目　次

2 指數、對數函數

2-1 指數函數及其圖形

高一上時我們曾推廣指數符號到實數次方，並介紹過一些指數的應用題型，到這裡我們則要討論指數函數，並用「描點」的方式來作圖，請同學牢記基本圖形，掌握特徵，並熟悉平移、伸縮、加絕對值等各種變化。

範例研習特區

1 指數函數

1. 指數符號（複習）：讓我們再複習一遍指數符號的定義。

(1)整數次方：設 n 為正整數，則 n 個實數 a 的乘積記為指數符號 a^n，稱 a 為底數，n 為次數。特別地，若 $a\neq 0$，規定 $a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，可以滿足指數律。

(2)正 n 次根號與分數次方：設 a、$b>0$，n 為比 1 大的正整數，若滿足 $a^n=b$，則記為 $a=\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}$，稱 a 為「b 的正 n 次根號」，簡稱「n 次根號 b」。進一步規定，若 $a>0$，m、n 為正整數且 $n>1$，則 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$，$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$。

例 $(-2)^{-5}=\dfrac{1}{(-2)^5}=-\dfrac{1}{32}$，$9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$，$8^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}^{\,2}}=\dfrac{1}{4}$。

(3)無理數次方：底數 >0，由無窮數列所靠近的數來定義無理數次方，如 $3^{\sqrt{2}}$ 與 2^{π}。

① $\sqrt{2}=1.4142\cdots$，數列 $3^{1.4}$、$3^{1.41}$、$3^{1.414}$、$3^{1.4142}$、…所靠近的數定義為 $3^{\sqrt{2}}$。

② $\pi=3.14159\cdots$，數列 $2^{3.1}$、$2^{3.14}$、$2^{3.141}$、$2^{3.1415}$、$2^{3.14159}$、…所靠近的數定義為 2^{π}。

同學可利用計算機求出各種指數符號的近似值。

2. 指數律（複習）：指數符號經過拓展後，皆能滿足指數律。設 a、$b>0$，x、y 為實數，則：

(1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$　(2) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$　(3) $(a^x)^y=a^{xy}$

(4) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$　(5) $(\dfrac{a}{b})^x=\dfrac{a^x}{b^x}$。

3. 單項指數函數：設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，稱 $f(x)=a^x$ 為「指數函數」，定義域為全體實數 R，值域為 $\{y\,|\,y>0$ 且 $y\in R\}$。

範例 1 指數函數的基本求值

透過函數先複習指數符號與指數律吧！

1. 設指數函數 $f(x)=(\frac{16}{81})^x$，求：

(1) $f(-1)=$______ (2) $f(\frac{1}{4})=$______ (3) $f(f(-\frac{1}{4}))=$______。

解

2. 設 $f(x)=2^x$，a、b 為相異實數，若 $f(a)$ 之值為 $f(b)$ 的 $8\sqrt{2}$ 倍，求 $a-b=$______。

解

3. 設 $f(x)=a^x$，若 $f(k)=125$，求：(1) $f(-k)=$______ (2) $f(\frac{2k}{3})=$______。

解

類題 1 設 $f(x)=8^x$，求：

(1) $f(0)=$______ (2) $f(\frac{1}{3})=$______ (3) $f(-\frac{2}{3})=$______。

類題 2 設 $f(x)=4^x$，$g(x)=9^x$，求：(1) $g(f(\frac{1}{2}))=$______ (2) $f(g(\frac{1}{2}))=$______。

類題 3 設 $f(x)=(\frac{1}{9})^x$，a、b 為相異實數，若 $f(a)$ 之值為 $f(b)$ 的 27 倍，求 $a-b=$______。

類題 4　設 $f(x)=a^x$，若 $f(k)=16$，求：

(1) $f(\frac{k}{2})=$ ______　(2) $f(-\frac{k}{4})=$ ______　(3) $f(\frac{3k}{4})=$ ______ 。

類題 5　設 $f(x)=a^x$，已知 $f(p)=3$，$f(q)=2$，求 $f(2p+5q)=$ ______ 。

這題常考

範例 2　指數函數的進階求值

這種玩式子的指數函數問題，測驗卷常見！

1. 若點 $A(p,7)$ 與 $B(q,28)$ 都在 $f(x)=2^x$ 的圖形上，即 $f(p)=7$ 且 $f(q)=28$，求 $\overline{AB}$ 的長度為 ______ 。

解

2. 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，$x\neq 0$，若 $f(a)=4$，$f(b)=3$，則 $f(a+b)=$ ______ 。

解

歸納心得

先整理 $f(x)$，再代 a、b，無論是幾 a 加減幾 b 都可以代入 $f(x)$ 求出函數值

類題 6　若點 $A(a,5)$ 與 $B(b,45)$ 都在 $y=3^x$ 的圖形上，則 $\overline{AB}$ 的斜率為 ______ 。

類題 7　若點 $A(p,36)$ 在 $y=2^x$ 的圖形上，另一點 $B(q,36)$ 在 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形上，試求 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=$ ______ 。

類題 39 假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增長率均固定。已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人口誕生。根據這些資料推測 2023 年世界人口數最接近：______

(A) 75 億　(B) 80 億　(C) 86 億　(D) 92 億　(E) 100 億

類題 40 已知某放射性元素在 64000 年後衰變了 $\frac{15}{16}$，則其半衰期為________年。

歷年大考精選

1. 當 (x,y) 在直線 $2x+y=3$ 上變動時，關於 $K=9^x+3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？______
   (A) K 有最大值 28，最小值 $6\sqrt{3}$
   (B) K 有最大值 28，但沒有最小值
   (C) K 沒有最大值，但有最小值 12
   (D) K 沒有最大值，但有最小值 $6\sqrt{3}$
   (E) K 沒有最大值也沒有最小值
   101 指考甲

2. 在坐標平面上，Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1,1)$，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y=a\times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為__________。
   110 學測

3. 某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X、Y。已知甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，例如 15 點時甲的數量為 $2X$。乙的數量每 2 小時成長為原來的 2 倍，例如 14 點時乙的數量為 $2Y$、16 點時乙的數量為 $4Y$，測量所得結果部分記錄於下表。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。______

時刻（點）	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$									
乙數量	Y		$2Y$		$4Y$								

   (A) $X>Y$
   (B) 在 13 點時，甲的數量為 $\frac{4}{3}X$
   (C) 在 15 點時，乙的數量為 $3Y$
   (D) 在 19 點時，乙的數量為甲的 1.5 倍
   (E) 在 24 點時，乙的數量為甲的 2 倍
   112 學測 B

素養導向試題

在我們生活周遭與自然界中，有許多指數函數的例子，其實就是等比數列的連續化，而且遇到指數的問題時，往往使用對數才能解決，因此橫跨單元來出題，是相當常見的情形。請回答下列問題：

◎混合題

1. 投資公司推出誘人的高利商品，號稱「三年期滿領回五倍」，即拿出 100 萬元購買投資，等待三年滿期後可拿回 500 萬元。

⑴若換算成月利率，應最接近下列哪一個選項？（單選題，請使用計算機）＿＿＿＿

(A) 4.2%　　(B) 4.4%　　(C) 4.6%　　(D) 4.8%　　(E) 5.0%

解

⑵在該商品的契約中載明「解約金」的條文如下：

①購買 100 萬元，滿一年解約可領回 170 萬元

②購買 100 萬元，滿兩年解約可領回 300 萬元

請問上述的解約金若化成年利率來比較，是放滿三年較佳，還是在一年或兩年後解約較佳？請說明理由。（非選擇題）

解

2. 某公司每位員工的績效指標是由 a、k 決定的函數 $f(x)=\dfrac{a^x}{k+a^x}\times 100\%$，其中 k 為正數，且 $a>1$。每個員工進入公司一段時間即可確立個人的 a、k 值，可用來求出經過 x 年（$x\geq 0$）之後的績效百分比，績效指標愈高，表示工作表現愈良好。現有甲、乙、丙、丁四位員工，其績效指標依序為 $f_{甲}(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}\times 100\%$、

$f_{乙}(x)=\dfrac{2^x}{9+2^x}\times 100\%$、$f_{丙}(x)=\dfrac{3^x}{1+3^x}\times 100\%$、$f_{丁}(x)=\dfrac{3^x}{9+3^x}\times 100\%$。請問：

⑴有兩位員工初進公司時不具相關經驗，所以績效較差，請問是哪兩位？（多選題）

＿＿＿＿

(A)甲　　(B)乙　　(C)丙　　(D)丁

解

⑵關於此四人的績效描述，哪些選項為正確？（多選題）________

(A)剛進公司時，四人的績效都不相同

(B)無論經過多少年，乙的績效始終無法超越甲

(C)無論經過多少年，丁的績效始終無法超越丙

(D)無論經過多少年，丁的績效始終無法超越甲

解

⑶若干年後，這四人中有一位因績效太差被資遣，請問是哪一位？（單選題）______

(A)甲　(B)乙　(C)丙　(D)丁

解

資優挑戰園地

1. 設函數 $f(x)=4^x-a\cdot 2^{x+1}+b$，當 $x=3$ 時，$f(x)$ 有最小值 16，求 $a+b=$ ______。

解

2. 設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，$a+b=3$，求 2^a+2^b 的最大值為______，最小值為________。

解

3. 若 $f(x)$ 之值恆正，且滿足「對任意實數 x、y，等式 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 恆成立」，已知 $f(2)=\dfrac{25}{81}$，求 $f(0)=$ ______，$f(3)=$ ________。

解

4. 設 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $f(\alpha)=\dfrac{2}{3}$，$f(\beta)=\dfrac{1}{2}$，請問：

⑴ $f(\alpha+\beta)=$ ______　⑵以 $f(x)$、$f(y)$ 表示 $f(x+y)$ 為________________。

解

2 指數、對數函數

2-1 指數函數及其圖形

範例研習特區

範例 1

70 1. (1) $f(-1)=(\frac{16}{81})^{-1}=\frac{81}{16}$　(2) $f(\frac{1}{4})=(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$

(3) $f(-\frac{1}{4})=(\frac{16}{81})^{-\frac{1}{4}}=(\frac{81}{16})^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$

$\therefore f(f(-\frac{1}{4}))=f(\frac{3}{2})=(\frac{16}{81})^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{16}{81}}^{\,3}=(\frac{4}{9})^3=\frac{64}{729}$

2. 即 $\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{2^a}{2^b}=8\sqrt{2}$　$\therefore 2^{a-b}=2^{3.5}$，得 $a-b=3.5=\frac{7}{2}$

3. 已知 $a^k=125$

(1) $f(-k)=a^{-k}=\frac{1}{a^k}=\frac{1}{125}$

(2) $f(\frac{2k}{3})=a^{\frac{2k}{3}}=(a^k)^{\frac{2}{3}}=125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125}^{\,2}=5^2=25$

類題

1 (1) 1　(2) 2　(3) $\frac{1}{4}$　2 (1) 81　(2) 64　3 $-\frac{3}{2}$

4 (1) 4　(2) $\frac{1}{2}$　(3) 8　5 288

1 (1) $f(0)=8^0=1$　(2) $f(\frac{1}{3})=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

(3) $f(-\frac{2}{3})=8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}^{\,2}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

2 (1) $g(f(\frac{1}{2}))=g(4^{\frac{1}{2}})=g(2)=9^2=81$

(2) $f(g(\frac{1}{2}))=f(9^{\frac{1}{2}})=f(3)=4^3=64$

3 $\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{(\frac{1}{9})^a}{(\frac{1}{9})^b}=(\frac{1}{9})^{a-b}=27$

$\therefore 3^{-2(a-b)}=3^3$，則 $-2(a-b)=3$　$\therefore a-b=-\frac{3}{2}$

71 4 已知 $a^k=16$　(1) $f(\frac{k}{2})=a^{\frac{k}{2}}=\sqrt{a^k}=\sqrt{16}=4$

(2) $f(-\frac{k}{4})=a^{-\frac{k}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^k}}=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}$

(3) $f(\frac{3k}{4})=a^{\frac{3k}{4}}=\sqrt[4]{a^k}^{\,3}=\sqrt[4]{16}^{\,3}=2^3=8$

5 已知 $f(p)=a^p=3$，$f(q)=a^q=2$

則 $f(2p+5q)=a^{2p+5q}=(a^p)^2\times(a^q)^5$

$=3^2\times 2^5=9\times 32=288$

範例 2

1. 由 $\begin{cases}2^p=7 & \cdots① \\ 2^q=28 & \cdots②\end{cases}$　①÷②得 $\frac{2^p}{2^q}=2^{p-q}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}=2^{-2}$

$\therefore p-q=-2$

則 $\overline{AB}=\sqrt{(p-q)^2+21^2}=\sqrt{4+441}=\sqrt{445}$

2. $f(x)=\frac{(2^x+\frac{1}{2^x})\cdot 2^x}{(2^x-\frac{1}{2^x})\cdot 2^x}=\frac{4^x+1}{4^x-1}$，$\begin{cases}f(a)=\frac{4^a+1}{4^a-1}=4 \\ f(b)=\frac{4^b+1}{4^b-1}=3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}4^a+1=4\times 4^a-4 \\ 4^b+1=3\times 4^b-3\end{cases}$　$\Rightarrow \begin{cases}4^a=\frac{5}{3} \\ 4^b=2\end{cases}$

$\therefore f(a+b)=\frac{4^{a+b}+1}{4^{a+b}-1}=\frac{4^a\cdot 4^b+1}{4^a\cdot 4^b-1}=\frac{\frac{5}{3}\cdot 2+1}{\frac{5}{3}\cdot 2-1}=\frac{\frac{13}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{13}{7}$

類題

6 20　7 $\frac{1}{2}$　8 (1) $\frac{5}{3}$　(2) $\frac{7}{5}$　9 $\frac{12}{13}$

6 $\because 3^a=5$，$3^b=45$　$\therefore 3^{b-a}=\frac{45}{5}=9=3^2$

得 $b-a=2$，則 $m_{\overline{AB}}=\frac{45-5}{b-a}=\frac{40}{2}=20$

7 已知 $2^p=36$ 且 $(\frac{1}{3})^q=36$　$\therefore 2=36^{\frac{1}{p}}$，$\frac{1}{3}=36^{\frac{1}{q}}$

兩式相除得 $\frac{2}{\frac{1}{3}}=\frac{36^{\frac{1}{p}}}{36^{\frac{1}{q}}}$，即 $6=36^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$　$\therefore \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$

72 8 $f(x)=\frac{3^x+\frac{1}{3^x}}{3^x-\frac{1}{3^x}}=\frac{9^x+1}{9^x-1}$，$f(a)=\frac{9^a+1}{9^a-1}=3$　$\Rightarrow$　$9^a=2$

$f(b)=\frac{9^b+1}{9^b-1}=2$　$\Rightarrow$　$9^b=3$

(1) $f(2a)=\frac{9^{2a}+1}{9^{2a}-1}=\frac{(9^a)^2+1}{(9^a)^2-1}=\frac{2^2+1}{2^2-1}=\frac{5}{3}$

(2) $f(a+b)=\frac{9^{a+b}+1}{9^{a+b}-1}=\frac{9^a\cdot 9^b+1}{9^a\cdot 9^b-1}=\frac{2\cdot 3+1}{2\cdot 3-1}=\frac{7}{5}$

9 分子分母同乘 4^x，得 $f(x)=\frac{16^x-1}{16^x+1}$，$f(k)=\frac{16^k-1}{16^k+1}=\frac{2}{3}$

交叉相乘得 $3\times 16^k-3=2\times 16^k+2$

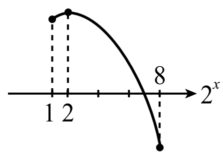
所以 $16^k=5$，則 $f(2k)=\frac{16^{2k}-1}{16^{2k}+1}=\frac{25-1}{25+1}=\frac{12}{13}$

範例 3

1. $f(x)=2^x\cdot 2^2-(2^x)^2+15$

$=-[(2^x)^2-4\cdot 2^x+4]+15+4$

$=-(2^x-2)^2+19$



$\because 0\le x\le 3$　$\therefore 1\le 2^x\le 8$

① $2^x=2$ 時，$f(x)$ 有最大值為 19，此時 $x=1$

② $2^x=8$ 時，$f(x)$ 有最小值為 $-36+19=-17$

此時 $x=3$

2. 令 $3^x+\frac{1}{3^x}=k$

平方得 $9^x+\frac{1}{9^x}+2=k^2$　$\Rightarrow$　$9^x+\frac{1}{9^x}=k^2-2$

由算幾不等式知 $\frac{3^x+\frac{1}{3^x}}{2}\ge\sqrt{3^x\cdot\frac{1}{3^x}}=1$

$\Rightarrow$　$k\ge 2$，且「$k=2$　$\Leftrightarrow$　$3^x=\frac{1}{3^x}$」

作圖 $\underset{-2}{\bullet} \; - \; \boxed{+} \; \underset{0}{\bullet} \; - \; \underset{3}{\bullet} \; \boxed{+} \rightarrow x$

得 $-2 \le x \le 0$ 或 $x \ge 3$

35 先令為 0，得 $x = 0$、2、-2

其中 9^x、2^x 為遞增函數，但 $\dfrac{1}{4^x}$ 為遞減函數

作圖 $+ \; \underset{-2}{\circ} \; \boxed{-} \; \underset{0}{\circ} \; + \; \underset{2}{\circ} \; \boxed{-} \rightarrow x$，得 $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$

36 即 $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 \le 0 \;\Rightarrow\; (2^x - 1)(2^x - 8) \le 0$

$\Rightarrow\; 1 \le 2^x \le 8 \;\Rightarrow\; 2^0 \le 2^x \le 2^3 \;\Rightarrow\; 0 \le x \le 3$

範例 10

1. 設現在有 k 個，1 日後為 $k(a+1)$ 個

2 日後為 $k(a+1)^2$，⋯，x 日後為 $k(a+1)^x$

已知 $\begin{cases} k(a+1)^3 = 200000 & \cdots ① \\ k(a+1)^{\frac{9}{2}} = 1600000 & \cdots ② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①} \;\Rightarrow\; \dfrac{k(a+1)^{\frac{9}{2}}}{k(a+1)^3} = (a+1)^{\frac{3}{2}} = 8$

$\Rightarrow\; a + 1 = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \quad \therefore a = 3$

代入①得 $k(3+1)^3 = 200000 \;\Rightarrow\; k = \dfrac{200000}{64}$

所求 $= k(a+1)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{200000}{64} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \dfrac{200000}{64} \cdot 8 = 25000$

83 2. 設開始時兩國人口均為 k 人

則 x 年後甲國人口為 $k \cdot 2^{\frac{x}{15}}$，乙國人口為 $k \cdot 4^{\frac{x}{25}}$

解 $\dfrac{k \cdot 4^{\frac{x}{25}}}{k \cdot 2^{\frac{x}{15}}} = 2 \;\Rightarrow\; \dfrac{2^{\frac{2x}{25}}}{2^{\frac{x}{15}}} = 2^{\frac{2x}{25} - \frac{x}{15}} = 2^{\frac{x}{75}} = 2$

$\therefore \dfrac{x}{75} = 1$，得 $x = 75$

《另解》

甲：	1		2		4		8		16		32
乙：	1			4				16			64
	0		15	25	30		45	50	60		75

3. 設現有 k 公克，半衰期為 a 年

則 t 年後的質量為 $f(t) = k \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{a}}$

$\begin{cases} f(1) = k \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{1}{a}} = 128 & \cdots ① \\ f(10) = k \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{10}{a}} = 16 & \cdots ② \end{cases}$，$\dfrac{①}{②} \;\Rightarrow\; (\frac{1}{2})^{\frac{1}{a} - \frac{10}{a}} = 8$

$\Rightarrow\; (\frac{1}{2})^{-\frac{9}{a}} = 2^3 \quad \therefore \dfrac{9}{a} = 3$，得 $a = 3$

類題

37 (C) **38** (B)(C) **39** (C) **40** 16000

37 $n = 3$ 代入得 $2k$，故選(C)

38 代 $x = 2$，得 $N \cdot a^2 = 5 \times 10^5 \cdots ①$

代 $x = 5$，得 $N \cdot a^5 = 4 \times 10^6 \cdots ②$

$\dfrac{②}{①}$ 得 $a^3 = \dfrac{4 \times 10^6}{5 \times 10^5} = 8 \quad \therefore a = 2$

代入①得 $N = \dfrac{5 \times 10^5}{4} = 125000$

$\therefore x$ 天後的細菌數為 $f(x) = 125000 \times 2^x$

(C) $f(8) = 125000 \times 2^8 = 125000 \times 256 = 32000000 = 3.2 \times 10^7$

(D) $\dfrac{125000 \times 2^8}{125000 \times 2^4} = 2^4 = 16$ 倍才對

(E) $f(12) = 125000 \times 2^{12} = 5^3 \times 2^{12} \times 10^3$

$= 2^9 \times 10^6 = 512 \times 10^6 = 5.12 \times 10^8 \ne 1.28 \times 10^8$

84 **39** $\because$ 1987 年有 50 億，1999 年有 60 億

每經過 12 年乘上 $\dfrac{6}{5} = 1.2$ 倍

$\therefore$ 2011 年有 $60 \times 1.2 = 72$ 億

2023 年有 $72 \times 1.2 = 86.4$ 億，故選(C)

40 設半衰期為 k 年，現有一單位放射性元素

則 x 年後為 $f(x) = 1 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{x}{k}}$ 單位

則 $f(64000) = 1 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{64000}{k}} = \dfrac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$

$\therefore \dfrac{64000}{k} = 4$，得 $k = 16000$

歷年大考精選

1. 由算幾不等式，$\dfrac{9^x + 3^y}{2} \ge \sqrt{9^x \cdot 3^y}$

即 $\dfrac{K}{2} \ge \sqrt{3^{2x+y}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} \quad \therefore K \ge 6\sqrt{3}$

在 $9^x = 3^y$ 時，即 $2x = y$ 時，K 有最小值 $6\sqrt{3}$

在 x 很大且 y 很小時，K 會很大，故選(D)

2. Γ 的頂點為 $A(-1,3)$、$B(-1,-1)$、$C(3,-1)$、$D(3,3)$

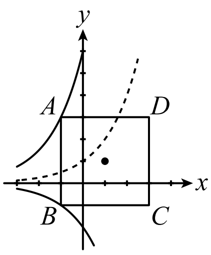
若 a 最大，則 $y = a \times 2^x$ 通過 A

得 $3 = a \times 2^{-1} = \dfrac{a}{2} \;\Rightarrow\;$ 得 $a = 6$

若 a 最小，則 $y = a \times 2^x$ 通過 B

得 $-1 = a \times 2^{-1} = \dfrac{a}{2} \;\Rightarrow\;$ 得 $a = -2$

$\therefore a$ 的範圍為 $-2 \le a \le 6$



3. (A) 18 點時，甲為 $4X$，乙為 $8Y \quad \therefore 4X = 8Y$

得 $X : Y = 2 : 1 \quad \therefore X > Y$ 成立，合

(B) 甲應為 $\sqrt[3]{2}X$ (C) 乙應為 $2\sqrt{2}Y$

(D) 19 點時，甲為 $4\sqrt[3]{2}X$，乙為 $8\sqrt{2}Y$

則 $\dfrac{8\sqrt{2}Y}{4\sqrt[3]{2}X} = \dfrac{8\sqrt{2}Y}{8\sqrt[3]{2}Y} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$ 倍才對

(E) 24 點時，甲為 $16X$，乙為 $64Y$

則 $\dfrac{64Y}{16X} = \dfrac{64Y}{32Y} = 2$ 倍，合

故選(A)(E)

素養導向試題

85 1. (1) 投入 k 元，x 年後為 $k \cdot 5^{\frac{x}{3}}$

則 x 代 $\dfrac{1}{12}$ 可求得一個月後會成長為 $k \cdot 5^{\frac{1}{36}}$

所以一個月的成長率為 $5^{\frac{1}{36}} \approx 5^{0.027778} \approx 1.0457$

即月利率約為 4.57%，故選(C)

(2) ① 即經一年增為 1.7 倍，則依此成長率放滿三年可得 $100\times1.7\times1.7\times1.7=491.3$ 萬元

② 即經兩年增為 3 倍，所以經一年增為 $\sqrt{3}$ 倍，則依此成長率放滿三年可得

$100\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\approx300\times1.732=519.6$ 萬元

故一年解約的年利率比放滿三年差，兩年解約的年利率比放滿三年好，故應兩年後解約最佳

2.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_{甲}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{32}{33}$	$\frac{64}{65}$
$f_{乙}(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{32}{41}$	$\frac{64}{73}$
$f_{丙}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{27}{28}$	$\frac{81}{82}$	$\frac{243}{244}$	$\frac{729}{730}$
$f_{丁}(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{81}{90}$	$\frac{243}{252}$	$\frac{729}{738}$

(1) x 代 0，使乙、丁的指標最小為 $\frac{1}{10}$，故選(B)(D)

86 (2)(B) $f_{甲}(x)$ 與 $f_{乙}(x)$ 的分子相同，但 $f_{乙}(x)$ 的分母比較大，所以 $f_{甲}(x)>f_{乙}(x)$ 恆成立

(C) $f_{丙}(x)$ 與 $f_{丁}(x)$ 的分子相同，但 $f_{丁}(x)$ 的分母比較大，所以 $f_{丙}(x)>f_{丁}(x)$ 恆成立

(D) $f_{甲}(6)=\frac{64}{65}=1-\frac{1}{65}$，$f_{丁}(6)=\frac{729}{738}=\frac{81}{82}=1-\frac{1}{82}$

$\therefore f_{甲}(6)<f_{丁}(6)$

故選(B)(C)

(3) 若 $x>0$，則 $\frac{2^x}{9+2^x}-\frac{3^x}{9+3^x}$

$=\frac{(9\cdot2^x+6^x)-(9\cdot3^x+6^x)}{(9+2^x)(9+3^x)}=\frac{9(2^x-3^x)}{(9+2^x)(9+3^x)}<0$

$\therefore$ 乙的績效始終比其他人低，故應資遣乙，故選(B)

資優挑戰園地

1. $f(x)=(2^x)^2-2a\cdot2^x+b=(2^x-a)^2+b-a^2$

$\therefore$ 在 $x=3$ 時，$2^3-a=0$，得 $a=8$

則 $b-a^2=b-64=16$，得 $b=80$

$\therefore a+b=8+80=88$

2. ① 由算幾不等式，$\frac{2^a+2^b}{2}\ge\sqrt{2^a\cdot2^b}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

$\therefore 2^a+2^b\ge4\sqrt{2}$

在 $a=b=\frac{3}{2}$ 時，有最小值為 $4\sqrt{2}$

② $(2^a-1)(2^b-1)\ge0$ 成立

得 $2^{a+b}-2^a-2^b+1\ge0$

$\therefore 8+1\ge2^a+2^b$

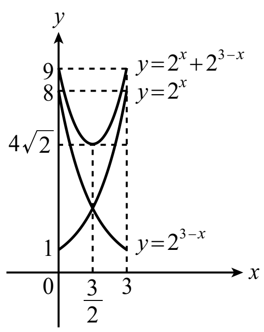
$\therefore$ 最大值為 9

《另解》

$2^a+2^b=2^a+2^{3-a}$

令 $f(x)=2^x+2^{3-x}$ 作圖如右

由圖知 $(a,b)=(3,0)$ 或 $(0,3)$ 時，有最大值為 9



$(a,b)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 時，有最小值為 $2^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{3}{2}}=4\sqrt{2}$

3. ① $f(2+0)=f(2)\cdot f(0)$，得 $\frac{25}{81}=\frac{25}{81}\cdot f(0)$，得 $f(0)=1$

② $f(1+1)=f(1)\cdot f(1)=\frac{25}{81}$，得 $f(1)=\frac{5}{9}$

$\therefore f(3)=f(2+1)=f(2)\cdot f(1)=\frac{25}{81}\cdot\frac{5}{9}=\frac{125}{729}$

4. (1) $f(x)=\frac{(a^x-a^{-x})\cdot a^x}{(a^x+a^{-x})\cdot a^x}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

由 $f(\alpha)=\frac{a^{2\alpha}-1}{a^{2\alpha}+1}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ a^{2\alpha}=5$

由 $f(\beta)=\frac{a^{2\beta}-1}{a^{2\beta}+1}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a^{2\beta}=3$

$\therefore f(\alpha+\beta)=\frac{a^{2\alpha}\cdot a^{2\beta}-1}{a^{2\alpha}\cdot a^{2\beta}+1}=\frac{5\cdot3-1}{5\cdot3+1}=\frac{7}{8}$

(2) $f(x)=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

$\Rightarrow\ a^{2x}\cdot f(x)+f(x)=a^{2x}-1$

移項 $\Rightarrow\ a^{2x}=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

同理，x 換成 y 得 $a^{2y}=\frac{1+f(y)}{1-f(y)}$

$\therefore f(x+y)=\frac{a^{2x}\cdot a^{2y}-1}{a^{2x}\cdot a^{2y}+1}$

$$=\frac{\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\cdot\frac{1+f(y)}{1-f(y)}-1}{\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\cdot\frac{1+f(y)}{1-f(y)}+1}=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

2-2 對數符號與對數律

範例研習特區

範例 1

88 1. 即 $10^{3a}=21\quad\therefore 3a=\log21$

得 $a=\frac{\log21}{3}$，按計算機得知 $a\approx\frac{1.3222}{3}\approx0.4407$

2. (1) $10^{\log7}=7$

(2) $100^{\log3}=10^{2\log3}=(10^{\log3})^2=3^2=9$

(3) $(0.0001)^{\log\sqrt{2}}=10^{-4\log\sqrt{2}}=(10^{\log\sqrt{2}})^{-4}=\sqrt{2}^{-4}=\frac{1}{\sqrt{2}^4}=\frac{1}{4}$

3. (1) $\log(10^{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$　(2) $\log(1000^{-\frac{5}{2}})=\log(10^{-\frac{15}{2}})=-\frac{15}{2}$

(3) $\log\sqrt[7]{0.0001}=\log\sqrt[7]{10^{-4}}=\log(10^{-\frac{4}{7}})=-\frac{4}{7}$

4. $a=10^{2.3}$，$b=10^{1.4}$，$c=10^{-0.7}$

(1) $abc=10^{2.3}\times10^{1.4}\times10^{-0.7}=10^{2.3+1.4-0.7}=10^3=1000$

(2) $\log(100a^2)=\log(10^2\times10^{4.6})=\log(10^{6.6})=6.6$

類 題

1 (1) 6　(2) 8　(3) 125　(4) $\frac{1}{343}$　**2** (1) 5　(2) $-\frac{3}{2}$　(3) $\frac{8}{3}$　(4) $-\frac{4}{5}$　**3** (1) -18.9　(2) 1000

對話式®

高中數學A
第 3 冊 講義
課後練習本

班級:____________ 姓名:____________ 座號:________

第13回　2-1 指數函數的求值問題

1 設 $f(x)=2^x-2^{-x}$，試求 $f(0)=$______，$f(3)=$______，$f(-3)=$______，$f(\frac{1}{2})=$______，$f(-\frac{3}{2})=$______。

解

2 設 $f(x)=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $f(-\frac{2}{3})=5$，求 $f(\frac{4}{3})=$______，函數值 $f(99)$ 是 $f(101)$ 的______倍。

解

3 設 a、b、n 為實數，$x>0$，函數 $f(x)=ax^n+b$，已知 $f(2)=17$，$f(4)=77$，$f(8)=377$，求 $a=$______，$b=$______，n 值介於哪兩個連續整數之間？______

解

4 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，$x\neq 0$，若 $f(a)=2$，$f(b)=3$，則 $f(a+b)=$______。

解

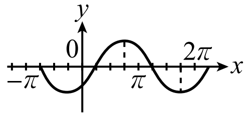
5 若 $f(x)=-3\cdot 4^x+2^{x+2}$，且 $-1\leq x\leq 0$，則 $f(x)$ 最大值為______，最小值為______。

解

6 函數 $f(x)=(4^x+4^{-x})+(2^x+2^{-x})+5$，$x$ 為實數，令 $t=2^x+2^{-x}$，則 t 的範圍為______，當 $x=$______時，$f(x)$ 有最小值為______。

解

把 $y=\sin x$ 右移 $\frac{\pi}{4}$，再上下拉長成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍得 $f(x)$，圖形如右



(B) $f(x)$ 振幅為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

(E)看圖可知 $f(x)$ 的圖形沒有對稱原點　∴選(A)(C)(D)

第 13 回

13 1. $f(0)=2^0-2^0=1-1=0$，$f(3)=2^3-2^{-3}=8-\frac{1}{8}=\frac{63}{8}$

$f(-3)=2^{-3}-2^3=\frac{1}{8}-8=-\frac{63}{8}$

$f(\frac{1}{2})=2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(-\frac{3}{2})=2^{-\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}-2^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}^3}-\sqrt{2}^3$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-2\sqrt{2}=-\frac{7}{4}\sqrt{2}$

2. $f(-\frac{2}{3})=a^{-\frac{2}{3}}=5$　∴ $a^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$　⇒　$a^2=\frac{1}{125}$

所以 $f(\frac{4}{3})=a^{\frac{4}{3}}=(a^{\frac{2}{3}})^2=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$

而 $\frac{f(99)}{f(101)}=\frac{a^{99}}{a^{101}}=\frac{1}{a^2}=125$

3. $f(2)=a\cdot2^n+b=17\cdots$①，$f(4)=a\cdot4^n+b=77\cdots$②

$f(8)=a\cdot8^n+b=377\cdots$③

②−①為 $a\cdot(4^n-2^n)=60\cdots$④

③−②為 $a\cdot(8^n-4^n)=300\cdots$⑤

⑤÷④得 $\frac{8^n-4^n}{4^n-2^n}=\frac{2^n(4^n-2^n)}{4^n-2^n}=2^n=\frac{300}{60}=5$

∴ n 介於 2 與 3 之間

代回④得 $a\cdot(25-5)=60$　∴ $a=3$

代回①得 $3\cdot5+b=17$　∴ $b=2$

4. $f(x)=\frac{(2^x+2^{-x})2^x}{(2^x-2^{-x})2^x}=\frac{4^x+1}{4^x-1}$

$f(a)=\frac{4^a+1}{4^a-1}=2$　⇒　$4^a=3$

$f(b)=\frac{4^b+1}{4^b-1}=3$　⇒　$4^b=2$

∴ $f(a+b)=\frac{4^{a+b}+1}{4^{a+b}-1}=\frac{4^a\cdot4^b+1}{4^a\cdot4^b-1}=\frac{3\cdot2+1}{3\cdot2-1}=\frac{7}{5}$

5. $f(x)=-3\cdot(2^x)^2+4\cdot2^x=-3\left[(2^x)^2-\frac{4}{3}\cdot2^x+\frac{4}{9}\right]+\frac{4}{3}$

$=-3(2^x-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}$

∵ $-1\le x\le0$　⇒　$\frac{1}{2}\le2^x\le1$

$\begin{cases}2^x=\frac{2}{3}\text{ 時，}f(x)\text{ 有最大值}=\frac{4}{3}\\2^x=1\text{ 時，}f(x)\text{ 有最小值}=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=1\end{cases}$

6.由算幾不等式 $\frac{t}{2}=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\ge\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$　∴ $t\ge2$

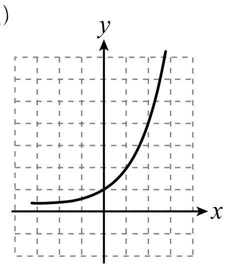
平方 ⇒ $t^2=(2^x+2^{-x})^2=4^x+4^{-x}+2$ ⇒ $4^x+4^{-x}=t^2-2$

$f(x)=(t^2-2)+t+5=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$　∴在 $t=2$ 時

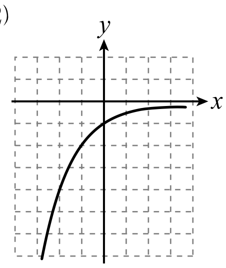
$f(x)$ 有最小值 $=9$，此時 $2^x=2^{-x}=1$　⇒　$x=0$

第 14 回

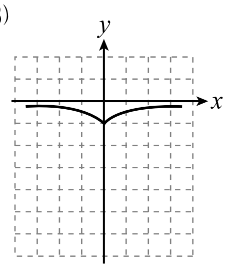
14 1.(1)



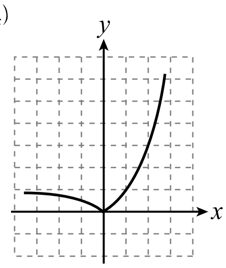
(2)



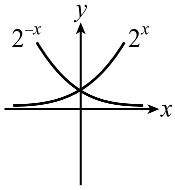
(3)

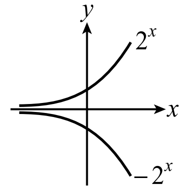


(4)

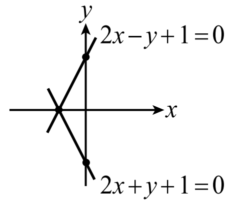


2.(A)對稱 y 軸　　(B)對稱 x 軸





(C)對稱 x 軸



(D)兩拋物線開口均朝上，不可能對稱 x 軸　∴選(B)(C)

3.(1)整個函數加負號，得 $y=-5^x$

(2)把 x 換成 $-x$，得 $y=5^{-x}$

(3) $y=5^x$ 對 y 軸對稱後再加負號，得 $y=-5^{-x}$

(4)左移 3 為 $y=5^{x+3}$，再下移 2 為 $y=5^{x+3}-2$

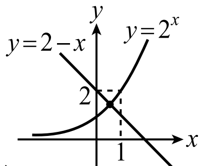
4.∵圖形遞減

∴ $0<a<1$，為 $y=a^x$ 向右再向下移，故 $b<0$ 且 $c<0$

∴選(D)

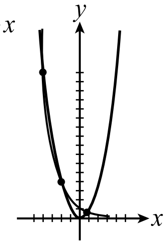
5.∵ $y=2-x$ 與 $y=2^x$ 有一個交點

∴ $2-x=2^x$ 有一個實根，且介於 0 與 1 之間



6. $y=x^2$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 有 3 個交點

∴ $x^2=(\frac{1}{2})^x$ 有 3 個實根



第 15 回

15 1.(1)即 $(2^{-2})^x=2^{-2x}=2^7$　∴ $-2x=7$，得 $x=-\frac{7}{2}$

(2)即 $(3^{\frac{1}{2}})^{3x+2}=\frac{3^3\cdot3^{\frac{1}{2}}}{3^x}$　⇒　$3^{\frac{3x+2}{2}}=3^{\frac{7}{2}-x}$

∴ $\frac{3x+2}{2}=\frac{7-2x}{2}$，得 $x=1$