\vec{b}|=|-3\vec{c}|=6$

$36=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

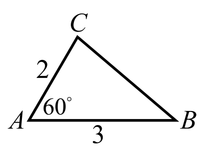
$=28+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\quad\Rightarrow\quad 4\vec{a}\cdot\vec{b}=4\quad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

(2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})}$

$=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{112-12+9}=\sqrt{109}$

11. (A) $x+y=1$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\quad\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=x(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$



$\therefore\ \overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CB}$，表直線 BC

(B) $x+y=1$，$y=1-x\geq 0$

$\Rightarrow\quad 1-x\geq 0$，$x\leq 1$

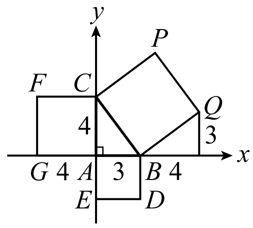
$\therefore\ 0\leq x\leq 1$，$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CB}$，表線段 BC

(C) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}=y\overrightarrow{AC}$，表平行 $\overline{AC}$ 的直線

(D) $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\times\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，不合

(E) $\overline{BC}=\sqrt{2^2+3^2-2\times 2\times 3\cos 60^\circ}=\sqrt{4+9-6}=\sqrt{7}$，合

12. 建立坐標，以 A 為坐標原點



$\overline{AB}$ 在 x 軸上，$\overline{AC}$ 在 y 軸上

則 $B(3,0)$、$C(0,4)$

$Q(7,3)$、$F(-4,4)$

$\overrightarrow{AQ}=(7,3)$，$\overrightarrow{BF}=(-7,4)$

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BF}=-49+12=-37$

第 6 回

1.(A)(B)(C)(D)　2.(1) -12　(2) $(-2,-1)$　3. 9　4. 5；1

5. $\dfrac{16}{5}$　6. 45 或 135　7. $x+2y=2$ 或 $11x-2y=-2$

8. -7　9. $(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5},16)$　10. 2　11.(1) $\vec{0}$　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) $-\dfrac{7}{8}$

12.(1) $(2,-4)$　(2) $(2,-4)$；$(2,1)$

11 1. (B) $(7,a)$ 代入 L 得 $14+a=5\quad\Rightarrow\quad a=-9$

(C) $\vec{n}=(2,1)$，$\vec{v}=(-b,4)$，$\vec{n}\cdot\vec{v}=-2b+4=0\quad\therefore\ b=2$

(D) $\because\ \vec{w}\,/\!/\,(-2,4)$

(E) $\overrightarrow{PQ}=(-2,-2)$ 和 L 的法向量 $\vec{n}=(2,1)$ 不平行

2. (1) $\overrightarrow{AC}=(2,2)$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 135^\circ=6\times 2\sqrt{2}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-12$

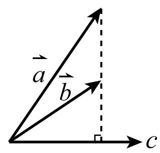
(2) 設投影點 $B'(p,q)$

$\overrightarrow{AB'}=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}=\dfrac{-12}{8}(2,2)=(-3,-3)$

則 $(p-1,q-2)=(-3,-3)$

$\Rightarrow\quad p=-2$，$q=-1$，$B'(-2,-1)$

3. $(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2})\vec{c}=(\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2})\vec{c}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$



$\Rightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow\quad(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow\quad(-4,6)\cdot(k,6)=0\quad\Rightarrow\quad k=9$

4. $\vec{p}\cdot\vec{q}=ax+by=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta=2\cos\theta$

$\because\ -2\leq 2\cos\theta\leq 2\quad\Rightarrow\quad -2\leq ax+by\leq 2$

$\Rightarrow\quad 1\leq ax+by+3\leq 5$

5. $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$

設直線 AB 的參數式 $\begin{cases}x=14-4t\\y=-8+3t\end{cases}$，$t\in R$

直線上動點 $P(14-4t,-8+3t)$

$\overline{PQ}\leq 5\quad\Rightarrow\quad(13-4t)^2+(-6+3t)^2\leq 25$

$\Rightarrow\quad 25t^2-140t+180\leq 0\quad\Rightarrow\quad 5t^2-28t+36\leq 0$

$\Rightarrow\quad(t-2)(5t-18)\leq 0\quad\Rightarrow\quad 2\leq t\leq\dfrac{18}{5}$

即地點 Q 在 $t=2$ 時進入暴風圈，在 $t=\dfrac{18}{5}$ 時脫離暴風圈，共經歷 $(\dfrac{18}{5}-2)\times 2=\dfrac{16}{5}$ 小時