

7

弧度與正弦函數的圖形

1

第1回

8

指數函數與對數函數

16

第2至3回

9

平面向量與圖形設計

44

第4至5回

10

空間概念與空間坐標

67

第6回

11

條件機率

92

第7回

12

矩陣的運算及其應用

110

第8回

11

條件機率

學測趨勢 機率是最實用的數學，只要多給一些訊息，就可把一般的機率問題修成條件機率的題目。學測強調素養與創意，相信這是相當容易發揮的一章。

準備方向 雖然這是學測複習分量較少的一章，但由條件機率所衍生出的乘法法則、貝氏定理與獨立事件，每個主題都是命題重點，切勿輕忽。

年 度	103	104	105	106	107	108	109	110	111A+B	112A+B
學測命題數	1	2	2	0	2	1	0	2	2	2

讀完可以先練習範例 1、2、3



① 條件機率：樣本空間 S 中，若 B 事件已發生，則 A 事件發生的機率記為

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ 若每個樣本發生的機率一樣大，則 } P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)},$$

也就是把樣本空間由 S 縮小為 B 。

例 A 樣本空間 S 中有事件 A 與 B ，已知 A 事件發生的機率為 0.4， B 事件發生的機率為 0.3，兩事件同時發生的機率為 0.1，求 $P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 B 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(A|B) = \frac{2}{3}$ ， $P(B|A) = \frac{3}{4}$ ，求 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 C 由一副撲克牌（52 張）中隨機抽出一張牌，假設每一張牌被抽中的機會均等，令 A 代表抽中老 K 的事件， B 代表抽中紅心的事件，求 $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 D 擲三枚相同且均勻的銅板一次，則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- ② **乘法法則**：由條件機率的定義 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ 及 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 可移項得 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$ ，常用來計算 A 發生且 B 發生的機率，並可推廣到 $P(A \cap B \cap C)$ 。

例 A 某公司辦理面試，依序通過筆試與口試方能錄取，甲君通過筆試的機率為 $\frac{3}{7}$ ，通過筆試後才可參加口試且通過口試的機率是 $\frac{1}{5}$ ，則甲君被錄取的機率為 _____。

例 B 甲與乙同班，班上共有 25 個同學，要抽籤選 4 個人當幹部，則甲和乙均被選中的機率為 _____。

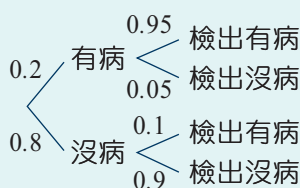
例 C 箱中有 5 白球 3 黑球，每球被取的機率相等，則先取一球為白球，且再取兩球均為黑球的機率為 _____。

例 D 有一按鈕遊戲機，每投幣一枚，可按遊戲機三次。第一次按下會出現黑色或白色的機率各為 $\frac{1}{2}$ ；第二或第三次按下，出現與前一次同色的機率為 $\frac{1}{3}$ ，不同色的機率為 $\frac{2}{3}$ 。今某甲投幣一枚後，按三次均出現同色的機率為 _____。（化成最簡分數）

答對率 69% 109 學測

- ③ **分割、列聯表與貝氏定理**：若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 兩兩互斥且聯集為樣本空間 S ，則稱 $A_1 \sim A_n$ 為 S 的一組分割。特別地，利用兩種屬性 A, A' 與 B, B' 的交集可將樣本空間分割為四塊，將元素個數製成表格如右，即為**列聯表**。**貝氏定理**即為針對一組分割來討論某事件的條件機率，習慣用樹狀圖或分布圖來求解，如右圖。

	A	A'
B	$n(A \cap B)$	$n(A' \cap B)$
B'	$n(A \cap B')$	$n(A' \cap B')$



0.2×0.95	0.8×0.1	檢出有病
有病 0.2	沒病 0.8	檢出有病
0.2×0.05	0.8×0.9	檢出沒病

例 C 一顆不均勻的骰子，丟擲 500 次並記錄各點數的出現次數如右表，試問擲此骰子兩次，點數和為 10 的機率為_____。

點數	1	2	3	4	5	6	合計
次數	23	51	66	90	120	150	500

範例 1 條件機率的定義

樣本空間 S 中有事件 A 與 B ，已知 $P(A) = 0.5$ ， $P(B) = 0.7$ ，求 $P(A|B)$ 的最大值可為_____，最小值可為_____。

解

類題 1 樣本空間中有 A 、 B 兩事件，已知 $P(A) = 0.8$ ， $P(B) = 0.3$ ，請問下列各選項哪些為真？_____

- | | |
|---------------------------------|---------------------------|
| (A) $P(A') > P(B')$ | (B) $P(A - B) > P(B - A)$ |
| (C) $P(A \cup B) > P(A \cap B)$ | (D) $P(A B) > P(B A)$ |
| (E) $P(A' B') > P(B' A')$ | |

類題 2 事件 A 與 B ，且 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，則下列哪些選項的機率值為 1？_____

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| (A) $P(A B)$ | (B) $P(B A)$ | (C) $P(A B')$ |
| (D) $P(B A')$ | (E) $P(A' B')$ | (F) $P(B' A')$ |



類題 20

籤筒中有十支籤，其中有三支為中獎籤，現由甲、乙、丙、丁、戊 5 人依序抽籤，每人抽一支籤且取後不放回，當三支中獎籤被抽出後即停止活動，求：

- (1) 戊沒辦法抽籤的機率為 _____ (2) 戊有抽籤且沒有抽中的機率為 _____
 (3) 抽籤結束後戊沒有中獎的機率為 _____。

最新大考精選

1. 已知某地區有 30% 的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率則為 60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 P ；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 P' 。試問 $\frac{P}{P'}$ 最接近哪一選項？

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11 答對率 53% 111 學測 A

2. 根據某國對失蹤輕航機的調查得知：失蹤輕航機中有 70% 後來會被找到，在被找到的輕航機當中，有 60% 裝設緊急定位傳送器；而沒被找到的失蹤輕航機當中，則有 90% 未裝設緊急定位傳送器。緊急定位傳送器會在飛機失事墜毀時發送訊號，讓搜救人員可以定位。現有一架輕航機失蹤，若已知該機有裝設緊急定位傳送器，則它會被找到的機率為 _____。（化為最簡分數）

答對率 52% 111 學測 B

3. 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數 n ，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

- (A) $p_{n+1} > p_n$ 全對率 29% 112 學測 A
 (B) $p_3 = 0.3$
 (C) $\langle p_n \rangle$ 為等差數列
 (D) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 $p_2 - p_1$
 (E) 玩此遊戲 n 次且 $n \geq 2$ 時，至少中獎 2 次的機率等於 $2p_n$

- _____ 4. 袋子裡有編號分別為 $1, 2, \dots, 100$ 的 100 顆球，某甲從袋中隨機抽取一球，每顆球被抽到的機率均相等。試問在下列哪個選項的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率最大？
- (A) 某甲抽到球的號碼是奇數
(B) 某甲抽到球的號碼是質數
(C) 某甲抽到球的號碼是 7 的倍數
(D) 某甲抽到球的號碼不是 5 的倍數
(E) 某甲抽到球的號碼小於 10
- 答對率 83% 112 學測 B

綜 合 實 力 測 驗

一 單 選 題

- _____ 1. 擲一均勻骰子，若事件 $A = \{1, 3, 5\}$ 代表奇數點數的事件，事件 $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 代表點數為 6 的因數的事件，則 $P(A|B)$ 之值為何？
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{2}{3}$
- _____ 2. 某單位有 15 人，其中血型 O 型的有 7 人，B 型的有 5 人，A 型的有 3 人，現從中任取 2 人，求第 1 人是 B 型且第 2 人是 O 型的機率為何？
- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{3}$
- _____ 3. 設 A 、 B 為二事件且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ， $P(A') = \frac{2}{3}$ ，若 A 、 B 為獨立事件，則 $P(B'|A)$ 之值為何？
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) $\frac{5}{8}$
- _____ 4. 高三忠班有學生 40 人，其中女生占 15 人，現將全班分成 4 個小組，第一組學生有 10 人，其中女生占 3 人，若從該班任選一個學生代表，已知選到的是女生，則她是第一組學生的機率為何？
- (A) $\frac{3}{40}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{32}{45}$

(D) 北緯 30° 緯圈半徑為 $R \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ ，前者為

$$2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi R}{2}, \text{ 後者為 } R \cdot \frac{2\pi}{3}, \text{ 兩者不相等}$$

(E) 因 A 、 C 、北極點連成正三角形，所以兩直線夾成 60° 角

綜合實力測驗

- 1.(C) 2.(C) 3.(D) 4.(E) 5.(A)(B)(D) 6.(A)(B)(C)(E)
 7.(A)(B)(C)(D)(E) 8.(A)(B)(C)(E) 9. $(-5, 4, 7)$
 10. $(0, 2, 0)$ 11. $2\sqrt{7}$ 12. $\sqrt{117}$
 13. (1) $\frac{\pi}{12}R$ (2)(D) (3) $(\frac{\sqrt{3}}{4}R, \frac{1}{4}R, \frac{\sqrt{3}}{2}R)$

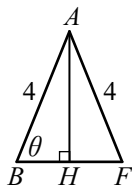
1. $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{BF}$

$\Rightarrow \angle ABF$ 為平面 $ABCD$ 與平面

$BCEF$ 的兩面角，即 $\angle ABF = \theta$

又等腰三角形 ABF 的高 $\overline{AH}$ 平分 $\overline{BF}$

$$\text{故 } \overline{BH} = \frac{3}{2}, \cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$$



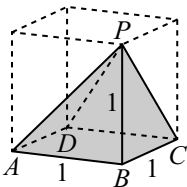
2. 如右圖，四角錐 $P-ABCD$

底面是邊長為 1 的正方形

$\overline{PB} \perp$ 底面 $ABCD$

$$\overline{PA} = \sqrt{2}, \overline{PB} = 1, \overline{PC} = \sqrt{2}$$

$$\overline{PD} = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$



3. $\overline{AC} = \overline{CH} = \overline{HA} = 6\sqrt{2}$, $\overline{FH} = \overline{FA} = \overline{FC} = 6\sqrt{2}$

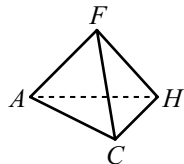
立體圖形 $ACHF$ 是邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體

所以四個面都是正三角形

正三角形面積

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{2})^2 = 18\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{表面積} = 4 \times 18\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$$



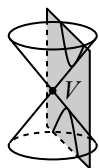
90 4. 如右圖，截痕是雙曲線

5. (A) $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ (B) $\overline{AD} \parallel \overline{FG}$

(C) $\overline{FG}$ 與 $\overline{CD}$ 互為歪斜線

(D) $\overline{FG}$ 與 $\overline{FA}$ 交於一點

(E) $\overline{FG}$ 與 $\overline{AE}$ 互為歪斜線



6. (A) $\overline{CD} \perp$ 平面 $ADHE \Rightarrow \overline{CD} \perp \overline{ED}$

(B) $\overline{EA} \perp$ 平面 $ABCD \Rightarrow \overline{EA} \perp \overline{AC}$

(C) 平面 $EFGH$ 平行平面 $ABCD \therefore \overline{EG} \parallel$ 平面 $ABCD$

(D) $\overline{EC}$ 是空間對角線， $\overline{EG}$ 是平面對角線

$$\therefore \overline{EC} \neq \overline{EG}$$

(E) $\overline{FG}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DH}$ 、 $\overline{HG}$ 、 $\overline{GC}$ ，共 6 條

7. (A) $\overline{DG} = \overline{AE} = 6 - 0 = 6 \therefore G(2, 5, 6)$

(B) $\overline{GE} = 5 - 0 = 5$

(C) G 點在 y 軸的投影點為 $B(0, 5, 0)$

$$G \text{ 點到 } y \text{ 軸距離為 } \overline{GB} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

(D) G 點在 yz 平面的投影點為 $F(0, 5, 6)$

(E) G 點在 xy 平面的投影點為 $D(2, 5, 0)$

$$\overline{OG} \text{ 在 } xy \text{ 平面的投影長為 } \overline{OD} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

8. (A) $\triangle EBD$ 是正三角形，故 $\angle EBD = 60^\circ$

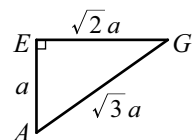
(C) 正方形對角線平分對角，故 $\angle BGC = 45^\circ$

(D) 如右圖，設 $\overline{AE} = a$ ，則

$$\sin(\angle EGA) = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle EGA \neq 30^\circ$$

(E) $\overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{AG}^2 \therefore \angle AEG = 90^\circ$



91 9. $A(-5, 0, 0)$ 、 $C(0, 4, 0)$ 、 $B(-5, 4, 0)$

$$\overline{BR} = \overline{OP} = 7 \therefore R(-5, 4, 7)$$

10. 設 $P(0, k, 0)$

$$\therefore \overline{AP} = \overline{BP} \therefore \sqrt{36 + (k-3)^2 + 1} = \sqrt{4 + (k+3)^2 + 9}$$

兩邊平方得 $k^2 - 6k + 46 = k^2 + 6k + 22$

$$\Rightarrow 12k = 24 \Rightarrow k = 2, \text{ 故 } P(0, 2, 0)$$

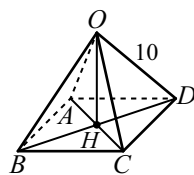
11. $\overline{AD} = 2\sqrt{10^2 - 8^2} = 12$

$$\overline{BD} = 12\sqrt{2} \Rightarrow \overline{HD} = 6\sqrt{2}$$

$\overline{OH} \perp$ 平面 $ABCD \Rightarrow \overline{OH} \perp \overline{HD}$

$\Rightarrow \triangle OHD$ 是直角三角形

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{HD}^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



12. 由平面 $ABCD$ 與 $BCGF$, $\sqrt{(5+4)^2 + 6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$

由平面 $ABCD$ 與 $CDHG$, $\sqrt{(6+4)^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125}$

由平面 $ABFE$ 與 $BCGF$, $\sqrt{(5+6)^2 + 4^2} = \sqrt{121+16} = \sqrt{137}$

故最短路徑長為 $\sqrt{117}$

13. (1) 設小圓圓心 O' ，半徑為 r

$$r = R \cos 60^\circ = \frac{1}{2}R, \angle AO'B = 30^\circ, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{故 } \widehat{AB} = r\theta = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}R \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}R$$

(2) B 點位於北緯 60° ，東經 60°

$$(3) \overline{BH} = \overline{OO'} = R \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

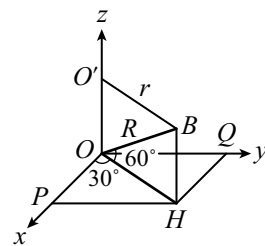
$$\overline{OH} = R \cos 60^\circ = \frac{1}{2}R$$

$$\overline{OP} = \overline{OH} \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

$$\overline{OQ} = \overline{OH} \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}R$$

故 B 點對應的空間坐標為 $(\frac{\sqrt{3}}{4}R, \frac{1}{4}R, \frac{\sqrt{3}}{2}R)$



11 條件機率

92 1 A $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ B $\frac{9}{16}$ C $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{13}$ D $\frac{3}{7}$

$$A \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$$

$$B \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\text{則 } P(A|B) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{16} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{16}$$

C 紅心共有 13 張，其中有一張老 K，老 K 有 4 張其中一張紅心，故 $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ， $P(A|B) = \frac{1}{13}$

D 至少一正有 $C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 = 7$ 種，恰兩正有 $C_2^3 = 3$ 種
 $\therefore$ 所求 $= \frac{3}{7}$

93 ② A $\frac{3}{35}$ B $\frac{1}{50}$ C $\frac{5}{56}$ D $\frac{1}{9}$

A $P(\text{被錄取}) = P(\text{通過筆試且通過口試})$
 $= P(\text{通過筆試}) \times P(\text{通過口試} | \text{通過筆試})$
 $= \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$

B 所求 $= P(\text{抽中甲}) \times P(\text{抽中乙} | \text{抽中甲})$
 $= \frac{4}{25} \times \frac{3}{24} = \frac{1}{50}$

《另解》 $\frac{C_2^2 \times C_2^{23}}{C_4^{25}} = \frac{1}{50}$

C 所求 $= \frac{5}{8} \times \frac{C_2^3}{C_2^7} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{21} = \frac{5}{56}$

D $P(\text{白白白}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$
 $P(\text{黑黑黑}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$\therefore$ 所求 $= P(\text{白白白}) + P(\text{黑黑黑}) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$

94 ③ A $\frac{4}{11}$ B $\frac{10}{23}$ C 3 ; 16 ; 22 D 0.62 ; $\frac{24}{31}$ E (A)

A $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = k + \frac{3k}{2} + (3k - 1) = 1$

即 $\frac{11k}{2} = 2$ ，得 $k = \frac{4}{11}$

B $P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{10+8+5}{40} = \frac{23}{40}$

$\therefore P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{23}{40}} = \frac{10}{23}$

C 總人數 $= 3x + (2x + 1) + (x + 10) + (15 - 2x)$
 $= 4x + 26 = 38 \quad \therefore x = 3$

列聯表為

	及格	不及格	
男	9	7	男生共 9 + 7 = 16 人
女	13	9	及格共 9 + 13 = 22 人

D ① $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$
 $= P(A) \times P(B|A) + P(A') \times P(B|A')$
 $= 0.8 \times 0.6 + 0.2 \times 0.7 = 0.48 + 0.14 = 0.62$

② $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 \times 0.6}{0.62} = \frac{24}{31}$

E 每 100 人中，

6	21	10	無大學文憑
行政15	技術35	研發50	
9	14	40	有大學文憑

15 × 0.6 35 × 0.4 50 × 0.8

所求 $= \frac{14}{9+14+40} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$

95 ④ A $\frac{3}{13}$; $\frac{1}{4}$ B (1) $\frac{5}{18}$ (2) $\frac{6}{11}$

A $P(\text{戊取紅}) = P(\text{甲取紅}) = \frac{3}{13}$

甲取走黃球後，箱中剩 9 黃 3 紅共 12 球

$P(\text{戊取紅}) = P(\text{乙取紅}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

B (1) $P(\text{白最後}) = P(\text{白最先}) = \frac{5}{5+6+7} = \frac{5}{18}$

(2) 不看紅球，箱中為 5 白球 6 黃球共 11 球

$P(\text{白比黃先取完}) = P(\text{黃最後}) = P(\text{黃最先}) = \frac{6}{11}$

⑤ A $\frac{3}{5}$ B $\frac{3}{10}$ C $\frac{3}{5}$ D 8 ; 28 ; 17 ; 68

E (1) $\frac{4}{27}$ (2) $\frac{19}{27}$

A $\because A、B$ 互相獨立 $\therefore P(A|B) = P(A) = \frac{2}{5}$

則 $P(A'|B') = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

B 所求 $= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

C $P(\text{好運}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1+8}{15} = \frac{3}{5}$

96 D $\because A$ 與 B 互相獨立

$\therefore \frac{k-1}{2k+5} = \frac{10}{30}$ ，得 $3k-3=2k+5$ ，得 $k=8$

列聯表為

	A	A'	$n(A) = 7 + 21 = 28$
B	7	10	$n(B) = 7 + 10 = 17$
B'	21	30	$n(S) = 7 + 10 + 21 + 30 = 68$

E (1) $P(A \cap B' \cap C') = P(A) \times P(B') \times P(C')$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

(2) 所求 $= 1 - P(A、B、C \text{ 都不發生})$

$= 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

⑥ A (A)(C)(D) ; (B) B 0.75 C 0.1656

B $P(\text{臺南下雨且嘉義下雨})$

$= P(\text{嘉義下雨}) \times P(\text{臺南下雨} | \text{嘉義下雨})$

$\therefore 0.6 = 0.8 \times \text{所求}$ ，得所求 $= \frac{3}{4} = 0.75$

97 C $P(4 \text{ 點}) = \frac{9}{50}$ ， $P(5 \text{ 點}) = \frac{12}{50}$ ， $P(6 \text{ 點}) = \frac{15}{50}$

和為 10 : ① $4 + 6 : \frac{9}{50} \times \frac{15}{50}$ ② $5 + 5 : \frac{12}{50} \times \frac{12}{50}$

③ $6 + 4 : \frac{15}{50} \times \frac{9}{50}$ ，所求 $= \frac{135+144+135}{2500} = \frac{414}{2500} = 0.1656$

範例 1 $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{7}$

$P(A \cap B)$ 最大為 $P(A)$ ，即 0.5

由捨棄原理 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

$\therefore 0.5 + 0.7 - P(A \cap B) \leq 1$ ，得 $P(A \cap B) \geq 0.2$

$\therefore P(A \cap B)$ 的最大範圍為 $0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.5$

則 $\frac{0.2}{0.7} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{0.5}{0.7}$ ，故 $\frac{2}{7} \leq P(A|B) \leq \frac{5}{7}$

類題 1 (B)(C)(D)

$$(A) P(A') = 1 - 0.8 = 0.2, P(B') = 1 - 0.3 = 0.7$$

應 $P(A') < P(B')$

$$(B) P(A - B) = 0.8 - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = 0.3 - P(A \cap B) \quad \therefore P(A - B) > P(B - A)$$

$$(C) \because P(A \cup B) \geq 0.8, P(A \cap B) \leq 0.3$$

$$\therefore P(A \cup B) > P(A \cap B)$$

$$(D) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{0.3}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{0.8}$$

$$\therefore P(A \cap B) > 0 \quad \therefore P(A|B) > P(B|A)$$

$$(E) P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{0.7}, P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{0.2}$$

$$\therefore P(A' \cap B') \geq 0 \quad \therefore P(A'|B') \leq P(B'|A') \text{ 才對}$$

類題 2 (B)(E)

$$\because A \subseteq B \text{ 且 } A \neq B$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) < P(B), \text{ 而且 } B' \subseteq A'$$

$$\text{知 } P(A' \cap B') = P(B') < P(A')$$

$$(A) \text{應 } P(A|B) < 1 \quad (C) \text{因 } A \cap B' = \phi, \text{ 所以 } P(A|B') = 0$$

$$(D) P(B|A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} = \frac{P(A') - P(A' \cap B')}{P(A')} \\ = \frac{P(A') - P(B')}{P(A')} < 1$$

$$(F) \text{應 } P(B'|A') < 1$$

98 範例 2 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{10}{17}$

$$(1) P(\text{都選墾丁} | \text{均教師}) = \frac{C_2^{40}}{C_2^{65}} = \frac{20 \times 39}{65 \times 32} = \frac{3}{8}$$

$$(2) P(\text{均教師} | \text{都選墾丁}) = \frac{C_2^{40}}{C_2^{52}} = \frac{20 \times 39}{26 \times 51} = \frac{10}{17}$$

類題 3 $\frac{4}{35}$

$$(0.10 + 0.07 + 0.06 + 0.09 + x + 0.05 + 0.11 + 0.09 + 0.05) + 0.3 = 1$$

$$\therefore x = 0.08, \text{ 所求} = \frac{0.08}{1 - 0.3} = \frac{4}{35}$$

類題 4 $\frac{11}{14}$

列出第四位可抽獎的樣本共 14 個

其中第五位可抽獎的有 11 個

$$\therefore P = \frac{11}{14}$$

-	+	+	+	-	-	-
+	-	+	-	+	-	-
+	+	-	-	-	+	-
□	□	□	□	□	□	□
-	+	+	+	-	+	+
√	×	×	×	×	×	×

範例 3 $\frac{15}{28}$

編號為奇₁ ~ 奇₅, 偶₁ ~ 偶₄, $\begin{cases} \text{先取兩奇有 } C_2^5 = 10 \text{ 種} \\ \text{先取兩偶有 } C_2^4 = 6 \text{ 種} \end{cases}$

$$\therefore n(S) = (10 + 6) \times C_2^7 = 16 \times 21 \text{ 種}$$

其中「先兩球和為偶再兩球和為奇」的情形為

$$[C_2^5 \times (C_1^3 \times C_1^4)] + [C_2^4 \times (C_1^5 \times C_1^2)] = 120 + 60 = 180$$

先兩奇 再一奇一偶 先兩偶 再一奇一偶

$$\text{所求的 } P = \frac{180}{16 \times 21} = \frac{15}{28}$$

99 類題 5 (B)(E)

$$n(S) = \frac{7!}{2!2!3!} = 210, n(A) = \frac{6!}{2!3!} = 60 \quad \therefore P(A) = \frac{60}{210}$$

$$n(B) = 210 - 60 = 150 \quad \therefore P(B) = \frac{150}{210}$$

$$n(C) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{C_3^5}{\text{取 3 個空隙放入紅球}} = 6 \times 10 = 60$$

$$n(A \cap C) = \frac{3!}{2!} \times C_3^4 = 3 \times 4 = 12$$

$$n(B \cap C) = n(C) - n(A \cap C) = 60 - 12 = 48$$

$$(A) \text{應 } P(A) < P(B) \quad (B) P(C) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

$$(C)(D)(E) P(C|A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}, P(C|B) = \frac{48}{150} = \frac{8}{25} > 0.3$$

$$2P(C|A) + 5P(C|B) = \frac{2}{5} + \frac{8}{5} = 2$$

類題 6 $\frac{16}{25}$

1, 2_a, 2_b, 3_a, 3_b, 3_c, 4_a, 4_b, 4_c, 4_d 共 10 個球

① 1、2、3 $\Rightarrow 2 \times 3 = 6$ 種, 和為偶數

② 1、2、4 $\Rightarrow 2 \times 4 = 8$ 種, 和為奇數

③ 1、3、4 $\Rightarrow 3 \times 4 = 12$ 種, 和為偶數

④ 2、3、4 $\Rightarrow 2 \times 3 \times 4 = 24$ 種, 和為奇數

$$\therefore P = \frac{8 + 24}{6 + 8 + 12 + 24} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

範例 4 (1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{1}{6}$

(1) 若獎金為 250 元, 必為「先抽中銘謝惠顧, 再抽中 500 元」

$$\therefore P(\text{得 250 元})$$

$$= P(\text{第一次抽中銘謝惠顧}) \times P(\text{抽中 500 元} | \text{已抽得銘謝惠顧})$$

$$= \frac{5}{15} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{15}$$

(2) 恰得 500 元: ① 第一次抽中 500 $\Rightarrow \frac{2}{15}$

② 第一次抽中銘謝惠顧, 再抽中 1000 元 $\Rightarrow \frac{5}{15} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$

$$\therefore P(\text{恰得 500 元}) = \frac{2}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$$

類題 7 0.48; 0.24

$$\textcircled{1} P(\text{連中兩發}) = P(\text{第一發中}) \times P(\text{第二發中} | \text{第一發中}) \\ = 0.6 \times 0.8 = 0.48$$

$$\textcircled{2} \text{恰中一發} \begin{cases} \text{先中再不中} \Rightarrow 0.6 \times 0.2 = 0.12 \\ \text{先不中再中} \Rightarrow 0.4 \times 0.3 = 0.12 \end{cases}$$

$$\therefore P(\text{恰中一發}) = 0.12 + 0.12 = 0.24$$

100 類題 8 $\frac{83}{100}$

$$\text{甲} \begin{cases} \text{甲} - \text{甲} P = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \\ \text{乙} - \text{甲} P = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} \end{cases} \quad \therefore P = \frac{81}{100} + \frac{1}{50} = \frac{81+2}{100} = \frac{83}{100}$$

範例 5 $\frac{20}{21}$

$$\text{答對} \begin{cases} \text{會} \Rightarrow 0.8 \\ \text{不會且猜對} \Rightarrow 0.2 \times \frac{1}{5} = 0.04 \end{cases}$$

$$\therefore P(\text{會} | \text{答對}) = \frac{0.8}{0.8 + 0.04} = \frac{80}{84} = \frac{20}{21}$$

$$(C) P(\text{第三局才出局}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

$$(D) P(\text{甲在第 10 局出局} \mid \text{第 10 局才有人出局})$$

$$= \frac{(\frac{1}{4})^9 \times \frac{1}{4}}{(\frac{1}{4})^9 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$(E) P(\text{至少玩 6 局}) = P(\text{前 5 局沒人出局})$$

$$= (\frac{1}{4})^5 = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

104 範例 9 (1) $\frac{29}{43}$ (2) $\frac{2}{467}$

(1) 顯示某人說謊的情形有

$$\text{真的是小偷} \Rightarrow \frac{1}{30} \times 0.98, \text{不是小偷} \Rightarrow \frac{29}{30} \times 0.07$$

$$\therefore \frac{\frac{29}{30} \times 0.07}{\frac{1}{30} \times 0.98 + \frac{29}{30} \times 0.07} = \frac{29 \times 0.07}{0.98 + 29 \times 0.07} = \frac{2.03}{3.01} = \frac{29}{43}$$

(2) 顯示某人誠實的情形有

$$\begin{cases} \text{真的不是小偷} \Rightarrow \frac{25}{30} \times 0.93 \\ \text{是小偷卻測謊無效} \Rightarrow \frac{5}{30} \times 0.02 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\frac{5}{30} \times 0.02}{\frac{25}{30} \times 0.93 + \frac{5}{30} \times 0.02} = \frac{5 \times 0.02}{25 \times 0.93 + 5 \times 0.02} = \frac{0.10}{23.35} = \frac{2}{467}$$

類題 17 $\frac{8}{9}$

$$P(\text{取出白球且甲說白且乙說黑}) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{7}$$

$$P(\text{取出黑球且甲說白且乙說黑}) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$$

$$P(\text{取白} \mid \text{甲說白且乙說黑}) = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} + \frac{1}{28}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{28}} = \frac{8}{9}$$

類題 18 0.664

$$\text{不下雨且甲贏乙} \Rightarrow 0.2 \times 0.6 = 0.12$$

$$\text{下雨且甲贏乙} \Rightarrow 0.8 \times 0.68 = 0.544$$

$$\therefore \text{所求} = 0.12 + 0.544 = 0.664$$

105 範例 10 (1) $\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{5}; \frac{2}{5}$

再講清楚 $\frac{1}{5}; \frac{4}{5}$

(1) 一開始猜「2」的命中機率為 $\frac{1}{5}$ ，其他四個共 $\frac{4}{5}$ ，刪掉「4、5」後，機率 $\frac{4}{5}$ 平均分給「1、3」，得「1」與「3」的猜中機率皆為 $\frac{2}{5}$

(2) 「1」與「2」的猜中機率為 $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ ，劃去「1」之後集中到「2」，故「2」的猜中機率為 $\frac{3}{5}$ ，「3」的猜中機率為 $\frac{2}{5}$

【註】多操作幾遍，並統計換與不換的猜中次數，可體會機率的差異

類題 19 $\frac{3}{4}$

B 門的中獎機率為 $\frac{1}{4}$ ，剩下三門的中獎機率為 $\frac{3}{4}$ ，打開 C、D 之後全部集中到 A，故所求為 $\frac{3}{4}$

106 類題 20 (1) $\frac{1}{30}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{7}{10}$

10 支籤編號為 $\underbrace{a_1, a_2, a_3}_{\text{中}}, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_7}_{\text{不中}}$

排成一列有 $10!$ 種

$$(1) \text{即 } a_1, a_2, a_3 \text{ 排在前四格, } P = \frac{(4 \times 3 \times 2) \times 7!}{10!} = \frac{1}{30}$$

(2) 即「第五格不中且前四格不可三個全中」有

$$\frac{7 \times 9!}{\text{第五不中}} - \frac{7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 6!}{\text{第五不中且前四中三}}$$

$$\therefore P = \frac{7 \times 9! - 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 6!}{10!} = \frac{7 \times 9 \times 8! - 3 \times 8!}{10!} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

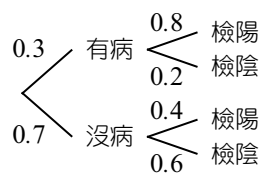
$$(3) \text{所求} = \frac{1}{30} + \frac{2}{3} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

【註】可由摸彩原理知 $P(\text{戊中}) = \frac{3}{10}$

最新大考精選

1.(B) 2. $\frac{14}{15}$ 3.(A)(D) 4.(E)

1.

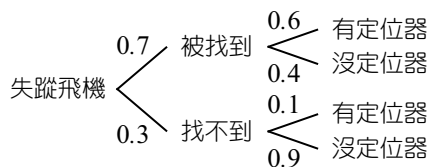


$$P = \frac{0.3 \times 0.2}{0.3 \times 0.2 + 0.7 \times 0.6} = \frac{0.06}{0.48} = \frac{1}{8}$$

$$P' = \frac{0.3 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2}{0.3 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 + 0.7 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.6} = \frac{0.0024}{0.0024 + 0.1512} = \frac{24}{1536}$$

$$\therefore \frac{P}{P'} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{24}{1536}} = \frac{1536}{8 \times 24} = 8$$

2.



$$P(\text{被找到} \mid \text{有定位器}) = \frac{0.7 \times 0.6}{0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.1} = \frac{42}{42 + 3} = \frac{14}{15}$$

3. 用倒扣法, $p_n = 1 - (0.9)^n$

(A) $\because (0.9)^n$ 隨 n 增加而遞減 $\therefore p_n$ 為遞增

(B) $p_3 = 1 - (0.9)^3 = 1 - 0.729 = 0.271$ 才對

(C) $p_1 = 0.1, p_2 = 0.19, p_3 = 0.271$, 非等差數列

(D) $P(\text{第一次不中且第二次中獎}) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

$$p_2 - p_1 = [1 - (0.9)^2] - [1 - 0.9] = 0.19 - 0.1 = 0.09$$

(E) $P(n \text{ 次至少中二次}) = 1 - (0.9)^n - C_1^n (0.9)^{n-1} \cdot (0.1)$

$$= 1 - \frac{9}{10} (0.9)^{n-1} - \frac{n}{10} (0.9)^{n-1} = 1 - \frac{n+9}{10} (0.9)^{n-1}$$

而 $2p_n = 2[1 - (0.9)^n]$, 不合

107 4. (A) $P(\text{取 } 7 | \text{為奇數}) = \frac{1}{50}$ (B) $P(\text{取 } 7 | \text{為質數}) = \frac{1}{25}$

(C) $P(\text{取 } 7 | \text{為 } 7 \text{ 的倍數}) = \frac{1}{14}$

(D) $P(\text{取 } 7 | \text{不是 } 5 \text{ 的倍數}) = \frac{1}{100-20} = \frac{1}{80}$

(E) $P(\text{取 } 7 | \text{小於 } 10) = \frac{1}{9}$

綜合實力測驗

1.(C) 2.(C) 3.(B) 4.(B) 5.(A)(D) 6.(A)(C)(D)(E)

7.(A)(B)(C)(E) 8.(A)(B)(C) 9. 10 10. $\frac{15}{19}$

11. $\frac{219}{1000}$ 12. 20 13.(1)(D) (2) $\frac{5}{16}$ (3) B 機器

1. $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

2. $P(\text{第 1 人 } B \text{ 型} \cap \text{第 2 人 } O \text{ 型})$

$$= P(\text{第 1 人 } B \text{ 型}) \times P(\text{第 2 人 } O \text{ 型} | \text{第 1 人 } B \text{ 型})$$

$$= \frac{5}{15} \times \frac{7}{14} = \frac{1}{6}$$

3. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B), \text{ 得 } P(B) = \frac{5}{8}$$

$\therefore A, B'$ 也為獨立事件

$$\therefore P(B'|A) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

4. 設事件 A 表示選到女生, 事件 B 表示選到第一組學生

$$P(A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}, P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{5}$$

108 5. 主觀機率須滿足機率性質: ① $0 \leq P(A) \leq 1$

② 經驗判斷所需全部事件中, 各個事件的機率之總和必為 1

(B) $120\% > 1$ (C) $0.5 + 0.6 > 1$

(D) 每一個人對於房市的未來趨勢, 認知不同

(E) 全國冠軍的機率, 不會大於全縣冠軍的機率

6. (A) $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

奇 奇 奇 偶

(B) $\{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\}$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(C) $A \cap B = \{(1, 5), (3, 5), (5, 5)\}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(D) $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$

$\therefore A$ 與 B 為獨立事件

(E) $P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

7. 設 A 表甲解出的事件, B 表乙解出的事件, E 表恰有一人解出的事件

(A) $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

(B) $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

(C) $P(E) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(D) $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(E) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

8. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$C = \{3, 6, 9, 12\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$

(B) $A \cap B = \phi \Rightarrow A, B$ 為互斥事件

(C) $A \cap C = \{6, 12\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$

$$P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap C)$$

$\therefore A, C$ 為獨立事件

(D) $B \cap C = \{3, 9\}$, $P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = \frac{1}{6}$

$\therefore B, C$ 為獨立事件

(E) 承(D)可知, $P(C|B) = P(C) = \frac{1}{3}$

109 9. 設罹患此病的比例為 $x\%$

$$\begin{cases} x\% \left\{ \begin{array}{l} \text{罹患} \frac{90\%}{100} \text{ 檢驗呈陽性} \\ \text{未罹患} \frac{5\%}{100} \text{ 檢驗呈陽性} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\frac{\frac{x}{100} \times \frac{90}{100}}{\frac{x}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{100-x}{100} \times \frac{5}{100}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{90x}{90x + 500 - 5x} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x = 10$$

10. $P(\text{曾經算錯} | \text{算錯})$

$$= \frac{20\% \times 75\%}{80\% \times 5\% + 20\% \times 75\%} = \frac{1500}{400 + 1500} = \frac{15}{19}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 80\% \text{ 曾經算對} \left\{ \begin{array}{l} 95\% \text{ 算對} \\ 5\% \text{ 算錯} \end{array} \right. \\ 20\% \text{ 曾經算錯} \left\{ \begin{array}{l} 25\% \text{ 算對} \\ 75\% \text{ 算錯} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

11. $(2, 2, 2)$ 有 $\frac{24}{80} \times \frac{24}{80} \times \frac{24}{80} = \frac{27}{1000}$

$(3, 2, 1)$ 有 $\frac{16}{80} \times \frac{24}{80} \times \frac{32}{80} \times 3! = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \times 6 = \frac{144}{1000}$

$(4, 1, 1)$ 有 $\frac{8}{80} \times \frac{32}{80} \times \frac{32}{80} \times \frac{3!}{2!} = \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \times 3 = \frac{48}{1000}$

共 $\frac{27}{1000} + \frac{144}{1000} + \frac{48}{1000} = \frac{219}{1000}$

12. $P(A) = \frac{54}{x+79}$, $P(B) = \frac{x+24}{x+79}$, $P(A \cap B) = \frac{24}{x+79}$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{24}{x+79} = \frac{54}{x+79} \times \frac{x+24}{x+79}$$

對話式[®]

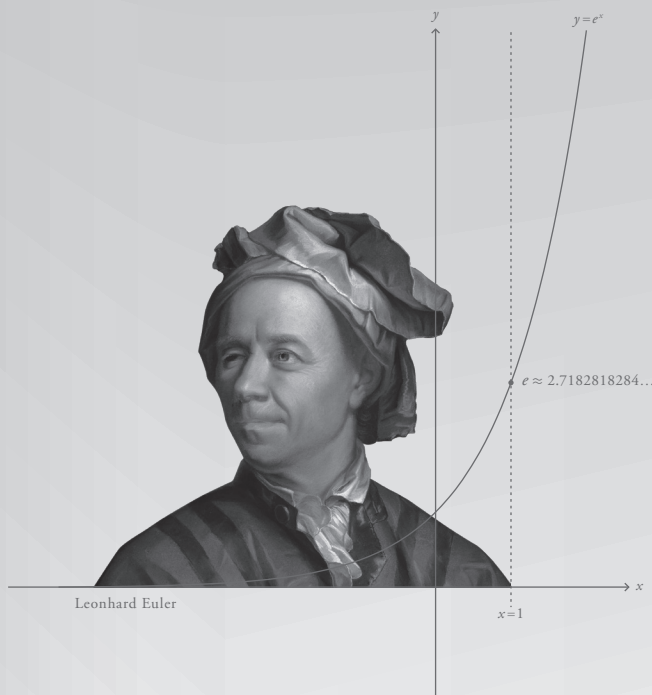
高中數學 3B-4B 冊

學測複習講義

課後練習本

白德超／葉晉宏

座號：
姓名：
班級：



第 1 回 弧度與正弦函數的圖形

第 2 回 指數與指數函數

第 3 回 對數與對數函數

第 4 回 平面向量的運算與圖形設計

第 5 回 平面向量的內積

第 6 回 空間概念與空間坐標

第 7 回 條件機率、貝氏定理與獨立事件

第 8 回 矩陣的運算及其應用

第 7 回

條件機率、貝氏定理與獨立事件

- 1 某校教師性別與已婚未婚與否，列表如右，以 A_1 表示男教師事件， A_2 表示女教師事件，以 B_1 表示已婚事件， B_2 表示未婚事件，則：

	已婚	未婚	合計
男教師	20	10	30
女教師	15	35	50
合 計	35	45	80

(1) $P(A_2) =$ _____ (2) $P(A_2 \cap B_1) =$ _____

(3) $P(A_1 | B_2) =$ _____。

解

- 2 下列三項敘述中，哪些是主觀機率？ _____

- ① 喬治上次段考數學考 80 分，他覺得這次段考數學考及格的機率為 150%。
 ② 今年中華職棒由中信兄弟隊與統一獅隊爭奪冠軍，安迪覺得中信兄弟隊奪冠的機率為 70%，統一獅隊奪冠的機率為 65%。
 ③ 跨年演唱會，保羅認為他搶得到票的機率為 0.5，大衛認為他搶得到票的機率為 0.9。

- (A) ① (B) ③ (C) ① ② (D) ② ③ (E) ① ② ③

解

- 3 袋中有 3 紅球、4 白球、5 黑球，今自袋中每次取出一球，取後不放回。求第一次拿白球、第二次拿黑球、第三次拿紅球的機率為 _____。

解

- 4 某公司的產品由甲、乙、丙三家工廠所製造，其產量比為 6:3:1。甲、乙、丙三家工廠的產品不合格率各占 5%、3%、2%，今從產品中任取一個檢查，結果是不合格的機率為 _____。

解

6. 由右圖知，截痕為拋物線

$$\begin{aligned} 7. (1) \sqrt{x^2+z^2} &= \sqrt{2^2+(-5)^2} \\ &= \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

$$(2) |x| = |2| = 2$$

(3) P 點在 xy 平面的投影點為 $Q(2, 3, 0)$

則 $\overline{OP}$ 在 xy 平面的投影長 $\overline{OQ} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$

8. 設 $P(a, b, c)$ ，則 $\sqrt{b^2+c^2} = 10$ ， $\sqrt{a^2+c^2} = 5$ ， $a = 3$

$$\therefore c = \sqrt{5^2-3^2} = 4, b = \sqrt{10^2-4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

故 P 點坐標為 $(3, 2\sqrt{21}, 4)$

9. (1) $\overline{AB} = 5-1 = 4$ ， $\overline{BC} = 10-2 = 8$ ， $\overline{BF} = 5-2 = 3$

(2) $C(5, 10, 2)$ 且 $\overline{CG} = \overline{BF} = 3$ ，則 $G(5, 10, 5)$

$\overline{GH} = \overline{AB} = 4$ ，則 $H(1, 10, 5)$

$$10. \overline{AB} = \sqrt{3^2+(k-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+(k-3)^2+16} = 13$$

$$\Rightarrow (k-3)^2+25 = 169 \Rightarrow (k-3)^2 = 144$$

$$\Rightarrow k-3 = \pm 12 \Rightarrow k = 15 \text{ 或 } -9$$

11. 設 $P(x, 0, 0)$ $\therefore \overline{PA} = \overline{PB}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+1+9} = \sqrt{(x-1)^2+4+16}$$

$$\Rightarrow x^2+4x+14 = x^2-2x+21 \Rightarrow 6x = 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{6}, \text{ 故 } P(\frac{7}{6}, 0, 0)$$

$$12. \overline{OD} = \overline{PQ} = \overline{OP} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

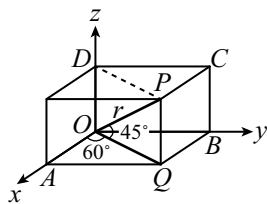
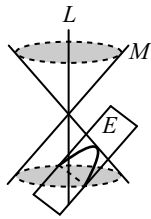
$$\overline{OQ} = \overline{OP} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$\overline{OA} = \overline{OQ} \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}r \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}r$$

$$\overline{OB} = \overline{OQ} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}r$$

$$\text{故 } P(\frac{\sqrt{2}}{4}r, \frac{\sqrt{6}}{4}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$$



則 $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$

$$= \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

4. $P(\text{不合格})$

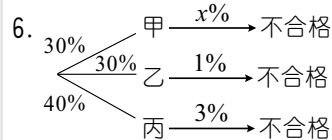
$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{100} = \frac{41}{1000}$$

故不合格的機率為 $\frac{41}{1000}$

$$5. \frac{1}{2} \begin{cases} \text{甲} \Rightarrow 1 \text{ 白 } 1 \text{ 黑} : \frac{C_1^3 \times C_1^2}{C_2^5} = \frac{6}{10} \\ \text{乙} \Rightarrow 1 \text{ 白 } 1 \text{ 黑} : \frac{C_1^1 \times C_1^4}{C_2^5} = \frac{4}{10} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} P(1 \text{ 白 } 1 \text{ 黑}) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} P(\text{來自乙袋} | 1 \text{ 白 } 1 \text{ 黑}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

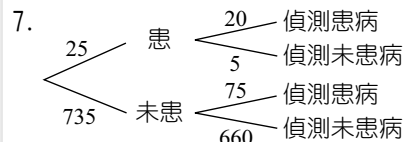


$P(\text{來自甲} | \text{不良品})$

$$= \frac{30\% \times x\%}{30\% \times x\% + 30\% \times 1\% + 40\% \times 3\%} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{30x}{30x + 30 + 120} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow 60x + 300 = 210x \Rightarrow x = 2$$



誤判的有 $5 + 75 = 80$ 人，故誤判率為 $\frac{80}{760} = \frac{2}{19}$

8. (1) A, B 獨立 $\Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10}$

(2) A, B 獨立 $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = P(A) + \frac{3}{10} - \frac{3}{10}P(A) \Rightarrow \frac{7}{10}P(A) = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{7}$$

9. 設甲命中為 A 事件，乙命中為 B 事件

$$(1) P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

(3) $P(\text{乙中} | \text{恰 1 人命中})$

$$= \frac{P(A' \cap B)}{P(A \cap B') + P(A' \cap B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$$

10. $x = 20 - 5 = 15$ ，設 $z = 80 - y$

$$P(\text{男教師} \cap \text{已婚}) = \frac{15}{100}, P(\text{已婚}) = \frac{15+y}{100}$$

第 7 回

$$1. (1) \frac{5}{8} \quad (2) \frac{3}{16} \quad (3) \frac{2}{9} \quad 2. (B) \quad 3. \frac{1}{22} \quad 4. \frac{41}{1000}$$

$$5. \frac{1}{2}; \frac{2}{5} \quad 6. 2 \quad 7. \frac{2}{19} \quad 8. (1) \frac{3}{10} \quad (2) \frac{3}{7}$$

$$9. (1) \frac{1}{12} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{2}{5} \quad 10. 15; 60; 20 \quad 11. \frac{4}{13} \quad 12. \frac{3}{8}$$

$$16. 1. (1) P(A_2) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} \quad (2) P(A_2 \cap B_1) = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

$$(3) P(A_1 | B_2) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{80}}{\frac{45}{80}} = \frac{2}{9}$$

2. ① $150\% > 1$ ② $70\% + 65\% > 1$ ③ 各憑本事

3. A, B, C 分別表第一次取到白球、第二次取到黑球、第三次取到紅球的事件