目　次

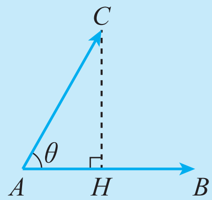
1-3 空間向量的內積

如同平面向量，空間向量也可以定義內積，其算法、性質和應用都與平面向量類似，所以這個單元學起來應該蠻輕鬆的。用內積可以幫助我們在空間中求長度及夾角，是非常重要的手法，在後續點、線、面的計算很常用到，一定要會！

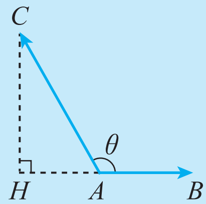
範例研習特區

1 內積的計算及其性質 112A

1. 內積定義：空間向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，規定兩向量的內積為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta$，其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。



2. 內積的投影算法：空間中 C 點投影到 $\overleftrightarrow{AB}$ 為 H，若 θ 為銳角則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$，若 θ 為鈍角需加負號為 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overline{AH}\times\overline{AB}$。如右圖。



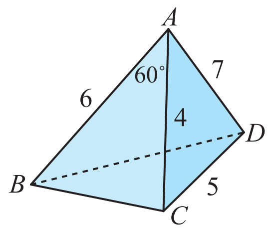
3. 內積的坐標算法：若 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，則由餘弦定理可證明 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。
4. 內積的性質：和平面向量相同，如下：
   (1)交換律：給空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。
   (2)結合律：k 與 t 為實數，則 $(k\vec{a})\cdot(t\vec{b})=(kt)\vec{a}\cdot\vec{b}$。
   (3)分配律：給空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，則 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$。

注意 若 $\vec{a}=\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{k}=\vec{b}\cdot\vec{k}$，即內積有等量公理。但反之不成立，也就是內積沒有消去律，即「$\vec{a}\cdot\vec{k}=\vec{b}\cdot\vec{k}$ $\not\Rightarrow$ $\vec{a}=\vec{b}$」。

這題常考

範例 1 空間向量計算內積 I ｜ 有定義算法、投影算法、坐標算法，都要熟練！

1. 空間中四面體 $ABCD$，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=4$，$\overline{AD}=7$，$\overline{CD}=5$，$\angle BAC=60^\circ$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$______。

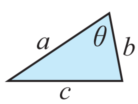


解

再想一想

1.餘弦定理：

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

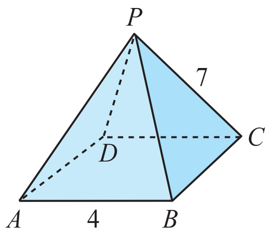


2.這一題能不能求 $\overline{BD}$ 和 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$？

答 ______

2. 正四角錐 $P-ABCD$ 的底面為正方形 $ABCD$，側面為四個全等的等腰三角形，如右圖，已知 $\overline{PA}=7$，$\overline{AB}=4$，求：

(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$_____　(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$______ 。



解

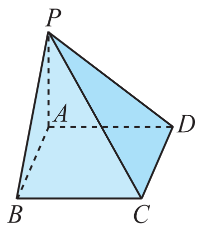
3. 空間向量 $\vec{a}=(1,5,-2)$，$\vec{b}=(6,3,7)$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____ 。

解

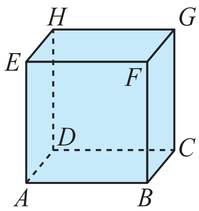
類題 1　三角錐 $A-BCD$，$\overline{AB}=\overline{AC}=2$，$\angle BAC=45^\circ$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________　(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$___________ 。

類題 2　四角錐 $P-ABCD$ 的底面為邊長 3 的正方形 $ABCD$，$\overline{PA}=4$ 且 $\overline{PA}$ 與底面垂直，求：(1) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$______　(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$______ 。



類題 3　正立方體 $ABCD-EFGH$ 的邊長為 a，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=16$，試求 $a=$_____ 。



類題 4　空間中三點 $A(5,7,3)$、$B(1,-1,2)$、$C(4,9,8)$，計算 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_______ 。

這題必考

範例 2　空間向量計算內積 II　坐標算法超好用！有些難題用坐標來分析就迎刃而解了。

1. 空間中三點 $A(6,1,2)$、$B(3,k,-1)$、$C(5,2,k)$，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$，求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$______ 。

解

類題 27 實數 x、y、z，若 $x+2y-2z=3$，則當 $(x,y,z)=$ ________ 時，$x^2+y^2+z^2$ 有最小值為____。

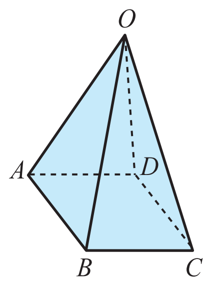
類題 28 實數 x、y、z，若 $2x+y+z=5$，求 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6$ 的最小值為____。

類題 29 設 x、y、z 均為實數，若 $x^2+y^2+z^2+4x-2y+10z-6=0$，求 $x+2y-z$ 的最大值為 ________，最小值為 ________。

類題 30 設 a、b、c 均為正實數，若 $a+b+c=2$，試求 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{9}{c}$ 的最小值為____，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值為____。

歷年大考精選

1. 如右圖 $O-ABCD$，為一金字塔，底是邊長為 1 之正方形，頂點 O 與 A、B、C、D 之距離均為 2。試問下列哪些式子是正確的？
____



(A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$　(B) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
(C) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$　(D) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$
(E) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$

2. 空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$、$ABEF$，其邊長皆為 4。已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=$____。

3. 空間中有一四面體 $ABCD$。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。________

(A) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(B)若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角
(C)若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角　(D)若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角
(E)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角

4. 空間中有相異四點 A、B、C、D，已知內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$。試選出正確的選項。________

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$　(B) $\overline{AC}=\overline{AD}$　(C) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 平行
(D) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　(E) A、B、C、D 四點在同一平面上

109 學測

5. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P、Q，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之期望值為下列哪一個選項？

(A) $\frac{4}{7}$　(B) $\frac{5}{7}$　(C) $\frac{6}{7}$　(D) 1　(E) $\frac{8}{7}$

112 學測 A

素養導向試題

雖然空間坐標只比平面多一根 z 軸，但在圖形的表現卻是複雜許多。讓我們把平面的內積問題做適度地延伸，讓同學動腦思考，察覺平面與立體的絕妙差異！請回答下列問題：

一、單選題

______ 1. 邊長 1 的正四面體有四個頂點，任選其中三個相異頂點 P、Q、R，則 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ 的值共有幾種不同的情形？

(A) 1 種　(B) 2 種　(C) 3 種　(D) 4 種　(E) 5 種

解

______ 2. 邊長 1 的金字塔，底面為正方形，四個側面為正三角形，共有 5 個頂點，任選其中三個相異頂點 P、Q、R，請問 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ 的值共有幾種不同的情形？

(A) 1 種　(B) 2 種　(C) 3 種　(D) 4 種　(E) 5 種

解

二、綜合題

3. 正立方體的邊長為 a，共有 8 個頂點，任選其中三個相異頂點 P、Q、R，試問：

(1) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ 共有幾種不同的值？請用 a 表示並逐一列出。________

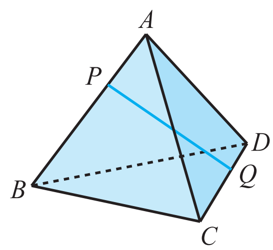
(2)若 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=18$，求邊長 a 之值。________

(3)選定一個頂點為 P，用抽籤的方式從其它七個頂點選出兩個做為 Q 與 R，若每個頂點被選的機會相等，求 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$ 的機率為何？________

解

資優挑戰園地

1. 如右圖，正四面體 $ABCD$ 的邊長為 3，P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}=1$，Q 在 $\overline{CD}$ 上且 $\overline{QD}=1$，則 $\overline{PQ}$ 的長度為 ________ 。



解

2. 已知 $O(0,0,0)$、$A(1,2,2)$、$B(-2,2,-1)$、$C(-2,-1,2)$ 為某一個正立方體的四個頂點，請問下列哪些選項中的點也是此正立方體的頂點？________

(A) $(-1,4,1)$ (B) $(4,1,-1)$ (C) $(-1,1,4)$ (D) $(-3,3,3)$

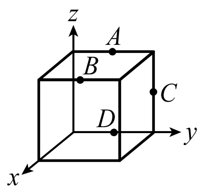
解

3. 空間坐標中，O 為原點，X、Y、Z 依次在 x 軸、y 軸、z 軸的正向上，求 $\angle XOY$ 與 $\angle YOZ$ 的角平分線之夾角為 ________ 。

解

$\therefore r$ 不可為 0，故選(B)

3. $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$



無法連成向量：$(\frac{1}{2},0,0)$、$(\frac{1}{2},0,1)$

$\therefore$ 選(A)(D)

4. 建立坐標使 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,1,1)$，兩動點坐標為 $P(1,t,0)$，$Q(0,1,t)$

則 $\overline{PQ}=\sqrt{1^2+(t-1)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}=\sqrt{2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 時，兩質點的距離會最小，選(D)

5. 設 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$ 且 x、y、z 均為正數，由 $\overrightarrow{OP}$ 與 $(1,0,0)$ 夾 45°

得 $\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot(1,0,0)}{|\overrightarrow{OP}|\times 1}=\dfrac{x}{1\times 1}=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

則 $P(\frac{\sqrt{2}}{2},y,z)$ 到 y 軸的距離為 $\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+z^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}+z^2=\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad z^2=\frac{1}{6}$，得 $z=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，選(D)

素養導向試題

1. ①若 P 在平面 ABC 上

則有唯一的實數 t、k 使 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$

分解為 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

得 $\overrightarrow{OP}=(1-t-k)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$

由線性組合的係數唯一性知 $x=1-t-k$，$y=t$，$z=k$

$\therefore x+y+z=1$ 成立

②若 $x+y+z=1$，則 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}$

即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

$\therefore \overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，則 P 在平面 ABC 上

由①②知「P 在平面 ABC 上 $\Leftrightarrow$ $x+y+z=1$」成立

34 2. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，設 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{AE}$

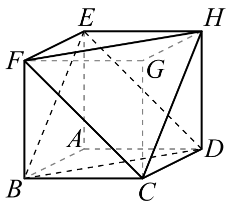
$\because P$ 在平面 BDE 上，由共面定理知 $k+k+k=1$

$\therefore k=\frac{1}{3}$，則 $\overline{AP}:\overline{PG}=1:2$，選(B)

3. 找 x、y、z 均在 0 ～ 1 之間且 $x+y+z<1$ 者，故選(C)(E)

【註】(A)(D)的 P 點在四面體之外，(B)的 P 點在平面 BCD 上

4. 所成圖形為正立方體削去兩個三角錐 A-BDE 與 G-CFH



將正立方體的 6 個面各削去一半，因為增加兩個斜面，所以共有 8 個面，體積為

$1-(\frac{1\times 1}{2}\times 1\times\frac{1}{3})\times 2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

資優挑戰園地

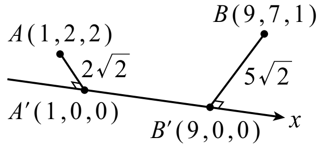
1. ΔBCD 的重心為原點 O，則高為 $\overline{AO}=\frac{\sqrt{6}}{3}$（用背的）

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})$

$=3\overrightarrow{AO}+\cancel{(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})}=-3\overrightarrow{OA}$

$=-3(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3})=(0,0,-\sqrt{6})$

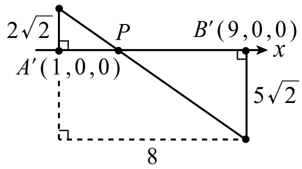
35 2. A、B 兩點在 x 軸上



投影點分別為 $A'(1,0,0)$ 與 $B'(9,0,0)$

$\overline{AA'}=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$

$\overline{BB'}=\sqrt{0+49+1}=5\sqrt{2}$



以 A'、B' 為轉軸，將 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$ 轉到同平面觀察

所求 P 會滿足

$\overline{PA'}:\overline{PB'}=\overline{AA'}:\overline{BB'}=2\sqrt{2}:5\sqrt{2}=2:5$

得 $P(\frac{2\cdot 9+5\cdot 1}{2+5},0,0)=(\frac{23}{7},0,0)$

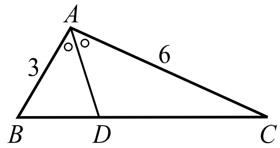
$\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值 $=\sqrt{\overline{A'B'}^2+(2\sqrt{2}+5\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{8^2+(7\sqrt{2})^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+5^2+1^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

周長的最小值 $=3\sqrt{10}+9\sqrt{2}$

3. $\overline{AB}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$



$\overline{AC}=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$

$\therefore$ 由內分比知

$\overline{BD}:\overline{DC}=3:6=1:2$

則 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+2}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}$

得 $\frac{2k}{3}=3\quad\Rightarrow\quad k=\frac{9}{2}\quad\therefore\ p=\frac{k}{3}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$

4. 邊長為 2，設另一點為 (p,q,r)

則 $\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{(p-2)^2+q^2+r^2}=\sqrt{(p-1)^2+(q-1)^2+(r-\sqrt{2})^2}=2$

即 $\begin{cases}p^2+q^2+r^2=p^2+q^2+r^2-4p+4\cdots ①\\ p^2+q^2+r^2-4p+4=p^2+q^2+r^2-2p-2q-2\sqrt{2}r+4\cdots ②\\ p^2+q^2+r^2=4\cdots ③\end{cases}$

由①得 $4p=4\quad\Rightarrow\quad p=1$

由②得 $-4p+4=-2p-2q-2\sqrt{2}r+4$

$\Rightarrow\quad 2q+2\sqrt{2}r=2p=2\quad\therefore\ q=1-\sqrt{2}r$

由③得 $1^2+(1-\sqrt{2}r)^2+r^2=4\quad\Rightarrow\quad 3r^2-2\sqrt{2}r-2=0$

$\Rightarrow\quad r=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{32}}{6}\quad\therefore\ r=\sqrt{2}$ 或 $\frac{-\sqrt{2}}{3}$

$\therefore (1,-1,\sqrt{2})$ 或 $(1,\frac{5}{3},\frac{-\sqrt{2}}{3})$

1-3 空間向量的內積

範例研習特區

範例 1

36 1.【再想一想】條件不足，只能求變動範圍

① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times 4\times\cos 60^\circ=6\times 4\times\frac{1}{2}=12$

②由餘弦定理，$\cos\angle CAD=\frac{4^2+7^2-5^2}{2\times 4\times 7}=\frac{40}{2\times 4\times 7}$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4\times 7\times\frac{40}{2\times 4\times 7}=\frac{40}{2}=20$

37 2.(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times4=8$

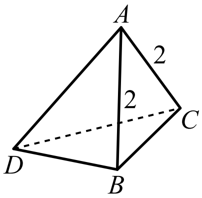
(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=16$

3.$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times6+5\times3+(-2)\times7=6+15-14=7$

類 題

1 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4-2\sqrt{2}$ 2 (1) 16 (2) 16 3 4 4 -17

1 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos45°=2\sqrt{2}$



(2) $\overline{BC}^{\,2}=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos45°$

$=8-4\sqrt{2}$

$\because$ ΔABC 為等腰三角形

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BC}=\dfrac{8-4\sqrt{2}}{2}=4-2\sqrt{2}$

2 (1) $\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\overline{BD}=3\sqrt{2}$

則 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overline{PB}\times\overline{PD}\times\cos\angle BPD=5\times5\times\dfrac{5^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times5\times5}$

$=\dfrac{25+25-18}{2}=16$

(2) $\overrightarrow{PC}$ 投影到 $\overrightarrow{PA}$ 即為 $\overrightarrow{PA}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overline{PA}\times\overline{PA}=4\times4=16$

3 ΔACH 為正三角形

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\sqrt{2}\,a\times\sqrt{2}\,a\times\cos60°=a^2=16$ $\therefore$ $a=4$

4 $\overrightarrow{AB}=(-4,-8,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,5)$

則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4+(-16)+(-5)=-17$

範例 2

1.$\overrightarrow{AB}=(-3,k-1,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,k-2)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3+(k-1)+(-3k+6)=-2k+8=16$

$\therefore$ $k=-4$，得 $B(3,-4,-1)$，$C(5,2,-4)$

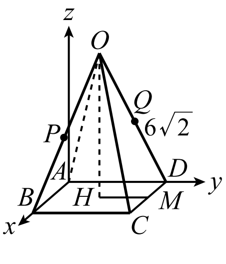
則 $\overrightarrow{BA}=(3,5,3)$，$\overrightarrow{BC}=(2,6,-3)$

所求 $=6+30+(-9)=27$

38 2.建立坐標，看出 $\overrightarrow{AN}=(-2,6,2)$，$\overrightarrow{BM}=(-4,-6,1)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=8+(-36)+2=-26$

3.令 $A(0,0,0)$、$B(4,0,0)$、$D(0,4,0)$



O 投影到 xy 平面為 H

H 投影到 $\overline{CD}$ 為 M

則 $\overline{OM}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2-2^2}=\sqrt{68}$

$\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{68})^2-2^2}=\sqrt{64}=8$

所以 O 點坐標為 $(2,2,8)$

則 $\overline{OB}$ 中點為 $P(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{2+0}{2},\dfrac{8+0}{2})=(3,1,4)$

$\overline{OD}$ 中點為 $Q(\dfrac{2+0}{2},\dfrac{2+4}{2},\dfrac{8+0}{2})=(1,3,4)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(3,1,4)\cdot(-3,3,4)=-9+3+16=10$

類 題

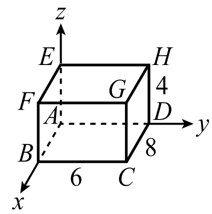
5 9 6 46 7 (1) 702 (2) $-\dfrac{127}{2}$

5 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2,-1,x-4)\cdot(1,x-2,3)$

$=2+(-x+2)+(3x-12)=2x-8=10$

$\therefore$ $x=9$

6 設 $A(0,0,0)$、$B(8,0,0)$、$D(0,6,0)$、$E(0,0,4)$



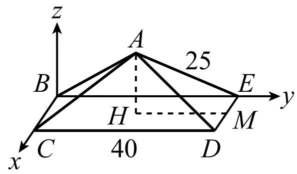
則 $G(8,6,4)$、$C(8,6,0)$、$F(8,0,4)$、$M(8,6,2)$、$N(0,3,2)$

$\therefore$ $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{MN}=(-8,6,-4)\cdot(-8,-3,0)$

$=64+(-18)+0=46$

7 令 $B(0,0,0)$、$C(14,0,0)$、$D(14,40,0)$、$E(0,40,0)$

A 投影到 xy 平面為 H



H 投影到 $\overline{DE}$ 為 M

$\overline{AM}=\sqrt{25^2-7^2}=24$

$\overline{AH}=\sqrt{24^2-20^2}$

$=\sqrt{44\times4}=4\sqrt{11}$

$\therefore$ A 坐標為 $(7,20,4\sqrt{11})$

(1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=(7,20,-4\sqrt{11})\cdot(-14,40,0)$

$=-98+800+0=702$

(2)看出 $P(14,20,0)$，$Q(\dfrac{7}{2},30,2\sqrt{11})$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(7,0,-4\sqrt{11})\cdot(\dfrac{7}{2},30,2\sqrt{11})$

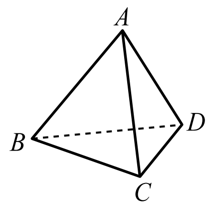
$=\dfrac{49}{2}+0-88=-\dfrac{127}{2}$

範例 3

39 1.$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AC}|^2=-5+(\sqrt{7})^2=2$

2.設 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=k$



$\angle BAC=\angle CAD=\angle BAD=\theta$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=k^2\cos\theta-k^2\cos\theta=0$

3.$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{1+1}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD})$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|^2+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=6\times6\times\cos60°=18$

$\therefore$所求 $=\dfrac{1}{3}\times18+\dfrac{1}{3}\times18+\dfrac{1}{6}\times6^2+\dfrac{1}{6}\times18$

$=6+6+6+3=21$

類 題

8 6 9 0 10 30 11 8

8 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=-10+4^2=6$

(D)因 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(-3,-4,2)\cdot(-3,k-4,2)$

$=9+(-4k+16)+4=-4k+29$，隨 k 遞減，不合

(E)因 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 的正射影長固定為4，不會隨 k 值變動，不合

範例 8

45 1. 將 $x^2+2y^2+4z^2$ 看成 $(x,\sqrt{2}y,2z)$ 的長度平方

$3x-y+2z$ 看成向量 $(x,\sqrt{2}y,2z)$ 與 $(3,\frac{-1}{\sqrt{2}},1)$ 的內積

代柯西不等式 $(3x-y+2z)^2\le(9+\frac{1}{2}+1)(x^2+2y^2+4z^2)$

$\Rightarrow\quad 25\le\frac{21}{2}(x^2+2y^2+4z^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{50}{21}\le x^2+2y^2+4z^2$

等號成立於 $\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{2}y}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2z}{1}=k$，則 $x=3k$，$y=-\frac{k}{2}$

$z=\frac{k}{2}$ 代回，$3x-y+2z=9k+\frac{k}{2}+k=\frac{21k}{2}=5$

$\Rightarrow\quad k=\frac{10}{21}$，$(x,y,z)=(\frac{10}{7},-\frac{5}{21},\frac{5}{21})$

使 $x^2+2y^2+4z^2$ 有最小值為 $\frac{50}{21}$

2. 配方為 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=11+4+1+9=25$

用 $(x+2,y-1,z+3)$ 與 $(1,1,-1)$ 代柯西不等式

得 $[(x+2)\cdot1+(y-1)\cdot1+(z+3)\cdot(-1)]^2$

$\le[(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2]\times[1^2+1^2+(-1)^2]$

即 $(x+y-z-2)^2\le25\times3$

開根號得 $-5\sqrt{3}\le x+y-z-2\le5\sqrt{3}$

同加 2 得 $2-5\sqrt{3}\le x+y-z\le2+5\sqrt{3}$

$\therefore$ 最大值為 $2+5\sqrt{3}$，最小值為 $2-5\sqrt{3}$

3. 用 $(\sqrt{2a},\sqrt{9b},\sqrt{3c})$ 與 $(\sqrt{\frac{2}{a}},\sqrt{\frac{1}{b}},\sqrt{\frac{3}{c}})$ 代柯西不等式

得 $(\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}+\sqrt{9b}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{3c}\cdot\sqrt{\frac{3}{c}})^2$

$\le(2a+9b+3c)(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c})$

即 $(2+3+3)^2\le4(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c})\quad\therefore 16\le\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}$

得最小值為 16

類題

27 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$；1　28 $\frac{31}{6}$　29 $5+6\sqrt{6}$；$5-6\sqrt{6}$

30 18；$\sqrt{6}$

46 27 向量 $(1,2,-2)$ 與 (x,y,z) 代柯西不等式

$\because(x+2y-2z)^2\le(1+4+4)(x^2+y^2+z^2)$

$\Rightarrow\quad 9\le9(x^2+y^2+z^2)\quad\therefore x^2+y^2+z^2\ge1$

若 $x^2+y^2+z^2=1$，則 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-2}=k$

則 $x=k$，$y=2k$，$z=-2k$

代入 $x+2y-2z=k+4k+4k=9k=3$

$\Rightarrow\quad k=\frac{1}{3}\quad\therefore(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$

28 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6=(x-1)^2+(y+2)^2+z^2+1$

$\therefore$ 向量 $(x-1,y+2,z)$ 與 $(2,1,1)$ 代柯西不等式

$[2(x-1)+(y+2)+z]^2\le(4+1+1)[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2]$

$\Rightarrow\quad(x-1)^2+(y+2)^2+z^2\ge\frac{25}{6}$

$\Rightarrow\quad(x-1)^2+(y+2)^2+z^2+1\ge\frac{31}{6}$，最小值 $=\frac{31}{6}$

29 配方得 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=6+4+1+25=36$

把 $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2$ 看成 $(x+2,y-1,z+5)$ 的長度平方，把 $x+2y-z$ 看成 $(x+2,y-1,z+5)$ 與 $(1,2,-1)$ 的內積一部分，代柯西不等式

$(x+2+2y-2-z-5)^2$

$\le(1+4+1)[(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2]$

$\Rightarrow\quad(x+2y-z-5)^2\le6\cdot36$

開根號，$-6\sqrt{6}\le x+2y-z-5\le6\sqrt{6}$

同加 5，$5-6\sqrt{6}\le x+2y-z\le5+6\sqrt{6}$

$\therefore$ 最大值 $=5+6\sqrt{6}$，最小值 $=5-6\sqrt{6}$

30 ① $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ 與 $(\sqrt{\frac{4}{a}},\sqrt{\frac{1}{b}},\sqrt{\frac{9}{c}})$ 代柯西不等式

$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{4}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{9}{c}})^2\le(a+b+c)(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{9}{c})$

$\Rightarrow\quad(2+1+3)^2\le2(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{9}{c})\quad\therefore\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{9}{c}\ge18$

② $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ 與 $(1,1,1)$ 代柯西不等式

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\le(1+1+1)(a+b+c)=3\times2=6$

$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{6}$

歷年大考精選

1. O 投影到底面為 H，則 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OH}$

且 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OH}$

(A)應為 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OH}\ne\vec{0}$

(B)應為 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{DA}\ne\vec{0}$

(E) ΔOAC 邊長為 2、2、$\sqrt{2}$

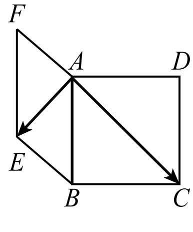
$\therefore$ 應為 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\times2\times\frac{2^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\times2\times2}=\frac{6}{2}=3$

$\therefore$ 選(C)(D)

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=16+0+0+11=27$



47 3. (A)×；$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$

$=|\overrightarrow{DA}|^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(B)(C)(D)由 $\angle BAC>\angle BDC$，知(B)(D)×　(C)○

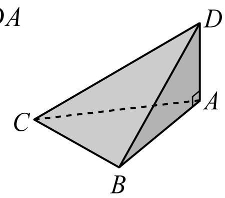
(E)○；顯然 $\angle BDC<\angle BDA+\angle CDA$

（可由四面體展開圖觀察）

由條件知 $\angle BDA<45^\circ$

且 $\angle CDA<45^\circ$

則 $\angle BDC<45^\circ+45^\circ=90^\circ$



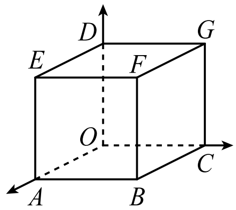
故選(C)(E)

4. (A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(B)不一定，只知道 C、D 投影到 $\overleftrightarrow{AB}$ 為同一點

(C)由(A)知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$　(D) $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 可以不垂直
(E) $ABCD$ 可以連成四面體。故選(A)

5. $n(S)=C^7_2=21$



① $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$

❶如 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，有 3 種

❷如 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}$，有 3 種

$\Rightarrow\quad P=\dfrac{3+3}{21}=\dfrac{2}{7}$

② $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1$

$$\left.\begin{array}{l}❶如\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}，有\ 6\ 種\\ ❷如\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}，有\ 3\ 種\\ ❸如\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}，有\ 3\ 種\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ P=\frac{6+3+3}{21}=\frac{4}{7}$$

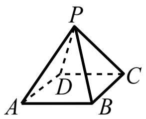
③ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2$，如 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OB}$，有 3 種 $\Rightarrow$ $P=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$

由①②③可得 $E=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$

素養導向試題

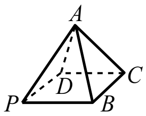
1. 因 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 必夾 60° 角
所以內積值必為 $1\times1\times\cos60^\circ$，只有 1 種，故選(A)

2. ①若 P 在頂部



$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times1\times\cos90^\circ=0$

②若 P 在底部



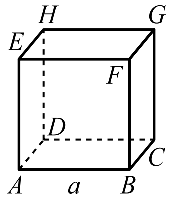
$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times\sqrt{2}\times\cos45^\circ=1$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=0$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times\sqrt{2}\times\cos\angle APC=1\times\sqrt{2}\times\dfrac{1^2+(\sqrt{2})^2-1^2}{2\times1\times\sqrt{2}}=1$

由①②知 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ 可能為 0 或 $\dfrac{1}{2}$ 或 1，共 3 種值，選(C)

48 3. (1) $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 內積得 a^2



$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 內積得 0

$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 內積得

$\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a\cdot\cos60^\circ=a^2$

$\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 內積得 $\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a=2a^2$

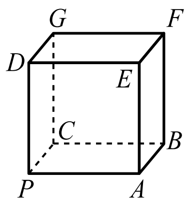
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ 的值為 0、a^2、$2a^2$，共 3 種

(2)若 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a^2=18$，則 $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

若 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=2a^2=18$，則 $a=\sqrt{9}=3$　$\therefore a=3\sqrt{2}$ 或 3

(3)樣本空間共有 $C^7_2=21$ 種情形

A —— C、D、G
B —— D
C —— A、E、D
D —— A、B、C
E —— C
F —— 無
G —— A



每種選法被算 2 次

共 $12\times\dfrac{1}{2}=6$ 種選法　$\therefore P=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$

資優挑戰園地

1. $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\right|=\left|\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right|$

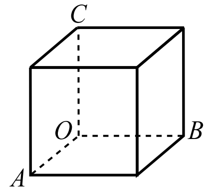
$=\sqrt{(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})}$

$=\sqrt{\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$

$=\sqrt{\frac{1}{9}\times9+\frac{4}{9}\times9+\frac{1}{9}\times9-\frac{2}{9}\underbrace{(3\times3\times\cos60^\circ)}_{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}}$

$=\sqrt{1+4+1-1}=\sqrt{5}$

2. $\because$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2+4-2=0$



$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=4-2-2=0$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-2-2+4=0$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 為兩兩垂直

則 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-1,4,1)$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(-4,1,1)$，$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=(-1,1,4)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(-3,3,3)$ 為另外四個頂點

故選(A)(C)(D)

3. $\angle XOY$ 的角平分線方向的向量為 $\vec{a}=(1,1,0)$

$\angle YOZ$ 的角平分線方向的向量為 $\vec{b}=(0,1,1)$

則 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|}=\dfrac{0+1+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \theta=60^\circ$

1-4　外積與三階行列式

範例研習特區

範例 1

50 1. ① $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\7&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\6&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\5&7\end{vmatrix}\right)=(-9,9,-3)$

② $\vec{b}\times\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}7&6\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&5\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5&7\\1&2\end{vmatrix}\right)=(9,-9,3)$

51 2.【概念強化】×；○

$\vec{a}\times\vec{b}=(3,5,4)\times(6,10,8)$

$=\left(\begin{vmatrix}5&4\\10&8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&3\\8&6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&5\\6&10\end{vmatrix}\right)=(0,0,0)$

3. 所求 $=12\vec{a}\times\vec{a}+3\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}+3\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{c}\times\vec{a}$

$=(0,0,0)+3(3,-2,5)+6(7,1,4)$

$=(0+9+42,0-6+6,0+15+24)=(51,0,39)$

類題

1 (1) $(7,-7,-7)$　(2) $(26,-13,-13)$；$(17,2,-7)$

2 (1) $(19,5,12)$　(2) $(-3,-5,4)$

3 (1) $(-2,-1,-3)$　(2) $(-9,12,-2)$

4 (1)(C)　(2)(B)　**5** $(2,1,-1)$

1 (1) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}\right)=(7,-7,-7)$

對話式®

高中數學A
第4冊 講義
課後練習本

班級：________________ 姓名：________________ 座號：________

第1回　1-1 空間概念

1 是非題（對的打○，錯的打×，並請更正之）

⑴______平行於同一平面的兩相異直線，必互相平行。

⑵______若相異兩直線垂直於同一平面，則此兩線平行。

⑶______垂直於同一直線的二直線，必互相平行。

⑷______空間中相異兩點恰可決定一直線，相異三點恰可決定一個平面。

⑸______L_1 是平面 E_1 上的直線，L_2 是平面 E_2 上的直線，若 $E_1 /\!/ E_2$，則 $L_1 /\!/ L_2$。

⑹______兩歪斜線在一平面 E 上之正射影有可能是兩平行線。

⑺______空間中，平行於同一平面的兩相異平面必互相平行。

⑻______直線 L 交平面 E 於 A 點，若在平面 E 上過 A 點有一直線 L' 與 L 垂直，則直線 L 垂直平面 E。

⑼______若兩平行平面 E_1、E_2 依次交第三平面於二直線 L_1 及 L_2，則 $L_1 /\!/ L_2$。

⑽______若 L_1、L_2 是歪斜線，L_1、L_3 也是歪斜線，則 L_2、L_3 必是歪斜線。

解

2 請問下列哪些選項的敘述是正確的？__________

(A)在平面上，兩相異直線不相交，則它們必平行
(B)在空間中，兩相異直線不相交，則它們必平行
(C)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）
(D)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線
(E)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面

解

3 設 A、B、C 為空間中相異的三點，且不在同一直線上。在空間中另取一點 D，使得 A、B、C、D 成為一平行四邊形的四個頂點，則這樣的 D 點一共有多少個？______

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E)無窮多個

解

4 ⑴長方體的一個邊長為 $\overline{AB}$，則其它與 $\overline{AB}$ 歪斜的邊長有_____個。

⑵一個長方體有______對平行的稜邊，有______對歪斜的稜邊。

解

5 空間中三個平面，最多可以把空間分割成_____個部分。

解

第2回　1-1 畢氏定理與三垂線定理

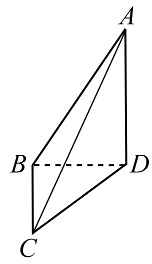
1 ⑴長方體的三組邊長為 3、6、5，其對角線長為 ______ 。

⑵有一半徑 5 的球被一平面所截，球心至平面的距離為 2，試求所截的圓形面積為 ______ 。

⑶地面上有壘球、桌球各一顆相互碰觸，測得壘球的半徑為 9 公分，桌球的半徑為 4 公分。試求此二球與地面兩接觸點間的距離為______公分。

解

2 如右圖，四面體 $ABCD$ 為三明治斜切後的圖形，已知 $\overline{AD}$ 垂直於平面 BCD，$\overline{BC} \perp \overline{BD}$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AB}=12$，$\overline{AD}=10$，則：



⑴ $\overline{AC}$ 長為______。

⑵若平面 ADB 與平面 ADC 夾角為 θ，則 $\cos\theta=$ ______ 。

解

3 若 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 兩兩垂直，且 $\overline{OA}=1$，$\overline{OB}=1$，$\overline{OC}=2$，求：

⑴ ΔABC 面積為 ______　⑵ O 到平面 ABC 的距離為 ______ 。

解

4 平面 E 上有一直角三角形 ΔBCD，$\angle C=90^\circ$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，若線段 $\overline{AB}$ 與 E 垂直，且 $\overline{AB}=2$，則 $\overline{AD}=$______ 。

解

5 空間中 A 點對平面 E 的投影點為 B，直線 L 在 E 上，B 對 L 的投影點為 C，D 在 L 上。若 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CD}=16$，求 $\overline{AD}=$______ 。

解

6 空間中線段 $\overline{AB}=12$，A 在平面 E 上，B 投影到 E 為 C 點且 $\angle BAC=60^\circ$，E 上有一直線 L 過 A 且 $\overline{AC}$ 與 L 的夾角為 30°，求 B 到 L 的最短距離為 ______ 。

解

第 1 回

1 1.⑵⑹⑺⑼為○，其餘為×

⑴⑶可能歪斜

⑷相異三點若共線則不能決定唯一平面

⑸ L_1 與 L_2 可能歪斜

⑻需兩條 E 上的直線與 L 垂直，才可推得 $L \perp E$

⑽ L_2 可與 L_3 平行或相交

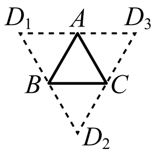
2.(B)可以歪斜

(C)平面的兩直線必須平行才有公垂線

故選(A)(D)(E)

3.有 D_1、D_2、D_3 共三個點可與 A、B、C 連成平行四邊形

故選(C)



4.⑴有 4 個

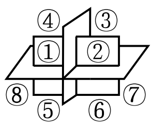
⑵一個邊可以找到 3 個邊與之平行

$\therefore$ 共 $3 \times 12 \times \dfrac{1}{2} = 18$ 對

一個邊可以找到 4 個邊與之歪斜

$\therefore$ 共 $4 \times 12 \times \dfrac{1}{2} = 24$ 對

5.



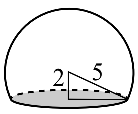
可分成 8 個部分

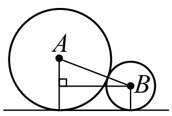
第 2 回

2 1.⑴所求 $= \sqrt{3^2+6^2+5^2} = \sqrt{70}$

⑵圓半徑為 $\sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$

面積為 $\pi \cdot \sqrt{21}^{\,2} = 21\pi$





⑶所求 $= \sqrt{(9+4)^2-(9-4)^2}$

$= \sqrt{13^2-5^2} = 12$ 公分

2.⑴由三垂線定理，ΔABC 為直角三角形

$\therefore\ \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2} = \sqrt{12^2+5^2} = 13$

⑵ $\overline{BD} = \sqrt{12^2-10^2} = \sqrt{44}$

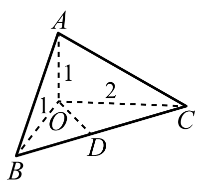
$\overline{CD} = \sqrt{13^2-10^2} = \sqrt{69}$

二面角 $\theta = \angle BDC \quad \therefore\ \cos\theta = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\sqrt{44}}{\sqrt{69}} = \dfrac{2\sqrt{11}}{\sqrt{69}}$

3.⑴ $\overline{BC} = \sqrt{5}$，O 投影到 $\overline{BC}$ 為 D

$\overline{OD} = \dfrac{1\times 2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{AD} = \sqrt{1^2+(\dfrac{2}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{\dfrac{9}{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$



$\therefore\ \Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}$

$= \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{2}$

⑵四面體 $OABC$ 體積

$= \dfrac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 2 = \dfrac{1}{3} \times \Delta ABC \times O$ 到平面 ABC 的距離

所求 $= \dfrac{2}{3}$

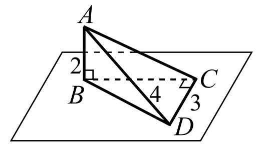
4.$\overline{AC} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$

由三垂線定理知

ΔACD 為直角三角形

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}$

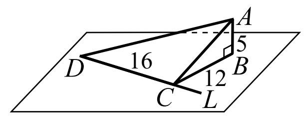
$= \sqrt{20+9} = \sqrt{29}$



5.$\overline{AC} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

$\overline{AD} = \sqrt{13^2+16^2} = \sqrt{425}$

$= 5\sqrt{17}$



6.$\overline{AC} = 12 \times \dfrac{1}{2} = 6$

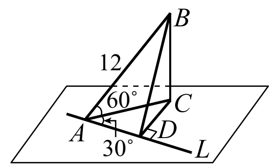
$\overline{BC} = 12 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

C 投影到 L 為 D

則 $\overline{CD} = \overline{AC} \times \dfrac{1}{2} = 3$

$\therefore$ 所求 $= \overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}$

$= \sqrt{(6\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$



第 3 回

3 1.$26 \times |\cos 60°| = 26 \times \dfrac{1}{2} = 13$

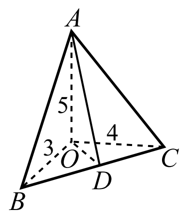
2.$\overline{BC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$，$O$ 投影到 $\overline{BC}$ 為 D

$\overline{OD} = \dfrac{3\times 4}{5} = \dfrac{12}{5}$

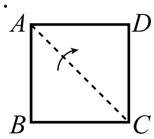
$\overline{AD} = \sqrt{5^2+(\dfrac{12}{5})^2} = \sqrt{\dfrac{769}{25}}$

$\sin\angle ADO = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AD}} = \dfrac{5}{\dfrac{\sqrt{769}}{5}}$

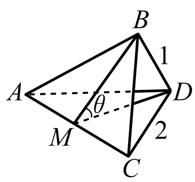
$= \dfrac{25}{\sqrt{769}} = \dfrac{25\sqrt{769}}{769}$



3.



成為



$\overline{AC} = 2\sqrt{2}$，中點為 M，$\overline{MB} = \overline{MD} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \cos\angle BMD = \dfrac{\sqrt{2}^{\,2}+\sqrt{2}^{\,2}-1^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}$

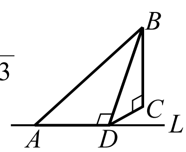
$\therefore\ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

4.B 投影到 F 為 C，C 投影到 L 為 D

則 ΔABD 為直角三角形，$\angle BDC = 30°$

$\because\ \angle BAD = 60°$，得 $\overline{AD} = 5$，$\overline{BD} = 5\sqrt{3}$

$\because\ \angle BDC = 30°$



得 $\overline{CD} = 5\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15}{2}$，故所求

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}$

$= \sqrt{5^2+(\dfrac{15}{2})^2} = \sqrt{\dfrac{325}{4}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{2}$