目　次

1 極　限

1-1 數列的極限

一個數列可以按照規則無止盡地延續下去，我們感興趣的是，這樣的數列會不會靠近某個定數呢？這就是極限的觀念，近代數學可謂植基於此，而人類的知識領域，由此獲得極大進展。

範例研習特區

1 無窮數列的收斂與發散

1. **極限值**：無窮數列 $\langle a_n\rangle$，當 n 很大時，若 a_n 的值靠近一個定數 k，則稱 k 為數列 $\langle a_n\rangle$ 的極限，記為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$，式中「$\infty$」讀作無限大。

例 數列 $\langle \frac{n}{n+1}\rangle = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$，會不斷靠近 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$。

注意 所謂「靠近」是比較白話的粗略講法，嚴謹的說法是「從某項開始，數列 $\langle a_n\rangle$ 與 k 的誤差要多麼小都可以」，這是大學微積分的說法。

2. **收斂與發散**：無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 若極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，則稱 $\langle a_n\rangle$ 為收斂數列。反之，若極限值不存在，則稱 $\langle a_n\rangle$ 為發散數列。

例 (1) $\langle (-1)^n\rangle = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ 為數值呈跳動型態的發散數列。

(2) $\langle \frac{n^2}{n+1}\rangle = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \cdots$ 為數值遞增至無限大的發散數列。

3. **求極限的方法**：若分子、分母都隨項數 n 的增加而趨近無限大時，最重要、常用的手法就是把第 n 項的分子分母同除以適當的數看出數列的極限，常見的題型有三類：

(1) 分式型：如 $a_n = \frac{2n^2+n+1}{3n^2-n}$，把第 n 項的分子、分母同除以 n^2 即可看出極限。

(2) 根式型：如 $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+2}$，先將分子有理化再上下同除以 n。

(3) 指數型：如 $a_n = \frac{5^n+2^n}{5^n-3^n}$，把第 n 項的分子、分母同除以 5^n 即可看出極限。

範例 1　認識無窮數列的極限　如何看出極限？經過處理之後，跟著感覺走就對了！

1. 觀察以下各數列，判斷收斂或發散，並寫出極限值：

(1) $\langle a_n\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{2},(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2,(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^3,(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^4,\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^n=$______。

(2) $\langle a_n\rangle=-\dfrac{\pi}{4},(\dfrac{\pi}{4})^2,-(\dfrac{\pi}{4})^3,(\dfrac{\pi}{4})^4,-(\dfrac{\pi}{4})^5,(\dfrac{\pi}{4})^6,\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{\pi}{4})^n=$______。

(3) $\langle a_n\rangle=\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},-\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{6},-\dfrac{6}{7},\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______。

(4) $\langle a_n\rangle=3,3,3,3,3,3,3,\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______。

(5) $\langle a_n\rangle=\log\dfrac{1}{1},\log\dfrac{1}{2},\log\dfrac{1}{3},\log\dfrac{1}{4},\log\dfrac{1}{5},\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______。

解

> **小小叮嚀**
> 靠近一個定數才算收斂，在幾個數附近跳來跳去為發散

2. 設 n 為正整數，試求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi)=$______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)=$______。

解

類題 1　試判別下列各數列為收斂或發散，並寫出極限值：

(1) $\langle a_n\rangle=1,-1,1,-1,1,-1,\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}=$______。

(2) $\langle a_n\rangle=1.01,(1.01)^2,(1.01)^3,(1.01)^4,(1.01)^5,\cdots,(1.01)^n,\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}(1.01)^n=$______。

(3) $\langle a_n\rangle=(1.01)^{-1},(1.01)^{-2},(1.01)^{-3},(1.01)^{-4},\cdots,(1.01)^{-n},\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}(1.01)^{-n}=$______。

(4) $\langle a_n\rangle=999,999^{\frac{1}{2}},999^{\frac{1}{3}},999^{\frac{1}{4}},999^{\frac{1}{5}},999^{\frac{1}{6}},999^{\frac{1}{7}},\cdots,999^{\frac{1}{n}},\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}999^{\frac{1}{n}}=$______。

(5) $\langle a_n\rangle=1^{-1},2^{-2},3^{-3},4^{-4},5^{-5},\cdots,n^{-n},\cdots$為______，$\lim\limits_{n\to\infty}(n^{-n})=$______。

類題 2　設 $n\in N$，試求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}=$______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{n}=$______　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{\pi}{n}=$______。

類題 3　若有一圓半徑為 3，其內接正 n 邊形的周長為 L_n，面積為 A_n，求極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ =______，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ =______。

這題必考

範例 2　分式數列求極限

兩個多項式相除就是分式，極限值由最高次項來決定。

1. 試求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-7n^2+n+2}{4n^3+6n^2-5n+1}=$______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+7n}{2n^3+5}=$______

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{2n+7}=$______。

解

> **歸納心得**
> 分式求極限的心得：
> (1)分子、分母次數相同，極限值為最高次項的係數比值
> (2)分母次數大，極限為 0
> (3)分子次數大，則發散

2. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)^2}{(1+2+3+\cdots+n)^3}=$______。

解

> **求和公式**
> 1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
> 2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
> 3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}-\dfrac{n^2+3n-5}{n+2}\right)=$______。

解

> **解題技巧**
> 先通分合併化簡

類題 4　試求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+6n^2+1}{2n^3+4n+8}=$______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+9n}{2n^3+1}=$______

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+9}{2n^2+7}=$______。

類題 28　n 為自然數，證明：$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$。

歷年大考精選

1. 令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n。請問極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 為下列哪一選項？______

(A) 0　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) 3　(E)不存在

103 指考甲

2. 設 $\langle a_n\rangle$ 為一等差數列。已知 $a_2+a_4+a_6=186$，$a_3+a_7=110$。令 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。則極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^2}=$______。（請化為最簡分數）

105 指考乙

3. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是一公比為 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比數列且 $a_1=1$。試問以下哪些數列會收斂？______

(A) $-a_1, -a_2, \cdots, -a_n, \cdots$　(B) $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_n^2, \cdots$　(C) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_n}, \cdots$

(D) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}, \cdots$　(E) $\log a_1, \log a_2, \cdots, \log a_n, \cdots$

106 指考乙

4. 設 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$，試選出正確的選項。______

(A)對所有的正整數 n，$a_n>3$ 均成立　(B)存在正整數 n，使得 $a_{n+1}>4$

(C)對所有的正整數 n，$b_n^2<b_{n+1}^2$ 均成立　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2=4$

(E) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$

108 指考甲

5. 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $b_n+\frac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$。已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=6$，試選出正確的選項。______

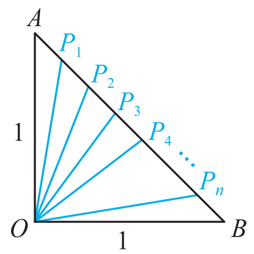
(A) $b_n<6-\frac{4n-1}{n}$　(B) $b_n>\frac{4n-1}{2n}$　(C)數列 $\langle b_n\rangle$ 有可能發散

(D) $a_{10000}<6.1$　(E) $a_{10000}>5.9$

111 分科甲

資優挑戰園地

1. 設 ΔOAB 是等腰直角三角形，$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，$\angle AOB=90^\circ$，在 $\overline{AB}$ 上有 n 個等分點 P_1、P_2、P_3、⋯、P_n 將 $\overline{AB}$ 分成 $(n+1)$ 等分，如右圖，令 $\overline{OP_1}^2$、$\overline{OP_2}^2$、$\overline{OP_3}^2$、⋯、$\overline{OP_n}^2$ 的算術平均數為 a_n，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______。



解

2. 設 n 為正整數，方程組 $\begin{cases}2x+y-z=0 & \cdots① \\ x+y+3z=0 & \cdots② \\ x+ny-3nz=2n & \cdots③\end{cases}$ 可解得唯一解 (x_n,y_n,z_n)，請問下列哪些選項的推論為真？______

(A) $x_n<0$ 必成立
(B) $y_n<0$ 必成立
(C) $x_n>z_n$ 必成立
(D)數列 $y_1,y_2,y_3,\cdots$ 為收斂且極限值比 1 大
(E)數列 $z_1,z_2,z_3,\cdots$ 為收斂且極限值為負

解

3. 無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 各項均為實數，在下列哪些選項的條件下有可能收斂，使得極限值存在？______

(A) $\langle a_n\rangle$ 中有無限多項比 1 小，有無限多項比 2 大
(B) $\langle a_n\rangle$ 中有無限多項比 1 小，有無限多項比 1 大
(C) $\langle a_n\rangle$ 中有有限項比 1 小，有有限項比 2 大
(D) $\langle a_n\rangle$ 中有有限項比 1 小，有有限項比 1 大
(E) $\langle a_n\rangle$ 中有有限項比 1 小，有無限多項比 2 大

解

1 極 限

1-1 數列的極限

範例研習特區

範例 1

2 1.(1)發散，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{5}}{2})^n$ 不存在　(2)收斂，$\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{\pi}{4})^n=0$

(3)發散，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在　(4)收斂，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

(5)發散，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在

2.(1) $\sin\pi,\sin2\pi,\sin3\pi,\cdots$之值均為 0，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi)=0$

(2) $\cos\pi,\cos2\pi,\cos3\pi,\cdots$之值為 $-1,1,-1,1,\cdots$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)$ 不存在

類 題

1 (1)發散；不存在　(2)發散；不存在　(3)收斂；0
(4)收斂；1　(5)收斂；0

2 (1) 0　(2) 1　(3) 0　**3** 6π；9π

2 n 很大時：(1) $\sin\frac{\pi}{n}$ 靠近 $\sin0=0$

(2) $\cos\frac{\pi}{n}$ 靠近 $\cos0=1$　(3) $\tan\frac{\pi}{n}$ 靠近 $\tan0=0$

3 **3** $n\to\infty$ 時，L_n 的極限值即為圓周長，A_n 的極限值即為圓面積

① $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=2\pi\cdot3=6\pi$　② $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi\cdot3^2=9\pi$

範例 2

1.(1)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{4+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{5}{4}$

(2)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{2+\frac{5}{n^3}}=\dfrac{0+0}{2+0}=0$

(3)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}=\dfrac{3}{0}$，為發散，極限不存在

2.所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)]^2}{[\frac{1}{2}n(n+1)]^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{36}n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{\frac{1}{8}n^3(n+1)^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8(2n+1)^2}{36n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{32n^2+32n+8}{36n^2+36n}=\dfrac{32}{36}=\dfrac{8}{9}$

3.所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+n+1)(n+2)-(n^2+3n-5)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3+3n^2+3n+2)-(n^3+4n^2-2n-5)}{n^2+3n+2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+5n+7}{n^2+3n+2}=-1$

類 題

4 (1) $\frac{5}{2}$　(2) 0　(3)不存在　**5** (1) $\frac{1}{3}$　(2) 12　**6** -5

7 $\frac{1}{2}$

4 (1)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{4}{n^2}+\frac{8}{n^3}}=\dfrac{5}{2}$

(2)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{4}{n}+\frac{9}{n^2}}{2+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{0}{2}=0$

(3)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{9}{n^3}}{\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}}=\dfrac{4}{0}$，不存在

4 **5** (1)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6n^3+6n^2+6}$

$=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+2n^2+5}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n^4+8n^2+20}{n^4+2n^3+n^2}=12$

6 所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-2n)(n^2+n)-(n^3+n^2)(n+3)}{(n+3)(n^2+n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^4-n^3-2n^2)-(n^4+4n^3+3n^2)}{n^3+4n^2+3n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n^3-5n^2}{n^3+4n^2+3n}=-5$

7 $a_n=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})\times\cdots$

$\times(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})$

$=\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{3}{2}}\times\cancel{\frac{2}{3}}\times\cancel{\frac{4}{3}}\times\cancel{\frac{3}{4}}\times\cancel{\frac{5}{4}}\times\cdots\times\cancel{\frac{n-1}{n}}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$

範例 3

1. $\because\ \frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow$ 同除以 $\sqrt{n}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9+\frac{50}{n}}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\dfrac{3}{2}$

2.原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{1\times(\sqrt{n^2+n+1}+n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\times\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+n+1}+n)\times\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{2}$

而 $[\frac{1}{2}-\frac{1}{4(k+1)}]-[\frac{1}{2}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{(2k+2)^2}]$

$=\frac{1}{4k}-\frac{1}{4(k+1)}-\frac{1}{4(k+1)^2}$

$=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{4k(k+1)^2}=\frac{1}{4k(k+1)^2}>0$

∴左式 $\le \frac{1}{2}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{(2k+2)^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4(k+1)}=$ 右式

③∴ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立，由數學歸納法原理得證

歷年大考精選

1. 用長除法可看出 $2x^n+\cdots$ 除以 $3^nx^n+\cdots$ 的商為 $\frac{2}{3^n}$

設餘式為 $R_n(x)$，則 $2(x+1)^n=(3x-2)^n\cdot\frac{2}{3^n}+R_n(x)$

代 $x=0$ 得 $2=(-2)^n\cdot\frac{2}{3^n}+R_n(0)$

則 $R_n(0)=r_n=2-2\cdot(\frac{-2}{3})^n$

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-2}{3})^n=0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}[2-2\cdot(\frac{-2}{3})^n]=2$

∴選(C)

2. 設首項為 a，公差為 d

則 $a_2+a_4+a_6=(a+d)+(a+3d)+(a+5d)$

$=3a+9d=186\cdots$①

$a_3+a_7=(a+2d)+(a+6d)=2a+8d=110\cdots$②

由①②得 $d=-7$，$a=83$

則 $s_n=\frac{2a+(n-1)d}{2}\times n=\frac{166+(n-1)\times(-7)}{2}\times n$

$=\frac{173-7n}{2}\times n=\frac{-7n^2+173n}{2}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{7}{2}+\frac{173}{2n})=-\frac{7}{2}$

3. 原數列為 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}}$

(A)變成 $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots$，仍收斂

(B)變成 $1,\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\cdots$，仍收斂

(C)變成 $\sqrt{1},\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{4}},\sqrt{\frac{1}{8}},\cdots$，仍收斂

(D)變成 $1,2,4,8,\cdots$，則發散到 ∞

(E)變成 $\log 1,\log\frac{1}{2},\log\frac{1}{4},\log\frac{1}{8},\cdots$，則發散到 $-\infty$

故選(A)(B)(C)

4. (A)只能確定從某項開始 $a_n>3$ 成立

(B)因 $\langle a_n\rangle$ 遞增且靠近 4，所以 $\langle a_n\rangle$ 每項都比 4 小

(C)∵ $a_n<b_n^2<a_{n+1}<b_{n+1}^2<a_{n+2}$ ∴ $b_n^2<b_{n+1}^2$ 成立

(D)由「夾擠定理」知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$

(E) $\langle b_n\rangle$ 可能一正一負，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 不一定存在

故選(C)(D)

5. (A) n 代 1 得 $b_1+\frac{3}{1}<a_1<3b_1$

若 $b_1=4$ 可滿足條件但選項不成立

(B)由 $b_n+\frac{4n-1}{n}<3b_n$，得 $\frac{4n-1}{2n}<b_n$ 成立

(C)由 $b_n+\frac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$，得 $\frac{a_n}{3}<b_n<a_n-\frac{4n-1}{n}$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{3}=2$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\frac{4n-1}{n})=6-4=2$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$ 為收斂

(D)(E)由 $b_{10000}+3.9999<a_{10000}<3b_{10000}$ 知 $b_{10000}>\frac{3.9999}{2}$

∴ $a_{10000}>\frac{3.9999}{2}+3.9999=5.99985$

∴ $a_{10000}>5.9$ 成立，但 a_{10000} 有可能比 6.1 大

故選(B)(E)

資優挑戰園地

14 1. 由畢氏定理

$\overline{OP_1}^2=(\frac{1}{n+1})^2+(\frac{n}{n+1})^2$

$\overline{OP_2}^2=(\frac{2}{n+1})^2+(\frac{n-1}{n+1})^2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\overline{OP_n}^2=(\frac{n}{n+1})^2+(\frac{1}{n+1})^2$

∴ $a_n=\frac{\overline{OP_1}^2+\overline{OP_2}^2+\cdots+\overline{OP_n}^2}{n}$

$=\frac{[(\frac{1}{n+1})^2+(\frac{2}{n+1})^2+\cdots+(\frac{n}{n+1})^2]\times 2}{n}$

$=\frac{2}{n}\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(n+1)^2}=\frac{2}{n(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{2n+1}{3(n+1)}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+3}=\frac{2}{3}$

2. ② × 2 − ①得 $y+7z=0$

③ − ②得 $(n-1)y-(3n+3)z=2n\cdots$④

∴ $y=-7z$ 代入④得

$(-7n+7)z-(3n+3)z=(-10n+4)z=2n$

∴ $z=\frac{n}{-5n+2}$，代回得 $y=\frac{7n}{5n-2}$，$x=\frac{4n}{-5n+2}$

∴(B)應 $y_n>0$ 恆成立　(C)應 $x_n<z_n$ 恆成立

(D) $\langle y_n\rangle$ 為收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n}{5n-2}=\frac{7}{5}>1$

(E) $\langle z_n\rangle$ 為收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=-\frac{1}{5}<0$

故選(A)(D)(E)

3. (A)在此條件下，$\langle a_n\rangle$ 必為發散

(B)如 $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$，收斂到 1

(C)如 $a_n=1.8+\frac{(-1)^n}{n}$，收斂到 1.8

(D)在此條件下，$\langle a_n\rangle$ 從某項開始均為 1，必收斂到 1

(E)如 $a_n=\frac{3n-10}{n}$，收斂到 3 且前 4 項比 1 小

故選(B)(C)(D)(E)

對話式®

高中選修 數學甲講義

課後練習本

班級：__________ 姓名：__________ 座號：______

第 1 回　1-1 無窮數列的極限 I

1 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-7}{3n+20}=$ ______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-101n-2001}{10n^2+20n+1001}=$ ______。

解

2 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n}{2n^3+15}=$ ______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+5}}{\sqrt{n^2+9n+8}}=$ ______。

解

3 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2-7n+2}}{4n-1}=$ ______　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^3+5n-9}}{(3n-2)\sqrt{5n+1}}=$ ______。

解

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{n^2}=$ ______。

解

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n+1}-\dfrac{n^2+2}{n+2}\right)=$ ______。

解

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-5n+1}\right)=$ ______。

解

7 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)=$ ______。

解

4.得到紅包 $\begin{cases} ○○ & \Rightarrow \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{25} \\ \times○○ & \Rightarrow \dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{125} \end{cases}$

$\therefore P(\text{成功})=\dfrac{1}{25}+\dfrac{4}{125}=\dfrac{9}{125}$，則

$$E(X)=\frac{9}{125}\times1+\frac{116}{125}\times\frac{9}{125}\times2+(\frac{116}{125})^2\times\frac{9}{125}\times3+\cdots\cdots①$$

$$\frac{116}{125}E(X)=\frac{116}{125}\times\frac{9}{125}\times1+(\frac{116}{125})^2\times\frac{9}{125}\times2+\cdots\cdots②$$

①－②為 $\dfrac{9}{125}E(X)=\dfrac{9}{125}+\dfrac{116}{125}\times\dfrac{9}{125}+(\dfrac{116}{125})^2\times\dfrac{9}{125}+\cdots$

$$\overset{\text{代}\frac{a}{1-r}}{=\!=\!=}\frac{\frac{9}{125}}{1-\frac{116}{125}}=1 \quad \therefore E(X)=\frac{125}{9}=13.8\cdots\approx14$$

《速解》代幾何分布 $X\sim G(\dfrac{9}{125})$ 的期望值公式得

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{125}{9}=13.8\cdots\approx14$$

資優挑戰園地

270 1.$E_A=np$，$\sigma_A=\sqrt{np(1-p)}$，$E_B=nq$，$\sigma_B=\sqrt{nq(1-q)}$

則 $\dfrac{E_A}{E_B}=\dfrac{np}{nq}=9 \quad \therefore p=9q\cdots①$

$\dfrac{\sigma_A}{\sigma_B}=\dfrac{\sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{nq(1-q)}}=\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{q(1-q)}}=2 \quad \therefore \dfrac{p(1-p)}{q(1-q)}=4\cdots②$

①代入②得 $9\cdot\dfrac{1-9q}{1-q}=4 \quad \therefore q=\dfrac{5}{77}$，代回①得 $p=\dfrac{45}{77}$

2.各組中獎機率為 p_1、p_2、p_3、p_4

而 $x(1-x)=-x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}$

則 $\sigma=\sqrt{20p_iq_i}=\sqrt{20p_i(1-p_i)}\le\sqrt{20\times\dfrac{1}{4}}=\sqrt{5}\approx2.2$

而丙組的標準差顯然過大，故選(C)

3.＋＋ $\to$ 2 次，機率為 p^2

＋－＋
－＋＋ $\to$ 3 次，機率為 $2(1-p)p^2$

＋－－＋
－＋－＋
－－＋＋ $\to$ 4 次，機率為 $3(1-p)^2p^2$

⋮ ⋮

$\therefore E(X)=2p^2+3\times2\times(1-p)p^2+4\times3\times(1-p)^2p^2$
$+5\times4\times(1-p)^3p^2+\cdots\cdots①$

同乘 $(1-p)$ 為 $(1-p)\times E(X)=2\times1\times(1-p)p^2$
$+3\times2\times(1-p)^2p^2+4\times3\times(1-p)^3p^2+\cdots\cdots②$

①－②得 $p\times E(X)=2p^2+2\times2(1-p)p^2$
$+3\times2\times(1-p)^2p^2+4\times2\times(1-p)^3p^2+\cdots\cdots③$

再同乘 $(1-p)$ 得 $(1-p)p\times E(X)=2(1-p)p^2$
$+2\times2\times(1-p)^2p^2+3\times2\times(1-p)^3p^2+\cdots\cdots④$

③－④得 $p^2\times E(X)=2p^2+2(1-p)p^2+2(1-p)^2p^2$

$$+2(1-p)^3p^2+\cdots\underset{\text{代}\frac{a}{1-r}}{=}\frac{2p^2}{1-(1-p)}=2p$$

$$\therefore E(X)=\frac{2p}{p^2}=\frac{2}{p}$$

第 1 回

1 1.(1)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{7}{n}}{3+\frac{20}{n}}=\dfrac{5}{3}$

(2)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{101}{n}-\frac{2001}{n^2}}{10+\frac{20}{n}+\frac{1001}{n^2}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

2.(1)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{15}{n^3}}=\dfrac{0}{2}=0$

(2)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{9}{n}+\frac{8}{n^2}}}=\dfrac{0}{\sqrt{1}}=0$

3.(1)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}}}{4-\frac{1}{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2)所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2+\frac{5}{n^2}-\frac{9}{n^3}}}{(3-\frac{2}{n})\sqrt{5+\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{15}$

4.所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3n-1}{2}\times n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n}=\dfrac{3}{2}$

5.所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-1)(n+2)-(n^2+2)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n-4}{n^2+3n+2}=1$

6.所求

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-5n+1})(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-5n+1})}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-5n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2n+3)-(n^2-5n+1)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-5n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-5n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{7}{2}$

7.所求

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\times\dfrac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5})\times(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}=\dfrac{8}{1+1}=4$

第 2 回

2 1.所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+6\cdot(\frac{2}{4})^n}{5+2\cdot(\frac{3}{4})^n}=\dfrac{7}{5}$

2.所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+\frac{1}{4}\cdot8^n}{\frac{1}{5}\times5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{3}{8})^n+\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}\cdot(\frac{5}{8})^n}=\dfrac{0+\frac{1}{4}}{0}$

∴極限值不存在