目　次

第一章　數列與級數

第二章　排列組合與古典機率

第三章　數據分析

第四章　三角比的性質與應用

3 有相同物的排列 110

1. **同物排列**：n 個物品，共可分成相異的幾類，第一類有 a 個相同，第二類有 b 個相同，第三類有 c 個相同，⋯，則此 n 件物品作直線排列，其排法有 $\frac{n!}{a!b!c!\cdots}$ 種。

例 $\underbrace{x、x、x}_{3\text{ 個相同}}、\underbrace{y、y}_{2\text{ 個相同}}、z$ 的直線排列共有 $\frac{6!}{3!2!}=60$ 種排法。

2. **題目類型**：常見的有次序固定的直線排列、完整棋盤走捷徑、分配問題、爬樓梯、信號問題等等，想考高分必須熟記各題型的長相與解法。

這題必考

範例 8　有相同物的排列

這是直線排列的重要類型，有些問題需要轉換才能看得出解法。

1. 有 $a、a、b、b、b、c、d、e$ 共 8 個字母，全取排成一列：
   (1)任意排，有________種排法。
   (2)兩個 a 相鄰，有________種排法。
   (3)若 b 不排首位，共有________種排法。排字

解

小小叮嚀
1.看幾個相同就除以幾階乘
2.階乘相乘可省略乘號，如 $3!\times4!$ 可寫成 $3!4!$

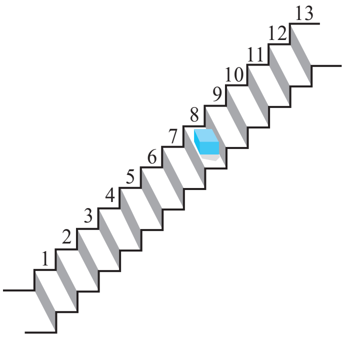
2. 將 1、1、1、2、3、3、4 等七個數字全取排成七位數，共有________個，其中大於 3000000 的數字有________個。排數

解

3. 2 顆相同西瓜與 3 顆相同冬瓜分給 7 個人，每人最多一個，共有________種分法。

解

4. 樓梯共 13 階，限定每步可跨 1 階或 2 階，且第 8 階有障礙物不可踏上，請問共有______種走完樓梯的步伐過程。



解

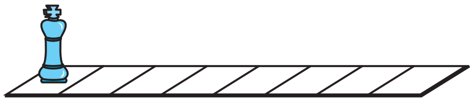
類題 28 把 1、1、1、1、2、2、3、3、3 全取排成九位數，有______種排法。

類題 29 把 *mississipi* 的字母排成一列，共有______種排法。排字

類題 30 將「我為人人，人人為我」的 8 個字排成一列，共有______種排法。其中同字必須相鄰的排法有______種。排字

類題 31 將 3 枝相同鉛筆、2 枝相同原子筆分給 8 個人，每人最多一枝，共有______種分法。分物

類題 32 如右圖，有一顆棋子放在最左邊格子，每次向右移一格或兩格，則移到最右邊的過程共有______種。移棋



類題 33 有一片長方形牆壁，尺寸為 24 × 2（即：長 24 單位長，寬 2 單位長），現在有足夠多的綠色及藍色壁磚，綠色壁磚尺寸為 3 × 1，藍色壁磚尺寸為 5 × 1，用這些壁磚不裁割剛好貼滿此長方形牆壁，共可貼成______種不同的圖案。壁磚

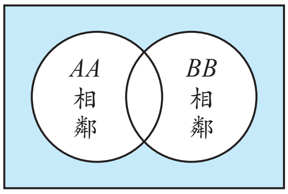
這題常考

範例 9　同物排列（進階）

這幾題是同物排列的代表性問題，相當重要，請熟記。

1. 有 A、A、B、B、C、D、E 共 7 個字母，全取排成一列，若同字不相鄰，共有______種排法。

解



關鍵想法

用取捨原理

2. 甲、乙、丙等 7 人作直線排列，若：

⑴甲在乙的左方，且乙在丙的左方，如「甲戊乙丁庚丙己」，排法有______種。

⑵甲在乙的左方，且丙在丁、戊、己的左方，排法有______種。（注意：甲在乙的左方時，甲乙不必相鄰）定序

解

解題技巧

次序固定的，先用空格取代

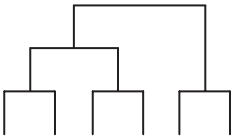
3. 6 個字母 a、a、a、b、b、c，若取出 4 個排成一列，共有______種排法。不全取

解

小小叮嚀

不全取時，需逐一討論，這種題目最麻煩

4. 有 A、B、C、D、E、F 共 6 人要排入右邊的賽程表，請問共有______種不同的安排方式。賽程



解

原來如此

這不是同物排列，但解題的思維模式是相同的

類題 34　a、b、b、c、d、d 全取排成一列，若同字不相鄰，共有______種排法。

類題 35　「種瓜得瓜種豆得豆」全取排成一列，若「瓜瓜」不相鄰且「豆豆」不相鄰，共有______種排法。排字

類題 36 甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人排成一列，規定：

⑴甲在乙的左方，排法有________種。

⑵甲在乙的左方，且乙在丙的右方，排法有________種。

⑶甲必排在乙、丙之左方，且丁必排在乙、丙之右方，排法有_______種。

類題 37 有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 共九個數要由左而右排成一列，若：

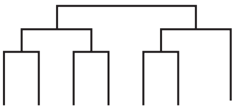
⑴奇數要由小而大，偶數不限，如 $8\underline{\underline{1}}\underline{\underline{3}}42\underline{\underline{5}}6\underline{\underline{7}}\underline{\underline{9}}$，則排法有_________種。

⑵奇數要由小而大，偶數也要由小而大，如 $\underline{\underline{1}}\underline{2}\underline{4}\underline{\underline{3}}\underline{6}\underline{\underline{5}}\underline{\underline{7}}\underline{\underline{9}}\underline{8}$，則排法有________種。

⑶奇數要由小而大，偶數次序不限但不可相鄰，如 $\underline{\underline{1}}\underline{2}\underline{\underline{3}}\underline{4}\underline{\underline{5}}\underline{6}\underline{\underline{7}}\underline{\underline{9}}\underline{8}$，則排法有________種。

類題 38 字母 A、A、A、B、B、C，取出 3 個排成一列，共有______種排法。

類題 39 某次桌球賽，有 7 隊參加比賽，採單淘汰賽，其賽程圖如右圖，則第一輪的賽程共有_______種不同的排法。



這題常考

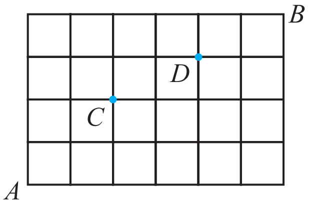
範例 10 同物排列解捷徑問題

完整棋盤走捷徑，只是同物排列的應用。請同學比較之前的累加法。

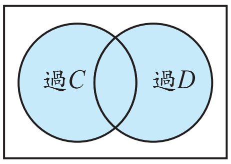
1. 在棋盤道路的城市，郵差想由 A 走到 B，則：

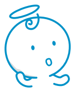
⑴走捷徑，即只能向上或向右，共有________種走法。

⑵走捷徑，但必須經過 C 點或 D 點，共有________種走法。

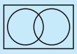


解

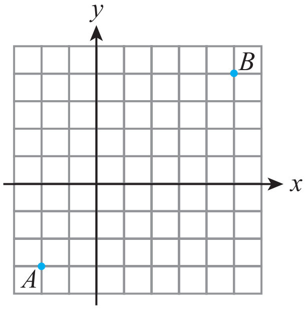




怎麼又是「取捨」，真是陰魂不散啊！

因為取捨原理很好用啊！可以和任何一組排列組合的問題相結合，所以像的集合圖會常常看到。一定要會喔！

2. 坐標平面上點 (x,y)，若 x、y 均為整數，則稱此點為「格子點」。現有棋盤道路連接各格子點，如右圖，由點 $A(-2,-3)$ 走到 $B(5,4)$，且不過第四象限的捷徑走法有________種。



原來如此

設關卡把捷徑路線分類相加

解

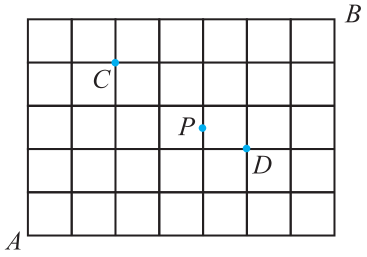
類題 40 棋盤道路如右圖，由 A 走到 B，若：

⑴只能向上或向右，共有________種走法。

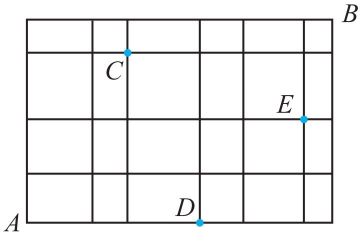
⑵走捷徑，且必須經過 C 點，共有________種走法。

⑶走捷徑，不經過 C 點也不經過 D 點，共有________種走法。

⑷走捷徑，且經過 P 點，共有________種走法。



類題 41 如右圖，棋盤道路由 A 走捷徑到 B，並且至少經過 C、D、E 之一，走法有________種。

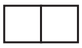
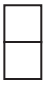


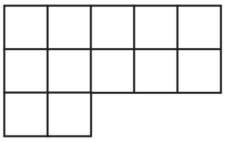
類題 42 坐標平面上有棋盤道路連接各格子點，先由點 $A(-4,-2)$ 出發，走捷徑至點 $B(2,3)$，若：⑴過原點，有________種走法

⑵過第二象限，有________種走法。

歷年大考精選

1. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點 + 4 處，則此運動物體共有____種不同的跳動方法。

2. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即  或 。則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有____種。



3. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
㈲每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
㈡連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？____
(A) 52　(B) 60　(C) 68　(D) 76　(E) 84

4. 有三女三男共六位在校時和老師常有互動的同學，畢業後老師邀聚餐，餐後七人站一橫排照相留念。已知同學中有一女一男兩位曾有過不愉快，照相時不想相鄰，而老師站在正中間且三位男生不完全站在老師的同一側，則可能的排列方式共有____種。

● 111 學測 B

5. 將數字 1、2、3、…、9 等 9 個數字排成九位數（數字不得重複），使得前 5 位從左至右遞增且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？____
(A) $\frac{8!}{4!4!}$　(B) $\frac{8!}{5!3!}$　(C) $\frac{9!}{5!4!}$　(D) $\frac{8!}{5!}$　(E) $\frac{9!}{5!}$

● 112 學測 A

素養導向試題

在日常生活當中，我們經常針對行程、課表、位置等進行「安排」，不知不覺就在使用排列的觀念與技巧，而解題所仰賴的，不外乎就是**加法、乘法、取捨**這幾個原理的反覆運用。請回答下列各問題：

◎填充題

1. 從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛共 8 人中選 5 人排成一列拍照，其中有些人的要求條件比較多，請依條件來安排人物排列：

⑴甲、乙兩人是冤家，絕不在同一張照片中出現，請問有_______種人物排列的方式。

⑵若甲、乙不同照，且丙若出現亦不願意排在左右兩端，請問有_______種人物排列的方式。

解

2. 學校舉行複習考，有國文、英文、數學、自然及社會共 5 科，每科考一節課，一天七節課（早上四節及下午三節）考完，其中有兩節是自習，教務處針對老師陸續提出的條件來排定考程：

⑴若無其它限制，根據以上的條件所述，共有________種不同的考程排法。

⑵若早上考三科且下午考兩科，共有________種不同的考程排法。

⑶若早上考三科且下午考兩科，且第四、七節不排自習，共有_______種不同的考程排法。

⑷若早上考三科且下午考兩科，第四、七節不排自習，且數學在早上考，自然在下午考，共有_______種不同的考程排法。

解

資優挑戰園地

1. 設 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a-1,2,3,4\}$，若 $A=B$，則序組 (a,b,c,d) 共有______組解。

解

2. 用數字 1、2、3、⋯、9，不重複做成三位數，其中為 3 的倍數有______個。

解

再講清楚

1. 3 的倍數
⇔ 各位數字和為 3 的倍數
2. 依餘數分成 A、B、C 三組

A	B	C
3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8

3. 用 1、2、3、4，數字不重複，所排成的各種四位數，其總和為______。

解

解題技巧

如 $3142=3000+100+40+2$，每個四位數拆開成幾千、幾百、幾十和個位之和

4. (1) 5 對兄妹共舞，若每一兄均不與其妹為舞伴，則共有______種情形。配對

(2) 5 張寫好寄給不同人的信，放入 5 個寫好不同地址的信封，則全都放錯的情形有______種，恰有一封信放錯的情形有______種。

(3) 1、2、3、4、5 排成 a、b、c、d、e，則滿足 $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)=0$ 的排法有______種。

解

5. 有五張卡片，其正反兩面分別寫著：0 與 1、2 與 3、4 與 5、6 與 7、8 與 9，且 6 與 9 可分辨清楚。今任取三張，再排成一個三位數，總共可排成______個不同的三位數。

解

6. 以汽笛的長音、短音來做信號，長音一次需 2 秒，短音一次需 1 秒，每音之間有 1 秒的間隔。若每一組信號前後的總長度為 15 秒，則能做成______種信號。信號

解

原來如此

設長音 x 個，短音 y 個，則有 $(x+y-1)$ 個間隔。這是歷史悠久的聯考題

27 1 2 × × ⇒ 有 $8 \times 7 = 56$ 種　2 1 × × ⇒ 56 種

× 1 2 × ⇒ 56 種　× 2 1 × ⇒ 56 種

× × 1 2 ⇒ 56 種　× × 2 1 ⇒ 56 種

∴共 $56 \times 6 = 336$ 種

範例 8

83 1.⑴有 $\dfrac{8!}{2!3!} = \dfrac{40320}{2 \times 6} = 3360$ 種

⑵即 ⓐⓐ、b、b、b、c、d、e 排列，有 $\dfrac{7!}{3!} = 840$ 種

⑶有 $3360 - \underbrace{\dfrac{7!}{2!2!}}_{\text{首為 } b} = 3360 - 1260 = 2100$ 種

2.①有 $\dfrac{7!}{3! \times 2!} = \dfrac{5040}{6 \times 2} = 420$ 個

②首位為 3 有 $\dfrac{6!}{3!} = 120$ 個

　首位為 4 有 $\dfrac{6!}{3! \times 2!} = 60$ 個

∴所求 $= 120 + 60 = 180$ 個

3. a　b　c　d　e　f　g 固定

□ □ □ □ □ □ □

把西、西、冬、冬、冬、×、×排入上列的空格，每種排法即一種分法

∴共有 $\dfrac{7!}{2! \times 3! \times 2!} = \dfrac{5040}{2 \times 6 \times 2} = 210$ 種分法

84 4.①先走 1 ～ 7 階

走法	2 2 2 1	2 2 1 1 1	2 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1
種	$\dfrac{4!}{3!} = 4$	$\dfrac{5!}{2!3!} = 10$	$\dfrac{6!}{5!} = 6$	1

共 $4 + 10 + 6 + 1 = 21$ 種

②再走 9 ～ 13 階（第 9 階必走，剩 10 ～ 13 階）

走法	2 2	2 1 1	1 1 1 1
種	1	$\dfrac{3!}{2!} = 3$	1

共 $1 + 3 + 1 = 5$ 種

由①②可知所求 $= 21 \times 5 = 105$ 種

類 題

28 1260　**29** 6300　**30** 420；6　**31** 560　**32** 21　**33** 441

28 有 $\dfrac{9!}{4! \times 2! \times 3!} = 1260$ 種排法

29 有 $\dfrac{10!}{4! \times 4!} = 6300$ 種排法

30 ① $\dfrac{8!}{2! \times 2! \times 4!} = 420$ 種　② $\underbrace{3!}_{\boxed{我}\boxed{為}\boxed{人}\text{排列}} = 6$ 種

31 即「鉛鉛鉛原原無無無」排成一列

∴ $\dfrac{8!}{3! \times 2! \times 3!} = 560$ 種

32 共向右移 7 格

移法	2 2 2 1	2 2 1 1 1	2 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1
種	$\dfrac{4!}{3!} = 4$	$\dfrac{5!}{2!3!} = 10$	$\dfrac{6!}{5!} = 6$	1

∴共 $4 + 10 + 6 + 1 = 21$ 種

33 $3x + 5y = 24$ 的非負整數解為 $\begin{array}{c|c|c} x & 8 & 3 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$

需貼兩列，每列的貼法有 $\dfrac{8!}{8!} + \dfrac{6!}{3! \times 3!} = 1 + 20 = 21$ 種

∴兩列的貼法為 $21 \times 21 = 441$ 種

範例 9

85 1.《用倒扣》

$$\underbrace{\dfrac{7!}{2! \times 2!}}_{\text{任意排}} - \underbrace{\dfrac{6!}{2!}}_{AA\text{ 相鄰}} - \underbrace{\dfrac{6!}{2!}}_{BB\text{ 相鄰}} + \underbrace{5!}_{AA\text{ 相鄰且 }BB\text{ 相鄰}}$$

$$= \dfrac{5040}{4} - \dfrac{720}{2} - \dfrac{720}{2} + 120 = 660 \text{ 種}$$

2.⑴比如：$\boxed{甲}$戊$\boxed{乙}$丁庚$\boxed{丙}$己，排法有

$$\underbrace{\dfrac{7!}{3!}}_{\text{先排□□□丁戊己庚}} \times \underbrace{1}_{\text{放入甲}} \times \underbrace{1}_{\text{放入乙}} \times \underbrace{1}_{\text{放入丙}} = \dfrac{5040}{6} = 840 \text{ 種}$$

⑵有 $\underbrace{\dfrac{7!}{2! \times 4!}}_{\text{先排□□△△△△庚}} \times \underbrace{1}_{\text{甲乙排入□□}} \times \underbrace{3!}_{\text{丙丁戊己排入△△△△}} = 630$ 種

3.①恰三同　$aaab$ ⇒ $\dfrac{4!}{3!} = 4$

　　　　　$aaac$ ⇒ $\dfrac{4!}{3!} = 4$

②二同二同　$aabb$ ⇒ $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$

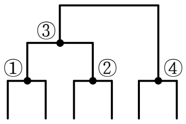
③二同二異　$aabc$ ⇒ $\dfrac{4!}{2!} = 12$

　　　　　$bbac$ ⇒ $\dfrac{4!}{2!} = 12$

④全異 ⇒ 0

∴共有 $4 + 4 + 6 + 12 + 12 = 38$ 種

4.有 $6! \times \underbrace{\dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2}}_{\text{有 4 個關節可以轉動每個關節要除以 2}} = \dfrac{720}{16} = 45$ 種



類 題

34 84　**35** 1440　**36** (1) 360　(2) 240　(3) 60

37 (1) 3024　(2) 126　(3) 360　**38** 19　**39** 315

34 $\underbrace{\dfrac{6!}{2! \times 2!}}_{\text{任意排}} - \underbrace{\dfrac{5!}{2!}}_{bb\text{ 相鄰}} - \underbrace{\dfrac{5!}{2!}}_{dd\text{ 相鄰}} + \underbrace{4!}_{bb\text{ 相鄰且 }dd\text{ 相鄰}}$

$= 180 - 60 - 60 + 24 = 84$ 種

35 $\underbrace{\dfrac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!}}_{\text{任意排}} - \underbrace{\dfrac{7!}{2! \times 2! \times 2!}}_{\text{瓜瓜相鄰}} - \underbrace{\dfrac{7!}{2! \times 2! \times 2!}}_{\text{豆豆相鄰}} + \underbrace{\dfrac{6!}{2! \times 2!}}_{\text{瓜瓜相鄰且豆豆相鄰}}$

$= 2520 - 630 - 630 + 180 = 1440$ 種

86 **36** (1) $\underbrace{\dfrac{6!}{2!}}_{\text{□□丙丁戊己排列}} \times \underbrace{1 \times 1}_{\text{排甲乙}} = 360$ 種

(2) $\underbrace{\dfrac{6!}{3!}}_{\text{□□□丁戊己排列}} \times \underbrace{1}_{\text{排乙}} \times \underbrace{2!}_{\text{排甲丙}} = 240$ 種

(3) $\underbrace{\dfrac{6!}{4!}}_{\text{□□□□戊己排列}} \times \underbrace{2!}_{\text{排乙丙}} \times \underbrace{1 \times 1}_{\text{排甲丁}} = 60$ 種

37 ⑴奇數看成□，先把□□□□□2468 排成一列，再把 1 , 3 , 5 , 7 , 9 放入五個□中，排法有 $\frac{9!}{5!}=3024$ 種

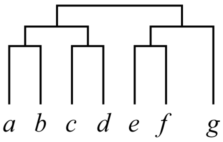
⑵奇數看成□，偶數看成○，先把□□□□□○○○○排成一列，再把 1 , 3 , 5 , 7 , 9 放入五個□中，2 , 4 , 6 , 8 放入四個○中，排法有 $\frac{9!}{5!4!}=126$ 種

⑶奇數先排好，則 $\boxed{1}\,\boxed{3}\,\boxed{5}\,\boxed{7}\,\boxed{9}$ 共有 6 個空隙，讓 2 , 4 , 6 , 8 插空隙，排法有 $P^6_4=6\times5\times4\times3=360$ 種

38
- 三同 $AAA \Rightarrow 1$
- 恰兩同
  - AA □ $\Rightarrow 2\times\frac{3!}{2!}=6$
  - BB □ $\Rightarrow 6$
- 全異 $ABC \Rightarrow 3!=6$

∴共 $1+6+6+6=19$ 種

39 7 隊排列有 7! 種，但 a、b 可對調，c、d 可對調，e、f 可對調，ab、cd 可對調。$2^4=16$，每 16 種排列可併成一種相同的賽程



∴所求 $=\frac{7!}{2\times2\times2\times2}=\frac{5040}{16}=315$ 種

範例 10

1.⑴每種捷徑走法即為 6 個「→」和 4 個「↑」的一種排列

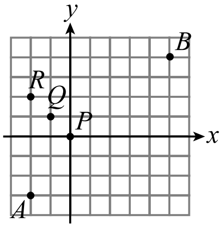
∴走法有 $\frac{10!}{6!\times4!}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$ 種

⑵ $$\underbrace{\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{6!}{4!\times2!}}_{A\text{ 經 }C\text{ 到 }B\text{ 的捷徑走法}}+\underbrace{\frac{7!}{4!\times3!}\times\frac{3!}{2!}}_{A\text{ 經 }D\text{ 到 }B\text{ 的捷徑走法}}-\underbrace{\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}}_{A\text{ 經 }C\text{ 且經 }D\text{ 到 }B\text{ 的捷徑走法}}$$

$=6\times15+35\times3-6\times3\times3=141$ 種

87 2.∵不過第四象限　∴可設置管制點 $P(0,0)$、$Q(-1,1)$、$R(-2,2)$

所求為過 P、Q、R 之一的捷徑走法



過 $P(0,0) \Rightarrow \frac{5!}{2!\times3!}\times\frac{9!}{5!\times4!}=10\times126=1260$

過 $Q(-1,1) \Rightarrow \frac{5!}{4!}\times\frac{9!}{6!\times3!}=5\times84=420$

過 $R(-2,2) \Rightarrow 1\times\frac{9!}{7!\times2!}=36$

∴共有 $1260+420+36=1716$ 種

類 題

40 ⑴ 792　⑵ 90　⑶ 492　⑷ 150　**41** 130

42 ⑴ 150　⑵ 281

40 ⑴ 7 個「→」和 5 個「↑」的排列

$\frac{12!}{7!\times5!}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5!}=792$ 種

⑵ $\underbrace{\frac{6!}{2!\times4!}}_{A\text{ 到 }C}\times\underbrace{\frac{6!}{5!}}_{C\text{ 到 }B}=15\times6=90$ 種

⑶ $\underbrace{792}_{\text{走捷徑}}-\underbrace{90}_{\text{過 }C}-\underbrace{\frac{7!}{5!\times2!}\times\frac{5!}{2!\times3!}}_{\text{過 }D}+\underbrace{0}_{\text{過 }C\text{ 且過 }D}=492$ 種

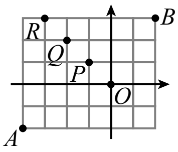
⑷ $\underbrace{\frac{6!}{4!\times2!}}_{A\text{ 到 }P}\times\underbrace{\frac{5!}{2!\times3!}}_{P\text{ 到 }B}=15\times10=150$ 種

41 若過 C 則不過 D、E，過 C 有 $\frac{5!}{2!\times3!}\times\frac{5!}{4!}=10\times5=50$ 種

過 D 或 E 有 $\underbrace{1\times\frac{7!}{3!\times4!}}_{\text{過 }D}+\underbrace{\frac{7!}{5!\times2!}\times\frac{3!}{2!}}_{\text{過 }E}-\underbrace{1\times\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}}_{\text{過 }D\text{ 且過 }E}$

$=35+63-18=80$　∴共 $50+80=130$ 種

42 ⑴ $\underbrace{\frac{6!}{4!\times2!}}_{A\text{ 到 }O}\times\underbrace{\frac{5!}{2!\times3!}}_{O\text{ 到 }B}=15\times10=150$ 種



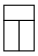
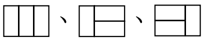
⑵ $\underbrace{\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{5!}{3!\times2!}}_{\text{過 }P}+\underbrace{\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{4!}}_{\text{過 }Q}+\underbrace{\frac{6!}{5!}\times1}_{\text{過 }R}$

$=20\times10+15\times5+6\times1=281$ 種

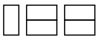
歷年大考精選

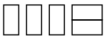
88 1.共跳 5 次向右與 1 次向左，即 →→→→→← 的排列

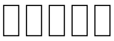
∴ $\frac{6!}{5!}=6$ 種

2.①若左邊為 ，則右邊為  共 3 種

②若左下為 ，則上方

 ⇒ 排法有 $\frac{3!}{2!}=3$ 種

 ⇒ 排法有 $\frac{4!}{3!}=4$ 種

 ⇒ 排法有 1 種

故所求為 $3+3+4+1=11$ 種

3.□□□□□

一 二 三 四 五

①放入「牛牛大咖排」有 $\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{一三五放入牛、牛、大}}\times\underbrace{2!}_{\text{二四放入咖、排}}=6$ 種

②放入「牛大大咖排」，同①有 6 種

③放入「牛大咖咖排」，用取捨原理

$\underbrace{\frac{5!}{2!}}_{\text{任意}}-\underbrace{\frac{4!}{2!}\times2!}_{\text{牛大相鄰}}-\underbrace{4!}_{\text{咖咖相鄰}}+\underbrace{3!\times2!}_{\text{牛大相鄰且咖咖相鄰}}$

$=60-24-24+12=24$ 種

④放入「牛大咖排排」，同③有 24 種

所求 $=6+6+24+24=60$ 種，選(B)

4.□□□師□□□

設三男為 A、B、C，三女為 x、y、z，A 與 x 不相鄰

① A 與 x 在同側 $\Rightarrow \underbrace{2}_{\text{左或右側}}\times\underbrace{2!}_{\text{排 }A\text{ 與 }x}\times4!=96$

② A 與 x 在異側 $\Rightarrow \underbrace{6}_{A}\times\underbrace{3}_{x}\times4!-\underbrace{3!\times3!\times2}_{3\text{ 男同側}}=360$

共 $96+360=456$ 種

5.9 最大必須居中，選 4 個為由左而右遞增，剩下 4 個為遞減　∴所求 $=C^8_4=\frac{8!}{4!4!}$，故選(A)

素養導向試題

89 1.⑴《倒扣法》

$$\underbrace{P^8_5}_{\text{任意}}-\underbrace{\overset{\text{甲}}{\overset{\downarrow}{5}}\times\overset{\text{乙}}{\overset{\downarrow}{4}}\times P^6_3}_{\text{甲乙都入鏡}}=8\times7\times6\times5\times4-5\times4\times(6\times5\times4)$$

$=6720-2400=4320$ 種

⑵《取捨原理》

$$\underbrace{P_5^8}_{\text{任意}}-\underbrace{5\times4\times P_3^6}_{\text{甲乙都入鏡}}-\underbrace{\overset{\text{丙}}{\overset{\downarrow}{2}}\times P_4^7}_{\text{有丙且在兩端}}+\underbrace{\overset{\text{丙}}{\overset{\downarrow}{2}}\times\overset{\text{甲}}{\overset{\downarrow}{4}}\times\overset{\text{乙}}{\overset{\downarrow}{3}}\times P_2^5}_{\text{交集}}$$

$= 6720 - 2400 - 1680 + 480 = 3120$ 種

2.⑴ $\dfrac{7!}{2!}=\dfrac{5040}{2}=2520$ 種

⑵ $\underbrace{4}_{\text{早上自習}}\times\underbrace{3}_{\text{下午自習}}\times 5! = 12\times120 = 1440$ 種

⑶ $\underbrace{3}_{\text{早上自習}}\times\underbrace{2}_{\text{下午自習}}\times 5! = 6\times120 = 720$ 種

⑷ $\underbrace{3}_{\text{早上自習}}\times\underbrace{3}_{\text{數學}}\times\underbrace{2}_{\text{下午自習}}\times\underbrace{2}_{\text{自然}}\times\underbrace{3!}_{\text{其它科}}$

$= 36\times6 = 216$ 種

資優挑戰園地

1.$\because a\neq a-1 \quad \therefore a=2,3,4$ 之一

①若 $a=2$，則 $A=\{2,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4\}$

b、c、d 為 1、3、4，排列有 $3!=6$ 種

②若 $a=3$，則 $A=\{3,b,c,d\}$，$B=\{2,3,4\}$

$$b、c、d \text{ 為 } \left\langle\begin{array}{l}2、3、4\rightarrow 6\text{ 種}\\2、2、4\rightarrow 3\text{ 種}\\2、4、4\rightarrow 3\text{ 種}\end{array}\right\}\text{ 共 12 種}$$

③若 $a=4$，則 $A=\{4,b,c,d\}$，$B=\{2,3,4\}$

$$b、c、d \text{ 為 } \left\langle\begin{array}{l}2、3、4\rightarrow 6\text{ 種}\\2、2、3\rightarrow 3\text{ 種}\\2、3、3\rightarrow 3\text{ 種}\end{array}\right\}\text{ 共 12 種}$$

$\therefore$共 $6+12+12=30$ 種

90 2.把 1 ～ 9 分成 A、B、C 三組，被 3 除各餘 0、1、2

$(\underbrace{1}_{A\text{ 全選}}+\underbrace{1}_{B\text{ 全選}}+\underbrace{1}_{C\text{ 全選}}+\underbrace{3\times3\times3}_{A、B、C\text{ 各選一個}})\times\underbrace{3!}_{\text{排列}}$

$= 30\times6 = 180$ 個

3.其中個位為 1 的有 $3\times2\times1=6$ 個

其中個位為 2 的有 6 個，…，千位為 4 的有 6 個

一位數的和

$=\underbrace{1\times6}_{\text{個位為 1 的和}}+\underbrace{2\times6}_{\text{個位為 2 的和}}+\underbrace{3\times6}_{\text{個位為 3 的和}}+\underbrace{4\times6}_{\text{個位為 4 的和}}$

二位數的和 $=10\times6+20\times6+30\times6+40\times6$

三位數的和 $=100\times6+200\times6+300\times6+400\times6$

四位數的和 $=1000\times6+2000\times6+3000\times6+4000\times6$

和 $=(1+2+3+4)\times6+(10+20+30+40)\times6$

$+(100+200+300+400)\times6$

$+(1000+2000+3000+4000)\times6$

$=10\times6+100\times6+1000\times6+10000\times6=66660$

4.⑴兄$_1$兄$_2$兄$_3$兄$_4$兄$_5$固定，5 個妹妹直排但有 5 個限制

排法有 $1\times5!-5\times4!+10\times3!-10\times2!+5\times1!-1\times0!$

$=120-120+60-20+5-1=44$ 種

⑵全放錯有 44 種，不可能只有一封放錯，所以為 0 種

⑶所求

$$=\underbrace{5!}_{\text{任意}}-\underbrace{(1\times5!-5\times4!+10\times3!-10\times2!+5\times1!-1\times0!)}_{\substack{(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)\neq0\\ \text{即 } a \text{ 非 }1、b\text{ 非 }2、c\text{ 非 }3、d\text{ 非 }4、e\text{ 非 }5}}$$

$=120-44=76$ 種

5.①百位為 1 $\Rightarrow$ $\underbrace{1}_{\text{百}}\times\underbrace{8}_{\text{十}}\times\underbrace{6}_{\text{個}}=48$ 種

②百位不為 1 $\Rightarrow$ $\underbrace{8}_{\text{百}}\times\underbrace{8}_{\text{十}}\times\underbrace{6}_{\text{個}}=384$ 種

$\therefore$共有 $48+384=432$ 種

6.設長音 x 個，短音 y 個，間隔 $x+y-1$ 個

$\therefore 2x+y+(x+y-1)=15 \quad\Rightarrow\quad 3x+2y=16$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 2 & 4\\ \hline y & 8 & 5 & 2\end{array}$$

$$\begin{cases}\text{若 } x=0 \text{ 且 } y=8 \;\Rightarrow\; \text{有 } \dfrac{8!}{8!}=1 \text{ 種}\\ \text{若 } x=2 \text{ 且 } y=5 \;\Rightarrow\; \text{有 } \dfrac{7!}{2!\times5!}=21 \text{ 種}\\ \text{若 } x=4 \text{ 且 } y=2 \;\Rightarrow\; \text{有 } \dfrac{6!}{4!\times2!}=15 \text{ 種}\end{cases}$$

$\therefore$共 $1+21+15=37$ 種

2-3 組合與二項式定理

範例研習特區

範例 1

92 1.⑴ $C_3^7=\dfrac{7!}{3!\times4!}=\dfrac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

⑵ $C_{98}^{100}=\dfrac{100!}{98!\times2!}=C_2^{100}=\dfrac{100\times99}{2\times1}=4950$

2.$3\cdot\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=14\cdot\dfrac{(n-2)(n-3)}{2\times1}$

$\because n\geq4$，約去 $(n-2)(n-3)$，得 $\dfrac{n(n-1)}{8}=7$

$\Rightarrow\quad n^2-n-56=0 \quad\Rightarrow\quad (n-8)(n+7)=0$

$\therefore n=8$ 或 -7（不合）

3.① $r-1=2r-5$，得 $r=4$

② $(r-1)+(2r-5)=12$，得 $r=6 \quad \therefore r=4$ 或 6

類 題

1 15；56；$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ **2** 7 **3** $(8,3)$

4 2 或 7

1 $C_2^6=\dfrac{6\times5}{2}=15$；$C_3^8=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2}=56$；$C_3^n=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

2 即 $5\cdot\dfrac{(n+2)(n+1)n}{3\times2\times1}=4\cdot\dfrac{(2n+1)(2n)}{2\times1}$

兩邊約去 $n \quad\Rightarrow\quad \dfrac{5(n+2)(n+1)}{6}=4(2n+1)$

$\Rightarrow\quad 5(n^2+3n+2)=24(2n+1)$

$\therefore 5n^2-33n-14=(5n+2)(n-7)=0$

故得 $n=-\dfrac{2}{5}$（不合）或 7

3 $\because P_r^n=C_r^n\cdot r! \quad \therefore 336=56\cdot r! \quad\Rightarrow\quad r!=6 \quad\Rightarrow\quad r=3$

$P_r^n=P_3^n=n(n-1)(n-2)=336$

$\because 8\times7\times6=336 \quad \therefore n=8$，$(n,r)=(8,3)$

4 即 $r+3=3r-1$ 或 $(r+3)+(3r-1)=30 \quad \therefore r=2$ 或 7

範例 2

93 1.⑴有 $C_5^7=C_2^7=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$ 種 ⑵有 $C_6^7=C_1^7=7$ 種

第13回　2-2 同物排列

1 丟硬幣十次，得 7 次正面與 3 次反面的情形共有________種。

解

2 將 3 枝相同鋼筆、5 枝相同原子筆，分給 10 人，每人最多得一枝，則有________種分法。

解

3「人生如戲，戲如人生」八個字重新排列，則：⑴共有________種排法　⑵若兩個「戲」相鄰，共有________種排法　⑶若兩個「人」不相鄰且兩個「生」不相鄰，共有________種排法。

解

4 二十個圍棋排成上下兩列，每列十個上下相對，上列為 3 黑 7 白，下列為 2 黑 8 白，若上、下列的黑棋不可相對，其排法有________種。

解

5 將 0、1、1、2、2、2、2 任取 5 個數字，可做成________個五位數。

解

6「大江東去浪淘盡」七個字排成一列，其中「大江東去」的次序一定，「浪淘盡」的依序一定，則有________種排法。

解

7 甲、乙、丙、丁、戊，5 人排成一行，若乙排在甲、丙的後面，則有________種排法。

解

8 在坐標平面上，由點 $A(-3,-2)$ 循格子線走捷徑到點 $B(3,4)$，則：
⑴經過原點，有________種走法　⑵不經過原點，有________種走法
⑶過第四象限，有________種走法。

解

第 11 回

11 1.原式：$25\cdot\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{(n+1)!}{(n-3)!}=12\cdot\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

$\Rightarrow\ 25n(n-1)(n-2)+(n+1)n(n-1)(n-2)$

$=12(n+1)n(n-1)$

約去 $n(n-1)\ \Rightarrow\ 25(n-2)+(n+1)(n-2)=12(n+1)$

$\Rightarrow\ n^2+12n-64=0\ \Rightarrow\ (n+16)(n-4)=0$

$\therefore\ n=-16$（不合）或 4

2.$P_4^6=6\times5\times4\times3=360$ 種

3.⑴ $P_6^6=6!=720$ 種

⑵男女 $\Rightarrow$ $4!\times2!=48$

女男 $\Rightarrow$ $2!\times4!=48$

∴共有 $48+48=96$ 種

⑶女男男男男女 $\Rightarrow$ $4!$（男）$\times2!$（女）$=48$ 種

⑷男□□□□男 $\Rightarrow$ 4（首）× 3（末）× 4!（中間）= 288 種

4.$\underset{\text{□□ □□□□ □ 三種盒子先排}}{\underline{\quad 3!\quad}}\times2!\times4!=6\times2\times24=288$ 種

5.⑴ $\underset{\text{□□□丁戊己先排}}{\underline{\quad 4!\quad}}\times\underset{\text{放入甲、乙、丙}}{\underline{\quad 3!\quad}}=144$ 種

⑵ $\underset{\text{□□丁戊己}}{\underline{\quad 4!\quad}}\times\underset{\text{放入甲、乙}}{\underline{\quad 2!\quad}}\times\underset{\text{丙插空}}{\underline{\quad 4\quad}}=192$ 種

⑶ $\underset{\text{任意}}{\underline{6!}}-\underset{\text{甲、乙相鄰}}{\underline{5!\times2!}}-\underset{\text{丙、丁相鄰}}{\underline{5!\times2!}}+\underset{\text{甲、乙相鄰且丙、丁相鄰}}{\underline{4!\times2!\times2!}}$

$=720-240-240+96=336$ 種

6.⑴ $\underset{\text{甲}}{\underline{7}}\times\underset{\text{乙}}{\underline{6}}\times\underset{\text{丙}}{\underline{5}}=210$ 種

⑵

•	•	•				
	•	•	•			
		•	•	•		
			•	•	•	
				•	•	•

$\Rightarrow$ 共 5 種選位方式

∴ $5\times3!=30$ 種

⑶ ^□^□^□^□^ 選空隙 ∴ $\underset{\text{甲}}{\underline{5}}\times\underset{\text{乙}}{\underline{4}}\times\underset{\text{丙}}{\underline{3}}=60$ 種

7.⑴所求 $=1\cdot5!-2\cdot4!+1\cdot3!=120-48+6=78$ 種

⑵所求 $=1\cdot5!-3\cdot4!+3\cdot3!-1\cdot2!=120-72+18-2=64$ 種

⑶討論末位 $\begin{cases}A：\underset{\text{首為 }C\text{、}D\text{、}E}{\underline{\quad 3\quad}}\times3!=18\\ E：\underset{\text{首為 }C\text{、}D}{\underline{\quad 2\quad}}\times3!=12\end{cases}$

∴共有 $18+12=30$ 種

第 12 回

12 1.⑴人選房，有 $5\times5\times5\times5=625$ 種

⑵房選人，有 $4\times4\times4\times4\times4=1024$ 種

2.人選船，要扣除超載

⑴ $3\times3\times3\times3\times3=243$ 種

⑵ 3^6-3（6 人同船）$=729-3=726$ 種

⑶ 3^7-3（7 人同船）-7（選 1 人落單）$\times3$（1 人選船）

$\times2$（6 人選船）$=2187-3-42=2142$ 種

3.⑴ 5（甲選一封信）× $\underset{\text{剩 4 封信，信選郵筒}}{\underline{3\times3\times3\times3}}=405$ 種

⑵ 4^5（任意）-3^5（甲沒信）$=1024-243=781$ 種

⑶利用排容原理：4^5（任意）-3^5（甲沒信）-3^5（乙沒信）

$+2^5$（甲沒且乙沒）$=1024-243-243+32=570$ 種

4.⑴ □□□ 百位 十位

討論個位
- 0 $\Rightarrow$ 9 × 8 = 72
- 2 $\Rightarrow$ 8 × 8 = 64
- 4 $\Rightarrow$ 8 × 8 = 64
- 6 $\Rightarrow$ 8 × 8 = 64
- 8 $\Rightarrow$ 8 × 8 = 64

∴ 共有 $72+64+64+64+64=328$ 個不同的偶數

⑵ 9（百位）× 10（十位）× 5（個位）= 450 個

5.⑴ □□□

討論個位
- 0 $\Rightarrow$ $5\times4=20$
- 5 $\Rightarrow$ $4\times4=16$

∴共有 $20+16=36$ 個

⑵ □□□

討論末兩位
- 0 4 $\Rightarrow$ 4
- 1 2 $\Rightarrow$ 3
- 2 0 $\Rightarrow$ 4
- 2 4 $\Rightarrow$ 3
- 3 2 $\Rightarrow$ 3
- 4 0 $\Rightarrow$ 4
- 5 2 $\Rightarrow$ 3

∴共有 $4+3+4+3+3+4+3=24$ 個

6.⑴ □$\boxed{0}$ $\Rightarrow$ 9

□□$\boxed{0}$ $\Rightarrow$ $9\times9=81$

□$\boxed{0}$□ $\Rightarrow$ $9\times9=81$

□□□$\boxed{0}$ $\Rightarrow$ $9\times9\times9=729$

□□$\boxed{0}$□ $\Rightarrow$ $9\times9\times9=729$

□$\boxed{0}$□□ $\Rightarrow$ $9\times9\times9=729$

∴共有 $9+81+81+729+729+729=2358$ 個

⑵ □ $\Rightarrow$ 9

□□ $\Rightarrow$ $9\times9=81$

□□□ $\Rightarrow$ $9\times9\times9=729$

□□□□ $\Rightarrow$ $9\times9\times9\times9=6561$

∴共有 $9+81+729+6561=7380$ 個

第 13 回

13 1.＋＋＋＋＋＋＋－－－的排法有 $\frac{10!}{7!\times3!}=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$ 種

2.甲、乙、丙⋯等 10 人排開不動，*pppbbbbbnn* 排成一列後，即依序分給 10 人

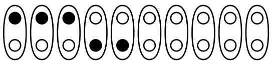
∴ $\frac{10!}{3!\times5!\times2!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{3!\times2!}=2520$ 種

3.人人生生如如戲戲

⑴ $\frac{8!}{2!\times2!\times2!\times2!}=\frac{40320}{16}=2520$ 種

⑵ $\frac{7!}{2!\times2!\times2!}=\frac{5040}{8}=630$ 種

⑶ $$\underbrace{2520}_{\text{任意}}-\underbrace{630}_{\text{「人人」相鄰}}-\underbrace{630}_{\text{「生生」相鄰}}+\underbrace{\frac{6!}{2!\times 2!}}_{\text{「人人」相鄰且「生生」相鄰}}=1440\text{ 種}$$

4.  $\therefore \dfrac{10!}{3!\times 2!\times 5!}=2520$ 種

5. 依同異討論，0 不能在首位

①四同：$\begin{cases}22220 \Rightarrow \dfrac{5!}{4!}-1=4\\ 22221 \Rightarrow \dfrac{5!}{4!}=5\end{cases}$

②三同二同：22211 $\Rightarrow \dfrac{5!}{3!\times 2!}=10$

③三同二異：22210 $\Rightarrow \dfrac{5!}{3!}-\dfrac{4!}{3!}=20-4=16$

④二同二同：22110 $\Rightarrow \dfrac{5!}{2!\times 2!}-\dfrac{4!}{2!\times 2!}=30-6=24$

∴共 $4+5+10+16+24=59$ 個

6. $$\underbrace{\frac{7!}{4!\times 3!}}_{\substack{\text{□□□□○○○}\\\text{排成一列}}}\times\underbrace{1}_{\substack{\text{「大江東去」依序}\\\text{放入□□□□}}}\times\underbrace{1}_{\substack{\text{「浪淘盡」依序}\\\text{放入○○○}}}=35\text{ 種}$$

7. $$\underbrace{\frac{5!}{3!}}_{\text{□□□丁戊}}\times\underbrace{2\times 1}_{\substack{\text{甲、乙、丙}\\\text{放入□□□}}}=40\text{ 種}$$

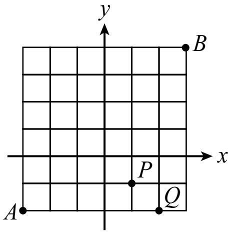
8. ⑴ $\dfrac{5!}{3!\times 2!}\times\dfrac{7!}{3!\times 4!}=10\times 35=350$ 種

⑵ $\dfrac{12!}{6!\times 6!}-350=924-350=574$ 種

⑶設關卡 $P(1,-1)$ 與 $Q(2,-2)$

過 $P \Rightarrow \dfrac{5!}{4!}\times\dfrac{7!}{2!\times 5!}$
$=5\times 21=105$

過 $Q \Rightarrow 1\times\dfrac{7!}{6!}=7$　∴共有 $105+7=112$ 種



第 14 回

14 1. ⑴原式 $\Rightarrow \dfrac{(n+2)!}{4!(n-2)!}=11\cdot\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$\Rightarrow \dfrac{(n+2)(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=11\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)=12\cdot 11$　∴ $n+2=12$，得 $n=10$

⑵① $r+3=2r-1$，得 $r=4$

② $(r+3)+(2r-1)=20$，得 $r=6$　∴ $r=4$ 或 6

2. ⑴ $C^{13}_{10}=C^{13}_{3}=\dfrac{13\times 12\times 11}{3\times 2\times 1}=286$ 種

⑵ $$\underbrace{C^5_3\times C^8_7}_{\text{前 5 選 3}}+\underbrace{C^5_4\times C^8_6}_{\text{前 5 選 4}}+\underbrace{C^5_5\times C^8_5}_{\text{前 5 選 5}}=80+140+56=276\text{ 種}$$

3. 1 ～ 11 中，奇數有 6 個，偶數有 5 個

⑴和為奇數 $\begin{cases}\text{三奇} \Rightarrow C^6_3=20\\ \text{一奇二偶} \Rightarrow C^6_1\times C^5_2=60\end{cases}$

∴共 $20+60=80$ 組

⑵用倒扣：$\underbrace{C^{11}_3}_{\text{任取 3 個}}-\underbrace{C^6_3}_{\text{三奇}}=165-20=145$ 組

4. 大雄家　阿福家

4 男　4 女 $\Rightarrow C^4_4\times C^4_4=1$

3 男 1 女　1 男 3 女 $\Rightarrow (C^4_3\times C^3_1)\times(C^3_1\times C^4_3)=144$

2 男 2 女　2 男 2 女 $\Rightarrow (C^4_2\times C^3_2)\times(C^3_2\times C^4_2)=324$

1 男 3 女　3 男 1 女 $\Rightarrow (C^4_1\times C^3_3)\times(C^3_3\times C^4_1)=16$

∴共有 $1+144+324+16=485$ 種

5. ⑴ $$\underbrace{C^6_2\times C^6_2}_{\text{2 女 2 男}}+\underbrace{C^6_3\times C^6_1}_{\text{3 女 1 男}}+\underbrace{C^6_4}_{\text{4 女}}=225+120+15=360\text{ 種}$$

⑵ $$C^6_1\times\underbrace{(C^5_2\times C^2_1\times C^2_1)}_{\text{剩 5 對選 2 對再各取 1 人}}=6\times 40=240\text{ 種}$$

⑶ $C^6_4\times C^2_1\times C^2_1\times C^2_1\times C^2_1=15\times 2\times 2\times 2\times 2=240$ 種

6. $$\underbrace{C^{13}_2\times C^4_2\times C^4_2}_{\text{選 2 種點數各取 2 張}}\times\underbrace{C^{44}_1}_{\text{剩 44 張取 1 張}}=78\times 6\times 6\times 44=123552\text{ 種}$$

7. 依同異的個數討論

①四同：1 種　②恰三同：4 種（aaa 配 b、c、d、e 之一）

③恰二同另二同：$C^3_2=3$ 種（aa、bb、cc 取二）

④恰二同另二異：$C^3_1\times C^4_2=3\times 6=18$ 種（aa、bb、cc 取一，剩的四種字母取兩種）

⑤全異：$C^5_4=5$ 種　∴共 $1+4+3+18+5=31$ 種

第 15 回

15 1. $$\underbrace{\frac{6!}{4!}}_{\substack{{}_\wedge\text{(pp)}{}_\wedge m{}_\wedge s{}_\wedge s{}_\wedge s{}_\wedge s{}_\wedge\\\text{先排}}}\times\underbrace{C^7_4}_{\substack{\text{7 個空隙}\\\text{選 4 個放 } i}}=30\times 35=1050\text{ 種}$$

2. ⑴ $_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$○$_\wedge$白球排成一列，7 個空隙取 4 個

∴ $C^7_4=35$ 種

⑵ 4 黑 1 白 $\Rightarrow \dfrac{5!}{4!}=5$　3 黑 2 白 $\Rightarrow \dfrac{5!}{3!\times 2!}=10$

2 黑 3 白 $\Rightarrow \dfrac{5!}{2!\times 3!}=10$　1 黑 4 白 $\Rightarrow \dfrac{5!}{4!}=5$

5 白 $\Rightarrow$ 1　∴共有 $5+10+10+5+1=31$ 種

3. ⑴ $C^9_3\times C^6_3\times C^3_3=84\times 20\times 1=1680$ 種

⑵ $C^9_4\times C^5_3\times C^2_2=126\times 10\times 1=1260$ 種

⑶ $C^9_3\times C^6_3\times C^3_3\times\dfrac{1}{3!}=280$ 種

⑷ $C^9_5\times C^4_2\times C^2_2\times\dfrac{1}{2!}=126\times 6\times 1\times\dfrac{1}{2}=378$ 種

4. 先分成三堆，再排列分給甲、乙、丙三人

∴ $(C^{12}_6\times C^6_3\times C^3_3\times\dfrac{1}{2!})\times 3!=55440$ 種

5. ⑴ $\underset{\text{忠}}{C^8_2}\times\underset{\text{孝}}{C^6_2}\times\underset{\text{仁}}{C^4_2}\times\underset{\text{愛}}{C^2_2}=28\times 15\times 6\times 1=2520$ 種

⑵ $$\underbrace{(C^4_1\times C^5_2)}_{\text{選一班放兩男}}\times\underbrace{3!}_{\text{三男排列}}\times\underbrace{3!}_{\text{三女排列}}=40\times 6\times 6=1440\text{ 種}$$

6. $$\underbrace{(C^2_1\times C^1_1\times\frac{1}{2!})}_{\text{甲、乙兩人分成 2 堆}}\times\underbrace{C^6_3}_{\text{甲抓 3 人作伴}}\times\underbrace{C^3_3}_{\text{乙抓 3 人作伴}}=20\text{ 種}$$

7. $$\underbrace{C^3_1}_{\text{選一間住 4 人}}\times(\underbrace{C^8_2\times C^6_3\times C^3_3}_{\substack{\text{兄弟住 4 人房}\\\text{選 2 人作伴}}}+\underbrace{C^2_1\times C^8_1\times C^7_4\times C^3_3}_{\substack{\text{兄弟住 3 人房}\\\text{選 1 人作伴}}})$$

$=3\times(560+560)=3360$ 種