目次

第一章 空間向量

1-1 空間概念 2
課後練習本第 1 ～ 3 回

1-2 空間向量的坐標表示法與內積 23
第 4 ～ 7 回

1-3 外積、體積與行列式 46
第 8 ～ 10 回

第二章 空間中的平面與直線

2-1 平面方程式 66
第 11 ～ 12 回

2-2 空間中的直線方程式 78
第 13 ～ 15 回

第三章 條件機率與貝氏定理

3-1 條件機率與貝氏定理 101
第 16 ～ 19 回

第四章 矩 陣

4-1 三元一次方程組與矩陣 129
第 20 ～ 22 回

4-2 矩陣的運算 146
第 23 ～ 26 回

4-3 矩陣的應用 169
第 27 ～ 30 回

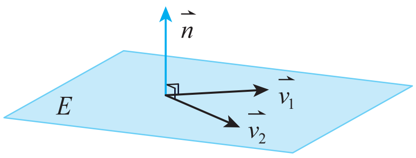
2 空間中的平面與直線

2-1 平面方程式

重點整理

• 平面方程式

1. 在坐標空間中，與平面 E 垂直的直線 L，稱為平面 E 的法線。直線 L 的方向向量 $\vec{n}$ 與平面 E 上任意非零向量垂直，則稱 $\vec{n}$ 為平面 E 的法向量，也稱 $\vec{n}$ 垂直平面 E，記為 $\vec{n}\perp E$。



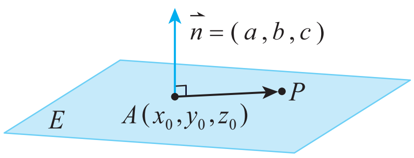
⑴ 一個平面的法向量不是唯一，但彼此都互相平行。

⑵ 空間中的平面沒有斜率，也沒有方向向量，一般是以法向量描述平面的傾斜方向。

⑶ 若非零向量 $\vec{v_1}$ 和 $\vec{v_2}$ 皆在平面 E 上，則 $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ 是平面 E 的一個法向量，$(\vec{v_1}\times\vec{v_2})/\!/\vec{n}$。

2. 若 $A(x_0,y_0,z_0)$ 為平面 E 上一點，且 $\vec{n}=(a,b,c)$ 為平面 E 的法向量，則平面 E 的方程式為 $ax+by+cz+d=0$，其中 $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$。

說明 設 $P(x,y,z)$ 為 E 上一點，則由 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$



$\Rightarrow\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$

得 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow\ ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$

令 $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

因為 E 上任意點 $P(x,y,z)$ 都滿足方程式 $ax+by+cz+d=0$

反之，滿足 $ax+by+cz+d=0$ 的任意點 $P(x,y,z)$ 也都會在 E 上

所以 $ax+by+cz+d=0$ 即平面 E 的方程式。

例 已知 $\vec{n}=(1,2,3)$ 是平面 E 的一個法向量，且 E 通過點 $A(1,1,1)$，可設 $P(x,y,z)$ 為 E 上一點，則 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-1,z-1)$，由 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$

$\Rightarrow\ \underline{\qquad}\cdot(x-1)+\underline{\qquad}\cdot(y-1)+\underline{\qquad}\cdot(z-1)=0$

$\Rightarrow\ x+2y+3z-6=0$，所以平面 E 的方程式為 $\underline{\qquad\qquad\qquad}$。

也可以直接將法向量 $\vec{n}=(1,2,3)$ 寫成 x、y、z 的係數，

設 E：$\underline{\qquad}\cdot x+\underline{\qquad}\cdot y+\underline{\qquad}\cdot z=k$，將平面上點 $A(1,1,1)$ 代入，得 $k=\underline{\qquad}$，

故平面 E 的方程式為 $\underline{\qquad\qquad\qquad}$。

3. 若平面 E：$ax+by+cz+d=0$，則 E 有一個法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$。

說明 在平面 E 上取任意兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$，則 $\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 \cdots① \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \cdots② \end{cases}$

②－①得 $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0$，此式即為 $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$，故 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 為平面 E 的一個法向量。

4. 截距式：若平面 E 與 x 軸、y 軸、z 軸分別交於 $A(a,0,0)$、$B(0,b,0)$、$C(0,0,c)$，且 $abc\neq 0$，則平面 E 的方程式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$。

範例 平面方程式

1. 在坐標空間中，直線 L 垂直平面 E，且與 E 交於點 $A(1,2,-8)$，若點 $P(6,5,2)$ 在直線 L 上，則平面 E 的方程式為________________。

2. 在坐標空間中，通過 $A(1,-1,3)$、$B(3,-4,1)$、$C(2,0,1)$ 三點的平面方程式為______________。

3. 關於平面方程式與法向量的敘述，試選出正確的選項。______
(A)向量 $(1,0,1)$ 是平面 $x+z=0$ 的法向量
(B)向量 $(1,1,1)$ 是平面 $x+y+z=0$ 和平面 $2x+2y+2z=1$ 的法向量
(C)向量 $(0,1,1)$ 是 yz 平面的法向量
(D) xy 平面的方程式為 $x=0$
(E)在坐標空間中，$x=y$ 的圖形為一條直線

在坐標平面中，$x=0$ 的圖形是什麼？$x=y$ 的圖形是什麼？
在坐標空間中，$x=0$ 的圖形是什麼？$x=y$ 的圖形是什麼？

類題 ∷

1 在坐標空間中，平面 E：$ax+by-3z=k$ 有一法向量 $\vec{n}=(2,3,4)$，且點 $A(1,2,3)$ 在 E 上，則序列 $(a,b,k)=$ ____________ 。

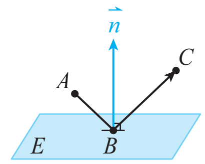
2 在坐標空間中，點 $A(3,-2,7)$ 和 $B(1,1,2)$ 在平面 E 上，且 $\vec{n}=(2,k,1)$ 為 E 的法向量，則平面 E 的方程式為 ____________ 。

3 在坐標空間中，點 $A(2,3,-1)$ 在平面 E 的投影點為 $B(5,-2,4)$，則平面 E 的方程式為 ____________ 。

4 坐標空間中有兩點 $A(1,-1,-2)$、$B(5,3,1)$，試求 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式為 ____________ 。

5 在坐標空間中，有一質點從 $A(3,4,6)$ 的位置進行直線運動，當碰到平面 E 上的 $B(1,2,5)$ 後，遵循反射定律反射通過 $C(7,-1,-1)$，則平面 E 的方程式為 ____________ 。

$\angle ABC$ 的平分線 $\perp$ 平面 E



6 在坐標空間中，包含 x 軸和點 $A(5,-4,3)$ 的平面方程式為 ____________ 。

x 軸上取兩點形成的向量，即為 x 軸的方向向量

定期綜合測驗

單選題

_______ 1. 已知 $\vec{n}=(3,5,4)$ 為平面 E：$2x+by+cz=5$ 的法向量，則下列哪一個點落在 E 上？

(A) $(1,\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ (B) $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ (C) $(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2})$ (D) $(\frac{1}{2},1,\frac{1}{4})$ (E) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1)$

_______ 2. 已知平面 E_1：$3x+4y+5z=1$ 和平面 E_2：$2x+by+cz=1$ 互相平行，則 E_1 和 E_2 的距離為何？

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{20}$

_______ 3. 下列選項中，哪一個平面與 yz 平面所夾的銳角最大？

(A) $2x+y+z=2$ (B) $x+2y+z=2$ (C) $x-2y-2z=1$
(D) $x-y-z=2$ (E) $x-y=2$

多選題

_______ 4. 在坐標空間中，平面 E：$ax+by+cz+1=0$ 通過點 $A(1,0,-2)$，且平面 E 與兩平面 E_1：$x+y-4z=5$ 和 E_2：$4x-3y+5z=2$ 都垂直。試選出正確的選項。

(A) $a-2c+1=0$ (B) $a+b=4c$ (C) $a:b:c=1:3:1$
(D) $a=-1$ (E)平面 E 的 x 截距為 1

_______ 5. 在坐標空間中，有一動點從 $A(1,2,3)$ 的位置進行等速直線運動，經過 3 秒後到達平面 E：$ax+by+cz=0$ 上的 C 點，再經過 2 秒後到達點 $B(5,5,3)$，設 $\vec{n}=(a,b,c)$，試選出正確的選項。

(A) $\overline{AC}=3$

(B) B 點到平面 E 的距離為 $\dfrac{|\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

(C) C 點坐標為 $(\frac{13}{5},\frac{16}{5},3)$

(D) A 點和 B 點到平面 E 的距離比為 $3:2$

(E) $\dfrac{a+2b+3c}{5a+5b+3c}=\dfrac{3}{2}$

∷ 填充題

6. 在坐標空間中通過 $A(3,-2,2)$、$B(1,2,-2)$、$C(0,-1,1)$ 三點的平面方程式為 ______。

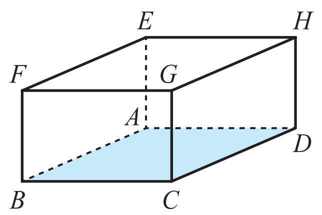
7. 在坐標空間中有兩點 $A(1,-2,8)$、$B(4,7,-4)$，已知直線 AB 垂直平面 E，且 A 點與平面 E 的距離為 $\sqrt{26}$，則平面 E 的方程式為 ______。

8. 在坐標空間中，有一質點從 $A(2,1,1)$ 的位置進行直線運動，碰到平面 E 上的 $B(3,1,2)$ 後，遵循反射定律反射通過 $C(6,4,2)$，則平面 E 的方程式為 ______。

9. 設平面 E_1：$x+y+kz=1$ 和平面 E_2：$x-y+kz=2$ 有一個夾角為 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$，則 $k=$ ______。

∷ 混合題

10. 在坐標空間中有一長方體 $ABCD-EFGH$，如右圖所示，其中點 $A(0,0,0)$、$B(8,0,0)$、$E(0,0,4)$，且 D 點在 y 軸上，G 點在第一卦限，$\overline{AC}=10$，試問：



(1) $\overline{AG}$ 長為何？______

(A) 12　(B) 14　(C) $\sqrt{104}$　(D) $\sqrt{116}$　(E) $4\sqrt{10}$

(2) 平面 CFH 的方程式為 ______。

(3) 平面 CFH 和平面 BDE 的距離為 ______。

∷ 歷屆試題

11. 坐標空間中，設 P、Q 為平面 $3x-2y-2z=1$ 上兩點且滿足 $\overline{PQ}=7$。另取空間中兩點 P'、Q' 滿足向量 $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{QQ'}=(-3,4,6)$。當向量 $\overrightarrow{PQ}=\pm$ ______ 時，會使得平行四邊形 $PQQ'P'$ 面積最大。

25% 答對率 104 年指考甲

12. 坐標空間中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\vec{a}=(1,2,2)$ 等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x-y+3z=28$ 上，立即轉向沿著方向 $\vec{b}=(-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x=2$ 上？______

52% 答對率 105 年學測

(A) 1 秒　(B) 2 秒　(C) 3 秒　(D) 4 秒　(E)永遠不會到達

13. 坐標空間中有一平面 P 過 $(0,0,0)$、$(1,2,3)$ 及 $(-1,2,3)$ 三點。試選出正確的選項。

______

(A)向量 $(0,3,2)$ 與平面 P 垂直　(B)平面 P 與 xy 平面垂直
(C)點 $(0,4,6)$ 在平面 P 上　(D)平面 P 包含 x 軸
(E)點 $(1,1,1)$ 到平面 P 的距離是 1

39% 全對率 108 年學測

14. 坐標空間中，令 E 為通過三點 $A(0,-1,-1)$、$B(1,-1,-2)$、$C(0,1,0)$ 的平面。假設 H 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$。根據上述，試回答下列問題。

(1) 試求四面體 $ABCH$ 的體積。（註：四面體體積為三分之一的底面積乘以高）______

(2) 令點 H' 為點 H 相對於平面 E 的對稱點，試求 H' 的坐標。______

(3) 試判斷點 H' 在平面 E 的投影點是否位在 ΔABC 的內部？並說明理由。（註：三角形的內部不含三角形的三邊）______

110 年指考甲

15. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1,2,1)$、$(-4,1,3)$、$(2,0,-3)$，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為 ______ 。

5% 答對率 111 年學測 A

16. 已知坐標空間中 P、Q、R 為平面 $2x-3y+5z=\sqrt{7}$ 上不共線三點。令 $\overrightarrow{PQ}=(a_1,b_1,c_1)$，$\overrightarrow{PR}=(a_2,b_2,c_2)$。試選出下列行列式中**絕對值**為最大的選項。______

6% 答對率 112 年學測 A

(A) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(E) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

17. 令 $E：x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2,-1,0)$、$B(0,1,2)$、$C(-2,1,4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A、B、C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為 ______ 。（化為最簡根式）

6% 答對率 112 年學測 A

18. 坐標空間中有方向向量為 $(1,-2,2)$ 的直線 L、平面 $E_1：2x+3y+6z=10$ 與平面 $E_2：2x+3y+6z=-4$。則 L 被 E_1、E_2 所截線段的長度為 ______ 。（化為最簡分數）

6% 答對率 112 年分科甲

2 空間中的平面與直線

2-1 平面方程式

66 • **平面方程式**

1. 1；2；3；$x+2y+3z-6=0$；

1；2；3；6；$x+2y+3z=6$

67 **範例** *1.* $5x+3y+10z=-69$ *2.* $8x+2y+5z=21$

3. (A)(B)

1. $\overrightarrow{AP}=(5,3,10)$ 為平面 E 的法向量

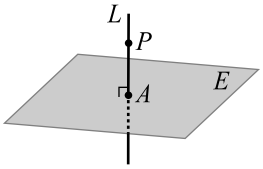
可設 E：$5x+3y+10z=k$

將平面上點 $A(1,2,-8)$ 代入

得 $k=5+6+(-80)=-69$

所以平面 E 的方程式為

$5x+3y+10z=-69$



2. $\overrightarrow{AB}=(2,-3,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)$

則 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,2,5)$

為平面 ABC 的法向量

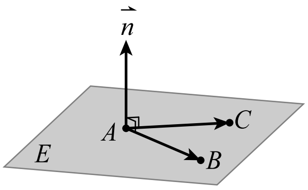
可設平面 ABC 的方程式為

$8x+2y+5z=k$

將平面上點 $A(1,-1,3)$ 代入

得 $k=8+(-2)+15=21$

所以平面 ABC 的方程式為 $8x+2y+5z=21$



3. (A)平面 $x+z=0$ 中，x、y、z 的係數為 1、0、1

所以向量 $(1,0,1)$ 是平面 $x+z=0$ 的法向量

(B)平面 $x+y+z=0$ 的法向量為 $(1,1,1)$

平面 $2x+2y+2z=1$ 的法向量為 $(2,2,2)$

$(2,2,2)/\!/(1,1,1)$

故向量 $(1,1,1)$ 是平面 $x+y+z=0$ 和平面 $2x+2y+2z=1$ 的法向量

(C) x 軸為 yz 平面的法線

在 x 軸上取原點 $O(0,0,0)$ 和 $P(1,0,0)$

則 $\overrightarrow{OP}=(1,0,0)$ 為 yz 平面的法向量

(D) xy 平面的法向量為 $(0,0,1)$，且通過原點 $O(0,0,0)$，故 xy 平面的方程式為 $z=0$

(E) $x=y \Leftrightarrow x-y=0$ 是法向量 $(1,-1,0)$ 且通過原點 $O(0,0,0)$ 的平面

68 **類題** **1** $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{9}{4},-15\right)$ **2** $2x+3y+z=7$

3 $3x-5y+5z=45$ **4** $8x+8y+6z=29$

5 $4x+y-z=1$ **6** $3y+4z=0$

7 (1) $x=0$ (2) $z=3$ (3) $6x+3y+4z=24$

8 $-2x+4y+z=3$

1 由平面 E 的法向量 $\vec{n}=(2,3,4)$ 可知

方程式的係數 $a:b:-3=2:3:4$

所以 $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{9}{4}$

將平面上點 $A(1,2,3)$ 代入 E：$-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{4}y-3z=k$

得 $k=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}-9=-15$

2 $\overrightarrow{AB}=(-2,3,-5)$，$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$

$\Rightarrow (-2)\times 2+3\times k+(-5)\times 1=3k-9=0$

$\Rightarrow k=3$，設 E：$2x+3y+z=r$

將平面上點 $A(3,-2,7)$ 代入

得 $r=6+(-6)+7=7$

故 E：$2x+3y+z=7$

3 $\overrightarrow{AB}=(3,-5,5)$ 垂直平面 E

所以 $\overrightarrow{AB}$ 為平面 E 的法向量

設 E：$3x-5y+5z=k$

將平面上點 $B(5,-2,4)$ 代入

得 $k=15-(-10)+20=45$

故平面 E 的方程式為 $3x-5y+5z=45$

4 設 $\overline{AB}$ 的垂直平分面為 E

則 $\overline{AB}$ 的中點 $C(3,1,-\dfrac{1}{2})$ 在平面 E 上

且 $\overrightarrow{AB}=(4,4,3)$ 垂直平面 E

可設 E：$4x+4y+3z=k$

將平面上點 $C(3,1,-\dfrac{1}{2})$ 代入

得 $k=12+4+(-\dfrac{3}{2})=\dfrac{29}{2}$

故 E：$4x+4y+3z=\dfrac{29}{2} \Leftrightarrow 8x+8y+6z=29$

5 由反射定律知，平面 E 的法向量平分 $\angle ABC$

$\overrightarrow{BA}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(6,-3,-6)$

$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}=9$

所以 $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(6,6,3)+(6,-3,-6)$

$=(12,3,-3)=3(4,1,-1)$ 平分 $\angle ABC$

即 $\vec{n}=(4,1,-1)$ 為平面 E 的法向量

可設 E：$4x+y-z=k$

將平面上點 $B(1,2,5)$ 代入

得 $k=4+2-5=1$

故 E：$4x+y-z=1$

6 點 $O(0,0,0)$ 和 $B(1,0,0)$ 均在 x 軸及所求平面上

x 軸的方向向量為 $\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(0,3,4)$ 為所求平面的法向量

可設平面方程式為 $3y+4z=k$

將平面上點 $O(0,0,0)$ 代入

得 $k=0+0=0$

故平面方程式為 $3y+4z=0$

20 平面 E 上的任意一點 $P(x,y,z)$ 到 E_1 和 E_2 的距離相等，所以由 $d(P,E_1)=d(P,E_2)$ 可得

$$\frac{|3x+2y+z|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{|6x+2y-4z-1|}{\sqrt{6^2+2^2+(-4)^2}}$$

$\Rightarrow\ \dfrac{3x+2y+z}{\sqrt{14}}=\pm\dfrac{6x+2y-4z-1}{2\sqrt{14}}$

$\Rightarrow\ 2(3x+2y+z)\pm(6x+2y-4z-1)=0$

即 P 點滿足 $12x+6y-2z=1$ 或 $2y+6z=-1$

故平面 E 的方程式為

$12x+6y-2z=1$ 或 $2y+6z=-1$

定期綜合測驗

1. (D)	2. (E)	3. (C)
4. (A)(B)(C)	5. (A)(B)(D)	6. $y+z=0$
7. $x+3y-4z=-11$ 或 $x+3y-4z=-63$		
8. $y-z=-1$	9. ±1	
10.(1)(D)	(2) $3x+4y+6z=48$	(3) $\dfrac{24\sqrt{61}}{61}$
11. $(2,6,-3)$	12.(B)	13.(C)(D)
14.(1) $\dfrac{9}{2}$ (2) $(-\dfrac{16}{3},\dfrac{4}{3},-8)$ (3)否		15. 21
16.(B)	17. $2\sqrt{2}$	18. $\dfrac{21}{4}$

75 1. 平面 E 的法向量 $\vec{n}=(3,5,4)$

所以係數比 $2:b:c=3:5:4\ \Rightarrow\ b=\dfrac{10}{3}$，$c=\dfrac{8}{3}$

$E:2x+\dfrac{10}{3}y+\dfrac{8}{3}z=5\ \Leftrightarrow\ 6x+10y+8z=15$

將選項中各點代入，只有(D)的 $(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{4})$ 在 E 上

2. 因為 E_1 和 E_2 平行，所以係數比 $3:4:5=2:b:c$

可將平面 E_2 乘上 $\dfrac{3}{2}$

得 $\dfrac{3}{2}(2x+by+cz)=\dfrac{3}{2}\times1\ \Leftrightarrow\ 3x+4y+5z=\dfrac{3}{2}$

$$d(E_1,E_2)=\frac{\left|\frac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{20}$$

3. yz 平面的法向量為 $\vec{n}=(1,0,0)$

假設 yz 平面與選項中的平面夾的銳角分別為 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5$

由 $\cos\theta_k=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n_k}|}{|\vec{n}||\vec{n_k}|}$ 得

(A) $\cos\theta_1=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$，(B) $\cos\theta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，(C) $\cos\theta_3=\dfrac{1}{3}$

(D) $\cos\theta_4=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，(E) $\cos\theta_5=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

其中(C) $\cos\theta_3$ 最小，所以 θ_3 最大

4. (A)因為點 $A(1,0,-2)$ 在平面 E 上

將 $(1,0,-2)$ 代入 $E:ax+by+cz+1=0$

得 $a-2c+1=0$

(B)平面 $E_1\perp E$，所以法向量 $(1,1,-4)\cdot(a,b,c)=0$

$\Rightarrow\ a+b-4c=0\ \Leftrightarrow\ a+b=4c$

(C)平面 E 的法向量 (a,b,c) 與 $(1,1,-4)\times(4,-3,5)$ $=(-7,-21,-7)=-7(1,3,1)$ 平行

所以 $a:b:c=1:3:1$

(D)設 $a=t$，$b=3t$，$c=t$

則平面 $E:tx+3ty+tz+1=0$

將點 $A(1,0,-2)$ 代入得 $-t+1=0\ \Rightarrow\ t=1$

所以 $a=1$，$b=3$，$c=1$，$E:x+3y+z+1=0$

(E) $E:x+3y+z+1=0$，將 $y=z=0$ 代入

得 $x=-1$，所以平面 E 的 x 截距為 -1

5. (A) $\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2+(3-3)^2}=5$，又等速運動時，距離比等於時間比，所以 $\overline{AC}=\dfrac{3}{5}\overline{AB}=3$

(B) B 點到平面 E 的距離等於 $\overrightarrow{CB}$ 在法向量 $\vec{n}$ 上的正射影長 $\dfrac{|\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

(C) $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$，由分點公式可知

$C(\dfrac{2\times1+3\times5}{5},\dfrac{2\times2+3\times5}{5},\dfrac{2\times3+3\times3}{5})=(\dfrac{17}{5},\dfrac{19}{5},3)$

(D)設 A 點和 B 點在平面 E 的投影點分別為 A' 和 B'

則由相似形 $\Delta AA'C$ 和 $\Delta BB'C$ 的對應邊成比例可得

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AA'}:\overline{BB'}=d(A,E):d(B,E)=3:2$

(E)由 $d(A,E):d(B,E)=3:2$ 可得

$$\frac{d(A,E)}{d(B,E)}=\frac{\frac{|a+2b+3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\frac{|5a+5b+3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}=\left|\frac{a+2b+3c}{5a+5b+3c}\right|=\frac{3}{2}$$

但因為 A、B 兩點在平面 E 的不同側，所以 A、B 兩點代入 E 的方程式後會異號

故 $\dfrac{a+2b+3c}{5a+5b+3c}=-\dfrac{3}{2}$

76 6. $\overrightarrow{AB}=(-2,4,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,1,-1)$

則 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,10,10)=10(0,1,1)$ 為平面 ABC 的法向量，可設平面 ABC 的方程式為 $y+z=k$

將平面上點 $A(3,-2,2)$ 代入，得 $k=-2+2=0$

所以平面 ABC 的方程式為 $y+z=0$

7. 平面 E 的法向量 $\overrightarrow{AB}=(3,9,-12)=3(1,3,-4)$

可設 $E:x+3y-4z=k$

$$d(A,E)=\frac{|1+3\times(-2)-4\times8-k|}{\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}}=\sqrt{26}$$

$\Rightarrow\ |-37-k|=26$，得 $k=-11$ 或 -63

故平面 $E:x+3y-4z=-11$ 或 $x+3y-4z=-63$

8. 平面 E 的法向量平分 $\angle ABC$

$\overrightarrow{BA}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(3,3,0)$

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+3^2+0^2}=3\sqrt{2}$

所以 $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(-3,0,-3)+(3,3,0)=(0,3,-3)$

$=3(0,1,-1)$ 平分 $\angle ABC$

即 $\vec{n}=(0,1,-1)$ 為平面 E 的法向量

可設 $E：y-z=k$，將平面上點 $B(3,1,2)$ 代入

得 $k=1-2=-1$，故 $E：y-z=-1$

9. $\overrightarrow{n_1}=(1,1,k)$ 為平面 E_1 的法向量

$\overrightarrow{n_2}=(1,-1,k)$ 為平面 E_2 的法向量，則

$$\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3})=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|1\times1+1\times(-1)+k\times k|}{\sqrt{1^2+1^2+k^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+k^2}}$$

$\Rightarrow\quad \frac{k^2}{k^2+2}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad k=\pm1$

10. (1) $\overline{AG}=\overline{CE}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AE}^2}=\sqrt{10^2+4^2}=\sqrt{116}$

(2) 因為 $B(8,0,0)$、$E(0,0,4)$，所以 $F(8,0,4)$

又 $\overline{BD}=\overline{AC}=10$，設 $D(0,b,0)$

則 $\overline{BD}=\sqrt{8^2+b^2}=10\quad\Rightarrow\quad b=\pm6$

又 G 在第一卦限，故 b 值取 6

所以 $C(8,6,0)$、$H(0,6,4)$

$\overrightarrow{CF}=(0,-6,4)$，$\overrightarrow{CH}=(-8,0,4)$

$\overrightarrow{CF}\times\overrightarrow{CH}=(-24,-32,-48)=-8(3,4,6)$

所以 $\vec{n}=(3,4,6)$ 為平面 CFH 的法向量

設平面 CFH 的方程式為 $3x+4y+6z=k$

將平面上點 $C(8,6,0)$ 代入

得 $k=24+24+0=48$

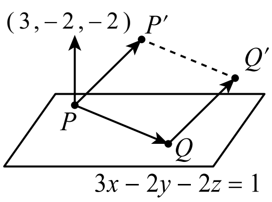
故平面 CFH 的方程式為 $3x+4y+6z=48$

(3) 平面 CFH 和平面 BDE 的距離等於 $B(8,0,0)$ 到平面 CFH 的距離，即

$$d(B,\text{平面 }CFH)=\frac{|3\times8+4\times0+6\times0-48|}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}}$$

$$=\frac{24}{\sqrt{61}}=\frac{24\sqrt{61}}{61}$$

11. 設平面 $3x-2y-2z=1$ 的法向量 $\vec{n}=(3,-2,-2)$



$|\overrightarrow{PP'}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+6^2}$

$=\sqrt{61}$

平行四邊形 $PQQ'P'$ 面積

$=|\overrightarrow{PP'}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|\cdot\sin\angle P'PQ$

$=7\sqrt{61}\cdot\sin\angle P'PQ$

當 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PP'}$ 時，平行四邊形 $PQQ'P'$ 的面積最大

又 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}\quad\therefore\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,(\overrightarrow{PP'}\times\vec{n})$

$$\begin{array}{cccccc} -3 & 4 & 6 & -3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -2 & -2 \end{array}$$

$\overrightarrow{PP'}\times\vec{n}=(4,12,-6)$

又 $|\overrightarrow{PP'}\times\vec{n}|=\sqrt{4^2+12^2+(-6)^2}=14$

$\therefore\overrightarrow{PQ}=\pm\frac{1}{2}(\overrightarrow{PP'}\times\vec{n})=\pm(2,6,-3)$

12. 設此質點前進 1 秒的距離為 $k|\vec{a}|$

則前 t 秒鐘的位置為 $(1,1,1)+t\cdot k(1,2,2)$

$t=5$ 時的位置為 $(5k+1,10k+1,10k+1)$

在 $x-y+3z=28$ 上，代入得

$(5k+1)-(10k+1)+3(10k+1)=28\quad\Rightarrow\quad k=1$

故此時質點位置為 $(6,11,11)$

$\because|\vec{a}|=|\vec{b}|$，故轉向後經過 t' 秒，質點位置在

$(6,11,11)+t'(-2,2,-1)$

$=(6-2t',11+2t',11-t')$

代入 $x=2$，得 $6-2t'=2\quad\Rightarrow\quad t'=2$

即再經過 2 秒此質點會到達 $x=2$ 上

77 13. (A) 令 $O(0,0,0)$、$A(1,2,3)$、$B(-1,2,3)$

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,2,3)\times(-1,2,3)$

$$=\left(\begin{vmatrix}2&3\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}\right)=(0,-6,4)$$

為平面 P 的法向量，向量 $(0,3,2)$ 與 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 不平行，故向量 $(0,3,2)$ 與平面 P 不垂直

(B) xy 平面的法向量 $(0,0,1)$ 與平面 P 的法向量 $(0,-6,4)$ 內積不為 0，故兩平面不垂直

(C) 平面 P 的法向量 $(0,-6,4)=-2(0,3,-2)$，且原點在平面 P 上，故平面 P 的方程式為 $3y-2z=0$

點 $(0,4,6)$ 代入成立，故點 $(0,4,6)$ 在平面 P 上

(D) x 軸上的點 $(t,0,0)$ 代入平面 P 的方程式均成立

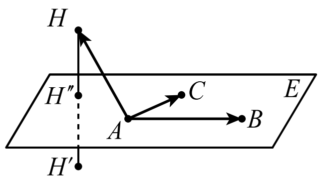
故 x 軸上的點都在平面 P 上

(E) $d((1,1,1),P)=\frac{|3\times1-2\times1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$

14. 設 H 在平面 E 的投影點為 H''

$\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$



$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)$

$\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$=\frac{2}{3}(1,0,-1)-\frac{1}{3}(0,2,1)+3(2,-1,2)$

$=(\frac{20}{3},-\frac{11}{3},5)$

(1) ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\frac{3}{2}$

四面體 $ABCH$ 以 ΔABC 為底的高為 $\overline{HH''}$

$\because\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 在平面 E 上，且 $3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$ 與 E 垂直

$\therefore\overrightarrow{H''H}=3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$|\overrightarrow{H''H}|=3|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=3\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=9$

四面體 $ABCH$ 體積 $=\frac{1}{3}\cdot\Delta ABC$ 面積 $\cdot\overline{HH''}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times9=\frac{9}{2}$

(2) ∵ $\overrightarrow{H''H'}=-\overrightarrow{H''H}=-3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

∴ $\overrightarrow{AH'}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HH'}=\overrightarrow{AH}-6(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$=(\frac{20}{3},-\frac{11}{3},5)-6(2,-1,2)=(-\frac{16}{3},\frac{7}{3},-7)$

∴ H' 坐標為 $(-\frac{16}{3},\frac{7}{3},-7)+(0,-1,-1)$

$=(-\frac{16}{3},\frac{4}{3},-8)$

(3) H' 在平面 E 的投影點為 H''，若 H'' 在 ΔABC 內

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH''}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$x>0$，$y>0$，$x+y<1$

但 $\overrightarrow{AH''}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HH''}=\overrightarrow{AH}-3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

即 $(x,y)=(\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$，故 H'' 不在 ΔABC 內

15. 設 $A(-1,2,1)$、$B(-4,1,3)$、$C(2,0,-3)$、$D(\cos\theta,\sin\theta,0)$

$\overrightarrow{AB}=(-3,-1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-2,-4)$

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 所張的平行四邊形面積為

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|(-3,-1,2)\times(3,-2,-4)\right|$

$=\left|(8,-6,9)\right|=\sqrt{181}$

設平面 ABC：$8x-6y+9z=k$

$A(-1,2,1)$ 代入，得 $k=-11$

故平面 ABC 為 $8x-6y+9z=-11$

$d(P,ABC)=\frac{|8\cos\theta-6\sin\theta+11|}{\sqrt{8^2+(-6)^2+9^2}}$

$=\frac{|8\cos\theta-6\sin\theta+11|}{\sqrt{181}}=\frac{|10\sin(\theta+\phi)+11|}{\sqrt{181}}\le\frac{21}{\sqrt{181}}$

所求體積

$=\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 所張的平行四邊形面積 $\times\, d(P,ABC)\le 21$

16. 設選項(A)(B)(C)(D)(E)的行列式中第一列的列向量分別為 $\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$、$\vec{v_3}$、$\vec{v_4}$、$\vec{v_5}$，則行列式的絕對值代表的意思為 $\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$、$\vec{v_3}$、$\vec{v_4}$、$\vec{v_5}$ 分別與 $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{PR}$ 所決定的平行六面體體積，將 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PR}$ 所決定的平行四邊形當成平行六面體的底面，則高分別為 $\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$、$\vec{v_3}$、$\vec{v_4}$、$\vec{v_5}$ 在平面 PQR 的法向量 $\vec{n}=(2,-3,5)$ 的正射影長，

又 $|\vec{v_1}|=|\vec{v_2}|=\cdots=|\vec{v_5}|$

所以只需要考慮 $\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$、$\vec{v_3}$、$\vec{v_4}$、$\vec{v_5}$ 和 $\vec{n}$ 內積的絕對值即可

(A) $|\vec{v_1}\cdot\vec{n}|=|(-1,1,1)\cdot(2,-3,5)|=|-2-3+5|=0$

(B) $|\vec{v_2}\cdot\vec{n}|=|(1,-1,1)\cdot(2,-3,5)|=|2+3+5|=10$

(C) $|\vec{v_3}\cdot\vec{n}|=|(1,1,-1)\cdot(2,-3,5)|=|2-3-5|=6$

(D) $|\vec{v_4}\cdot\vec{n}|=|(-1,-1,1)\cdot(2,-3,5)|=|-2+3+5|=6$

(E) $|\vec{v_5}\cdot\vec{n}|=|(-1,-1,-1)\cdot(2,-3,5)|=|-2+3-5|=4$

17. 設 $P(a,b,1)$ 在平面上的投影點為 Q

則 $\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$，$\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{QA}$、$\overline{QB}$、$\overline{QC}$

∴ ΔPQA、ΔPQB、ΔPQC 全等 $\Rightarrow$ $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2+1^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2+(1-2)^2}$

$=\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2+(1-4)^2}$

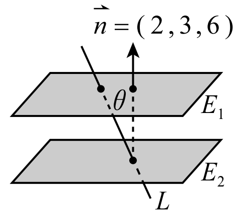
$\Rightarrow$ $\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-4a+2b+6=\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-2b+2$

$=\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+4a-2b+14$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}-4a+2b+6=-2b+2\\-2b+2=4a-2b+14\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=-3\\b=-4\end{cases}$

∴ $P(-3,-4,1)$，則 $d(P,E)=\frac{|-3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

18. $d(E_1,E_2)=\frac{|10-(-4)|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=2$



設 L 與 E_1 的法向量

$\vec{n}=(2,3,6)$ 的銳夾角為 θ

則 L 被 E_1、E_2 所截線段長為

$\frac{2}{\cos\theta}=\frac{2}{\frac{|(1,-2,2)\cdot(2,3,6)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+6^2}}}$

$=\frac{2}{\frac{|2-6+12|}{3\times 7}}=\frac{21}{4}$

2-2 空間中的直線方程式

78 範例 1. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\ (t\in R)\\z=3-3t\end{cases}$ 2. (B)(E) 3. 70

1. 因為此直線通過點 $A(1,2,3)$

且 $\overrightarrow{AB}=(1,2,-3)$ 為直線 L 的方向向量

所以直線參數式為 $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\ (t\in R)\\z=3-3t\end{cases}$

79 2. (A)將點 $(3,2,-1)$ 代入直線 L 的對稱比例式

$\frac{3-2}{3}\ne\frac{2-1}{2}\ne\frac{-1+1}{-1}$

故點 $(3,2,-1)$ 不在直線 L 上

(B)(C)由直線 L 的對稱比例式知

點 $(2,1,-1)$ 在直線 L 上

且直線 L 有一方向向量 $\vec{v}=(3,2,-1)$

(D)平面 $x+y+5z=0$ 的法向量為 $(1,1,5)$

與 L 的方向向量 $\vec{v}=(3,2,-1)$ 不平行

所以直線 L 不是平面 $x+y+5z=0$ 的法線

(E)由(B)知點 $(2,1,-1)$ 在直線 L 上，且向量

$(-3,-2,1)/\!/(3,2,-1)$ 也是直線 L 的方向向量

所以可將直線 L 的參數式寫成 $\begin{cases}x=2-3t\\y=1-2t\ (t\in R)\\z=-1+t\end{cases}$

核心思考

高中數學A 第4冊 課後練習本

第 1 回　1-1 立體圖形與展開圖、空間中兩直線的關係

第 2 回　1-1 直線與平面的關係

第 3 回　1-1 平面與平面的關係、三垂線定理

第 4 回　1-2 空間坐標系

第 5 回　1-2 空間向量的坐標表示法

第 6 回　1-2 分點公式與線性組合

第 7 回　1-2 空間向量的內積

第 8 回　1-3 外 積

第 9 回　1-3 平行六面體的體積與三階行列式

第10回　1-3 行列式與體積的應用

第11回　2-1 平面方程式

第12回　2-1 平面的夾角、點到平面的距離

第13回　2-2 直線方程式

第14回　2-2 空間中直線與平面的關係、兩直線的關係

第15回　2-2 空間中點到直線的距離、兩歪斜線的距離

第16回　3-1 條件機率

第17回　3-1 條件機率的乘法原理

第18回　3-1 獨立事件

第19回　3-1 貝氏定理

第20回　4-1 高斯消去法

第21回　4-1 高斯消去法的應用

第22回　4-1 恰有一組解、無限多組解與無解的條件

第23回　4-2 矩陣的定義與矩陣的加減法、係數積

第24回　4-2 矩陣的乘法 I

第25回　4-2 矩陣的乘法 II

第26回　4-2 乘法反方陣

第27回　4-3 轉移矩陣

第28回　4-3 平面上的線性變換

第29回　4-3 平面上特殊的線性變換

第30回　4-3 平面上特殊線性變換的應用

班級：____________　姓名：____________　座號：______

第 11 回　2-1 平面方程式

1. 在坐標空間中，平面 E：$ax+by+z=k$ 有一法向量 $\vec{n}=(1,-2,3)$，且點 $A(5,-2,-2)$ 在 E 上，則序列 $(a,b,k)=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

2. 坐標空間中有兩點 $A(1,2,3)$、$B(3,-4,1)$，試求 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式為 ＿＿＿＿＿＿ 。

3. 在坐標空間中，通過 $A(-2,4,7)$、$B(1,-1,3)$、$C(2,3,1)$ 三點的平面方程式為 ＿＿＿＿＿＿ 。

4. 在坐標空間中，包含 z 軸和點 $A(3,2,-4)$ 的平面方程式為＿＿＿＿＿＿。

5. 平面 E：$ax+by+cz+1=0$ 與 x 軸、y 軸、z 軸分別交於 $A(3,0,0)$、$B(0,-2,0)$、$C(0,0,6)$ 三點，則序列 $(a,b,c)=$＿＿＿＿＿＿。

第 12 回　2-1 平面的夾角、點到平面的距離

1. 設平面 E_1：$2x+3y-z=1$ 和平面 E_2：$x-3y+2z=2$ 所夾的銳角為 θ，則 $\cos\theta=$ ______。

2. 設平面 E_1：$4x+3y+kz=5$ 與平面 E_2：$2x-y+2z=1$ 有一個夾角為 45°，則 $k=$ ______。

3. 在坐標空間中，若點 $P(4,k,2)$ 到平面 E：$3x+2y-z-6=0$ 的距離為 $5\sqrt{14}$，則 $k=$ ______。

4. 在坐標空間中，已知 $A(1,2,3)$、$B(-2,2,0)$ 兩點在平面 $E：4x+3y+3z=2$ 的異側，若直線 AB 與平面 E 交於 P 點，則 $\overline{AB}：\overline{BP}=$ ＿＿＿＿＿＿。

5. 在坐標空間中，平面 $E_1：6x+3y-2z-7=0$ 和平面 $E_2：ax+by-4z+7=0$ 互相平行，則兩平面的距離為＿＿＿＿。

6. 在坐標空間中，E 為 $E_1：x-2y+z=4$ 和 $E_2：5x+5y-2z=3$ 的角平分面，則平面 E 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(E)設 $\vec{w}=\vec{c}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}$，則 $\vec{w}$ 為 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的公垂向量

所以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共平面

$\Rightarrow$ 由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所決定的平行六面體體積為 0

故 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

第 11 回

1. $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)$　2. $x-3y-z=3$
3. $26x+2y+17z=75$　4. $2x-3y=0$
5. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{2},-\frac{1}{6})$

21 1. 由平面 E 的法向量 $\vec{n}=(1,-2,3)$ 可知

方程式的係數 $a:b:1=1:-2:3$

所以 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{2}{3}$，將平面上點 $A(5,-2,-2)$ 代入

$E:\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+z=k$，得 $k=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}-2=1$

2. 設 $\overline{AB}$ 的垂直平分面為 E

則 $\overline{AB}$ 的中點 $C(2,-1,2)$ 在平面 E 上

且 $\overrightarrow{AB}=(2,-6,-2)=2(1,-3,-1)$ 垂直平面 E

即 $(1,-3,-1)$ 為 E 的法向量

可設 $E:x-3y-z=k$

將平面上點 $C(2,-1,2)$ 代入，得 $k=2+3-2=3$

故 $E:x-3y-z=3$

3. $\overrightarrow{AB}=(3,-5,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,-1,-6)$

則 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(26,2,17)$ 為平面 ABC 的法向量

可設平面 ABC 的方程式為 $26x+2y+17z=k$

將平面上點 $A(-2,4,7)$ 代入

得 $k=-52+8+119=75$

所以平面 ABC 的方程式為 $26x+2y+17z=75$

22 4. 點 $O(0,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 均在 z 軸及所求平面上

z 軸的方向向量為 $\overrightarrow{OB}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(2,-3,0)$ 為所求平面的法向量

可設平面方程式為 $2x-3y=k$

將平面上點 $O(0,0,0)$ 代入，得 $k=0-0=0$

故平面方程式為 $2x-3y=0$

5. 由截距式可直接寫出平面 ABC 的方程式為

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow -\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6}+1=0$

所以 $(a,b,c)=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2},-\frac{1}{6})$

第 12 回

1. $\frac{9}{14}$　2. 5 或 35　3. 33 或 -37　4. $17:4$
5. $\frac{3}{2}$　6. $8x-y+z=15$ 或 $2x+11y-5z=-9$

23 1. $\vec{n_1}=(2,3,-1)$ 為 E_1 的法向量

$\vec{n_2}=(1,-3,2)$ 為 E_2 的法向量，則

$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|2\times1+3\times(-3)+(-1)\times2|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\times\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}$

$=\frac{|2-9-2|}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{9}{14}$

2. $\vec{n_1}=(4,3,k)$ 為 E_1 的法向量

$\vec{n_2}=(2,-1,2)$ 為 E_2 的法向量

則 $\cos45^\circ=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|4\times2+3\times(-1)+k\times2|}{\sqrt{4^2+3^2+k^2}\times\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$

$\Rightarrow \frac{|5+2k|}{\sqrt{25+k^2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}|2k+5|=3\sqrt{25+k^2}$

$\Rightarrow 8k^2+40k+50=225+9k^2 \Rightarrow k^2-40k+175=0$

$\Rightarrow (k-5)(k-35)=0$，所以 $k=5$ 或 35

3. $d(P,E)=\frac{|3\times4+2\times k-1\times2-6|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|2k+4|}{\sqrt{14}}=5\sqrt{14}$

$\Rightarrow |2k+4|=70 \Rightarrow 2k+4=\pm70$

$\Rightarrow 2k=66$ 或 $-74 \Rightarrow k=33$ 或 -37

24 4. 設 A、B 兩點在平面 E 的投影點分別為 C、D，則由相似形可知 $\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{AC}:\overline{BD}=d(A,E):d(B,E)$

$=\frac{|4\times1+3\times2+3\times3-2|}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}:\frac{|4\times(-2)+3\times2+3\times0-2|}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}$

$=17:4$

5. 因為 $E_1 /\!/ E_2$

所以 $\frac{6}{a}=\frac{3}{b}=\frac{-2}{-4} \Rightarrow a=12$，$b=6$

得 $E_2:12x+6y-4z+7=0 \Leftrightarrow 6x+3y-2z+\frac{7}{2}=0$

因此 $d(E_1,E_2)=\frac{\left|-7-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{\frac{21}{2}}{7}=\frac{3}{2}$

6. 平面 E 上的任意一點 $P(x,y,z)$ 到 E_1 和 E_2 的距離相等，所以由 $d(P,E_1)=d(P,E_2)$ 可得

$\frac{|x-2y+z-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|5x+5y-2z-3|}{\sqrt{5^2+5^2+(-2)^2}}$

$\Rightarrow \frac{x-2y+z-4}{\sqrt{6}}=\pm\frac{5x+5y-2z-3}{3\sqrt{6}}$

$\Rightarrow 3(x-2y+z-4)=\pm(5x+5y-2z-3)$

即 P 點滿足 $8x-y+z=15$ 或 $2x+11y-5z=-9$

故平面 E 的方程式為

$8x-y+z=15$ 或 $2x+11y-5z=-9$

第 13 回

1. $(-4,10,3,8)$　2. $28\sqrt{2}$　3. $x-3y-z=-8$
4. $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{-3}$　5. $(3,1,4)$

25 1. $\overrightarrow{AB}=(1,3,2-a)$ 為直線 L 的方向向量

又由參數式可知，$\vec{v}=(1,c,6)$ 也是 L 的方向向量

所以 $\overrightarrow{AB} /\!/ \vec{v} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{3}{c}=\frac{2-a}{6}$

故 $a=-4$，$c=3$，所以 $\vec{v}=(1,3,6)$