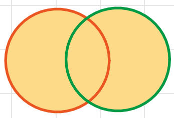
# 目次

# 5
# 排列組合與機率

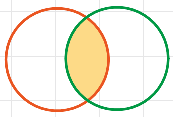
## ☆ 集合間的關係

$A \cup B$



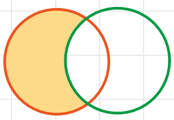
聯集：A與B所有的元素所成的集合

$A \cap B$



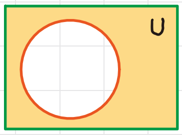
交集：A與B共同的元素所成的集合

$A - B$



差集：在A但不在B的元素所成的集合

$A'$




餘集：在宇集合中所有不屬於A的元素所成的集合

---

## ☆ 計數原理

1. 一一對應原理：兩個有限集合的元素可建立一個一一對應的關係，則這兩個集合的元素個數相等
2. 加法原理：如果完成某件事有 $k$ 種不同途徑可選擇，且任兩種途徑不會同時發生，若 $k$ 種途徑分別有 $m_1$、$m_2$ … $m_k$ 種方法，則完成該件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 種方法
3. 乘法原理：如果完成某件事需經過 $k$ 個步驟，若第 $k$ 個步驟有 $m_k$ 種方法，則完成該件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 種方法
4. 取捨原理：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

   $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

## ☆ 相異物的排列、組合

n個相異物排成一列的方法數為 $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 種

從n個相異物選k個出來排成一列（有先後順序），方法數為 $P^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 種

從n個相異物選k個出來為一組（沒有先後順序），方法數為 $C^n_k = \frac{P^n_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 種

note：排列、組合皆為計數的方法

計數前先分析 $\begin{cases} \text{需要考慮次序} \rightarrow \text{排列} \\ \text{不需要考慮次序} \rightarrow \text{組合} \end{cases}$

---

## ☆ 有相同物的排列

有k種不同種類的物件，每種個數分別為 $m_1$、$m_2$、…、$m_k$ 個

且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，同種物件視為相同物，則將此n個物件排成一列的方法共有 $\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ 種

---

## ☆ 重複排列

從 $n$ 種不同種類的物件任選 $k$ 個排成一列，每種至少k個，可重複選取，則排法有 $n^k$ 種

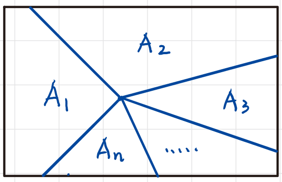
---

## ☆ 古典機率

1. 樣本空間S內每一事件發生的機會相同，則事件A發生的機率 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$
2. 事件A在樣本空間內，$0\le P(A)\le 1$
3. $P(\phi)=0$，$P(S)=1$，$P(A')=1-P(A)$

---

## ☆ 期望值




某隨機試驗的樣本空間 S

$A_1$、$A_2$、$A_3$…$A_n$ 為樣本空間S的一組分割

即 $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 且 $A_1\sim A_n$ 兩兩交集為空集合。若事件 $A_i$ 發生的機率為 $P_i$，且發生時可得到對應值 $m_i$，則此隨機試驗的期望值為 $E=P_1m_1+P_2m_2+P_3m_3+\cdots+P_nm_n$

## 第壹部分：選擇題（占 85 分）

### 一、單選題（占 35 分，每題 5 分）

______ 1. 若直角三角形的三邊長均為整數，則此三邊長稱為「畢達哥拉斯數」，例如「3, 4, 5」、「5, 12, 13」、「8, 15, 17」等均為畢達哥拉斯數。今從 1, 2, 3, …, 20 中任選三個數，則此三數可作為畢達哥拉斯數的機率為何？

(A) $\frac{1}{38}$　(B) $\frac{1}{57}$　(C) $\frac{1}{190}$　(D) $\frac{1}{228}$　(E) $\frac{1}{285}$

______ 2. 設 $f(x)=(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3+\cdots+(x-1)^7$，若將 $f(x)$ 展開且作同類項合併後，試問 $x^4$ 項的係數為何？

(A) 0　(B) 24　(C) $-24$　(D) 35　(E) $-35$

______ 3. 擲三顆公正的骰子，1 點只出現一次或 2 點只出現一次的機率為何？

(A) $\frac{1}{9}$　(B) $\frac{7}{12}$　(C) $\frac{4}{27}$　(D) $\frac{19}{27}$　(E) $\frac{25}{36}$

______ 4. 若三位數滿足「百位數字 + 十位數字 = 個位數字」的規則，則稱之為「加法數」，如：415、707、224 皆為加法數。現從「加法數」中任選一個，其十位、個位數字中至少有一個為 0 的機率為何？

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{5}$　(C) $\frac{2}{5}$　(D) $\frac{1}{20}$　(E) $\frac{3}{50}$

______ 5. 最常見的十二星座分類法是將星座分成火、土、風、水四種，分法如下：

火象星座：牡羊座、獅子座、射手座　　土象星座：摩羯座、金牛座、處女座

風象星座：水瓶座、雙子座、天秤座　　水象星座：雙魚座、巨蟹座、天蠍座

設一家庭共四人，每人都是不同的星座，則其中三人恰好屬於同象星座的機率為何？

(A) $\frac{1}{55}$　(B) $\frac{4}{55}$　(C) $\frac{12}{55}$　(D) $\frac{2}{165}$　(E) $\frac{4}{165}$

## 二、多選題（占 25 分，每題 5 分）

______ 8. 試選出方法數與 $C^6_3$ 的值相同的選項。

(A) 6 本不同的書，平分成兩堆的方法數
(B) 4 男 2 女，任選出 3 人的方法數
(C) 3 顆相同紅球和 3 顆相同白球排成一列的方法數
(D) $AAABCD$ 排成一列的方法數
(E) 編號 1 ～ 8 號的車廂，選出 3 個不相鄰的車廂作為可吸菸車廂的方法數

______ 9. 已知兩多項式分別為 $f(x)=1+C^{10}_1x+C^{10}_2x^2+C^{10}_3x^3+\cdots+C^{10}_8x^8+C^{10}_9x^9+x^{10}$，以及 $g(x)=1-C^{10}_1x+C^{10}_2x^2-C^{10}_3x^3+\cdots+C^{10}_8x^8-C^{10}_9x^9+x^{10}$，令 $h(x)=f(x)g(x)$，試選出正確的選項。

(A) $f(1)=1024$
(B) $g(0)=g(2)$
(C) $C^{10}_1+C^{10}_3+C^{10}_5+C^{10}_7+C^{10}_9=\frac{f(1)}{2}$
(D) $h(x)$ 的 $x^3$ 項之係數為 0
(E) $h(x)$ 的 $x^6$ 項之係數為 $-120$

______ 10. 老師調查班上同學的血型，人數如右表，試選出正確的選項。

| | A | B | O | AB |
|---|---|---|---|---|
| 男 | 8 | 4 | 12 | 6 |
| 女 | 4 | 2 | 8 | 6 |

(A) 從男生中選出一人，血型為 $B$ 的機率最小
(B) 從男生中選出一人，血型為 $O$ 的機率和從女生中選出一人，血型為 $O$ 的機率相等
(C) 從男生中選出一人，血型為 $AB$ 的機率和從女生中選出一人，血型為 $AB$ 的機率相等
(D) 從 $AB$ 型的學生中選出一人，選到男生的機率和選到女生的機率相等
(E) 從全班選出一人，血型為 $A$ 的機率和血型為 $AB$ 的機率相等

______ 11. 袋中有大小相同的紅球 1 顆、白球 2 顆、黃球 3 顆，每球被取到的機率相等，每次從袋中任取一球，取出不放回，連取三球。若取出的三球出現三種顏色可得獎金 300 元，恰出現兩種顏色可得獎金 200 元，只出現一種顏色可得獎金 100 元。試選出正確的選項。

(A)三球顏色皆不同的機率為 $\frac{1}{20}$

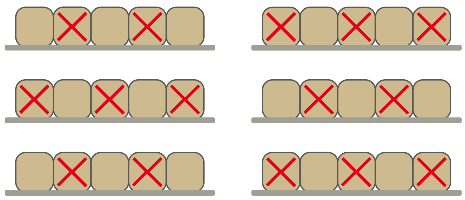
(B)三球顏色皆相同的機率為 $\frac{1}{20}$

(C)取出 2 顆白球和 1 顆黃球的機率為 $\frac{1}{40}$

(D)取出的球恰出現兩種顏色的機率為 $\frac{13}{20}$

(E)獎金的期望值為 225 元

______ 12. 新冠肺炎（*COVID*-19）的疫情於 2019 年年底逐漸爆發，中央疫情指揮中心建議室內社交距離宜保持 1.5 公尺，如：醫院、圖書館、餐廳等公共場合，都紛紛進行了配合的措施。醫院候診區的座位中，有些被貼上「×」的貼紙禁止入座，原則為確保每個開放的座位其前、後、左、右都不可入座即可，例如：3 列 5 行的座位區，其標示情形可為右圖兩種。若考慮 4 列 6 行的座位區，試選出正確的選項。



(A)座位區的標示情形只有兩種

(B)座位區標示後，最多能坐 12 個人

(C)座位區標示後，甲、乙兩人入座有 66 種方法

(D)座位區標示後，甲、乙兩人入座同一列的機率為 $\frac{2}{11}$

(E)座位區標示後，甲、乙兩人入座不同行且不同列的機率為 $\frac{7}{11}$

## 三、選填題（占 25 分，每題 5 分）

13. 袋中有大小相同的 9 顆球，分別編號 1 至 9，每一球被取到的機率相等，任取三球，放入右圖九宮格對應數字的格子中，則無法連成一線（直線、橫線、斜線）的機率為 $\frac{\text{13-1}\ \text{13-2}}{\text{13-3}\ \text{13-4}}$。（化成最簡分數） 答 ______

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 |
| 7 | 2 | 4 |
| 3 | 9 | 8 |

## 第貳部分：混合題（占 15 分）

18.－20.題為題組

逛夜市時，阿寶發現了一個遊戲攤位，其規則如下：箱子中已有 2 顆黑球，必須向老闆購買白球放入箱子裡，每一顆白球要付 5 元，接著從箱子中取球，一次取一球，取出不放回，依取出的順序將所有的球排成一列。若 2 顆黑球之間有 $n$ 顆白球，就可以獲得獎金 $10\times n$ 元。例如：箱子中共有 5 顆白球及 2 顆黑球，若取出順序為「黑白白白黑白白」，就可以獲得獎金 30 元。

18. 設箱子中有 5 顆白球及 2 顆黑球，則取出球的順序有多少種？（3 分）________

19. 設箱子中有 4 顆白球及 2 顆黑球，則獲得獎金 20 元的機率為何？（6 分）______

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{1}{10}$　(C) $\frac{1}{20}$　(D) $\frac{4}{27}$　(E) $\frac{4}{81}$

20. 阿寶決定向老闆買 6 顆白球來試試手氣，試求阿寶的獎金期望值為多少？（4 分）並判斷阿寶花錢玩這個遊戲是否划算？（2 分）____________

寫完了～～
詳細解說請參見詳解本 P.8

(C)若 $\sigma_x = 10$ 時

方案甲：$\sigma_y = 0.6\sigma_x$，可得 $\sigma_y = 6$

方案乙：$\sigma_y = 1.8\sigma_x$，可得 $\sigma_y = 18$

方案丙：$\sigma_y = \sigma_x$，可得 $\sigma_y = 10$

所以採用方案甲調整後的標準差最小

(D)因為三種方案都呈現線性關係且斜率為正，所以原始分數與調整後分數的相關係數都是 1

(E)因為三種方案都呈現線性關係，所以此關係就是最適直線，因此方案乙的斜率最大

13. 因為最適直線會通過點 $(\mu_x, \mu_y)$

$\mu_y = \dfrac{1}{4}\mu_x + 2.5 = \dfrac{1}{4} \times 50 + 2.5 = 15$

又定期考的平均分數為測驗題平均加寫作平均

所以此次國文定期考的平均分數是 $50 + 15 = 65$ 分

14. 由 $a_1 = 1$，$a_2 = 3 = 2a_1 + k = 2 + k$ 可推得 $k = 1$

所以 $a_{n+1} = 2a_n + 1$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 7$，$a_4 = 2a_3 + 1 = 15$，$a_5 = 2a_4 + 1 = 31$

15. 第 1 圖有 1 個 $2 \times 2$ 橘色正方形

第 2 圖比第 1 圖多了 3 個 $1 \times 1$ 橘色正方形

第 3 圖比第 2 圖多了 9 個 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$ 橘色正方形

第 4 圖比第 3 圖多了 27 個 $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4}$ 橘色正方形

第 5 圖比第 4 圖多了 81 個 $\dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{8}$ 橘色正方形

所以第 5 圖中橘色的區域面積為

$2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1 + 9 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + 27 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + 81 \times \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{8}$

$= 2 \times 2 \times \dfrac{1 - (\frac{3}{4})^5}{1 - \frac{3}{4}} = \dfrac{781}{64}$

16. 設沒取到的數為 $x$，則 8 個數的標準差

$= \sqrt{\dfrac{1}{8}(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 - x^2) - (\dfrac{1 + 2 + \cdots + 9 - x}{8})^2}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{8}(285 - x^2) - (\dfrac{45 - x}{8})^2} = \sqrt{-\dfrac{1}{8^2}(9x^2 - 90x - 255)}$

$= \sqrt{-\dfrac{9}{8^2}(x-5)^2 + \dfrac{15}{2}} \le \sqrt{\dfrac{15}{2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

當 $x = 5$ 時，標準差有最大值 $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

17. 設阿信每個月平均攤還本息 $x$ 元，5 年還款的總金額為

$500000 \times (1 + 0.4\%)^{60} \approx 500000 \times 1.27 = 635000$ 元

每個月固定還款 $x$ 元，可視作存 $x$ 元

因此若每個月固定存 $x$ 元，5 年需存到 635000 元

$x \times 1.004^{59} + x \times 1.004^{58} + \cdots + x \times 1.004 + x = 635000$

$\Rightarrow \quad x \times \dfrac{1.004^{60} - 1}{1.004 - 1} = 635000 \quad \Rightarrow \quad x \times \dfrac{1.27 - 1}{1.004 - 1} = 635000$

$\Rightarrow \quad x \approx 9407$ 元

## 第貳部分：混合題

18. $[15 \times (\dfrac{1}{8})^3 + 2 \times (\dfrac{1}{25})^3] \times 200^3 = (15 \times \dfrac{1}{2^9} + 2 \times \dfrac{1}{5^6}) \times (2^3 \times 5^2)^3$

$= 15 \times \dfrac{2^9 \times 5^6}{2^9} + 2 \times \dfrac{2^9 \times 5^6}{5^6} = 15 \times 5^6 + 2 \times 2^9 = 3 \times 5^7 + 2^{10}$

$\therefore m = 10$，$n = 1$，$k = 7 \quad \Rightarrow \quad (m, n, k) = (10, 1, 7)$

19. 黴菌 $A$ 經過 $n$ 小時所占據表面積為 $15 \times (\dfrac{1}{8})^n\ mm^2$

黴菌 $B$ 經過 $n$ 小時所占據表面積為 $2 \times (\dfrac{1}{25})^n\ mm^2$

兩種黴菌放在一起後所占據表面積為

$[15 \times (\dfrac{1}{8})^n + 2 \times (\dfrac{1}{25})^n] \times 200^n = 15 \times 25^n + 2 \times 8^n$

當 $n = 1$ 時，$15 \times 25^1 + 2 \times 8^1 = 391 = 17 \times 23$

當 $n = 2$ 時，$15 \times 25^2 + 2 \times 8^2 = 9503 = 17 \times 559$

$\therefore$ 此質數應該為 17

20. ①當 $n = 1$ 時，$15 \times 25^1 + 2 \times 8^1 = 391 = 17 \times 23$ 為 17 的倍數

②設 $n = k$ 時，原式成立

即 $15 \times 25^k + 2 \times 8^k = 17t$，$t$ 為正整數

則 $n = k + 1$ 時

$15 \times 25^{k+1} + 2 \times 8^{k+1}$

$= 8 \times (15 \times 25^k + 2 \times 8^k) + 17 \times 15 \times 25^k$

$= 17 \times (8t + 15 \times 25^k)$ 為 17 的倍數

故由數學歸納法得知

對於任意的正整數 $n$，$15 \times 25^n + 2 \times 8^n$ 恆為 17 的倍數

# 5 排列組合與機率

請參見題本 P.36

1.(C) 2.(C) 3.(B) 4.(B) 5.(B)
6.(A) 7.(D) 8.(B)(C)(E) 9.(A)(B)(C)(D)(E)
10.(A)(B)(D)(E) 11.(B)(D)(E) 12.(A)(B)(D)
13.① 1 ② 9 ③ 2 ④ 1 14.① 9 ② 6
15.① 1 ② 2 ③ 5 ④ 0
16.① 4 ② 5 ③ 2 ④ 5 ⑤ 6 17.① 2 ② 4 ③ 0
18. 21 種 19.(A) 20. 20 元；不划算

## 第壹部分：選擇題

1. 可能的直角三角形邊長為 $(3,4,5)$、$(6,8,10)$、$(9,12,15)$、$(12,16,20)$、$(5,12,13)$、$(8,15,17)$

$\therefore$ 可作為畢達哥拉斯數的機率為 $\dfrac{6}{C_3^{20}} = \dfrac{6}{1140} = \dfrac{1}{190}$

2. 所求為 $C_4^4(-1)^0 + C_4^5(-1)^1 + C_4^6(-1)^2 + C_4^7(-1)^3$

$= 1 - 5 + 15 - 35 = -24$

3. 令 $A$ 為 1 點只出現 1 次之事件，$B$ 為 2 點只出現 1 次之事件，所求機率

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{C_1^3 \times 5^2}{6^3} + \dfrac{C_1^3 \times 5^2}{6^3} - \dfrac{C_1^3 \times C_1^2 \times 4}{6^3}$

$= \dfrac{75}{216} + \dfrac{75}{216} - \dfrac{24}{216} = \dfrac{126}{216} = \dfrac{7}{12}$

4. 個位數字為 1 的加法數為 101

個位數字為 2 的加法數為 112、202

個位數字為 3 的加法數為 123、213、303

因此，個位數字為 $k$ 的加法數有 $k$ 個，其中 $1 \le k \le 9$

所以加法數共有 $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ 個

個位數字為 0 之加法數有 0 個

十位數字為 0 之加法數有 9 個

故所求機率為 $\dfrac{9}{45} = \dfrac{1}{5}$

5. 三人同象機率為 $\dfrac{\overbrace{(C_1^4\times C_3^4\times 3!)}^{\text{選 3 人同象}}\times\overbrace{(C_1^3\times C_1^3)}^{\text{另 1 人不同象}}}{12\times 11\times 10\times 9}=\dfrac{4}{55}$

6. 利用乘法原理解題

開胃料理有 $C_1^3=3$ 種選法，湯品有 $C_2^4=6$ 種選法

美味主餐有 $C_2^6-C_2^3=12$ 種選法（扣除 2 份都牛）

精緻飲料有 $C_2^4-C_2^2=5$ 種選法（扣除 2 份都冰）

創意甜點有 $C_2^3=3$ 種選法

故共有 $3\times 6\times 12\times 5\times 3$ 種圈選方法

7. 令氣炸鍋為 $a$，衣服為 $b$，球鞋為 $c$，看電影為 $d$

《方法一》

正面解法：依 $a,b,d,c$ 順序使用信用卡

① $b$、$d$ 同一張卡，方法有 $\overset{a}{3}\times\overset{b}{2}\times\overset{d}{1}\times\overset{c}{4}=24$ 種

② $b$、$d$ 不同一張卡，方法有 $\overset{a}{3}\times\overset{b}{2}\times\overset{d}{1}\times\overset{c}{5}=30$ 種

∴共有 $24+30=54$ 種

《方法二》

反面解法：$\underbrace{\overset{a}{3}\times\overset{b}{2}\times\overset{d}{2}\times\overset{c}{5}}_{\substack{\text{點數累積卡}\\\text{可能使用 3 次}}}-\underbrace{\overset{a}{3}\times\overset{b}{2}\times\overset{d}{1}\times\overset{c}{1}}_{\substack{b、d、c\\\text{使用同張卡}}}=54$

∴共有 54 種

8. (A)方法數為 $\dfrac{C_3^6C_3^3}{2!}$　(B)方法數為 $C_3^6$

(C)方法數為 $\dfrac{6!}{3!3!}=C_3^6$　(D)方法數為 $\dfrac{6!}{3!}$

(E)不吸菸的車廂有 5 個 ˇ□ˇ□ˇ□ˇ□ˇ□ˇ

會有 6 空隙，將 3 個吸菸車廂插空

共有 $C_3^6$ 種方法

9. $f(x)=1+C_1^{10}x+C_2^{10}x^2+\cdots+C_9^{10}x^9+x^{10}=(1+x)^{10}$

$g(x)=1-C_1^{10}x+C_2^{10}x^2-\cdots-C_9^{10}x^9+x^{10}=(1-x)^{10}$

$h(x)=f(x)\cdot g(x)=(1+x)^{10}(1-x)^{10}$

(A) $f(1)=(1+1)^{10}=1024$

(B) $g(0)=(1-0)^{10}=1$，$g(2)=(1-2)^{10}=1$

故 $g(0)=g(2)$

(C) $C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10}=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{f(1)}{2}$

(D) $h(x)=(1-x^2)^{10}=1-C_1^{10}x^2+C_2^{10}x^4-\cdots+C_{10}^{10}(x^2)^{10}$

故 $h(x)$ 的 $x^3$ 係數為 0

(E) $h(x)$ 的 $x^6$ 係數為 $-C_3^{10}=-120$

10. (A)男生中 $B$ 型人數最少，故機率最小

(B)男生中選出 $O$ 型之機率為 $\dfrac{12}{30}=0.4$

女生中選出 $O$ 型之機率為 $\dfrac{8}{20}=0.4$

(C)男生中選出 $AB$ 型之機率為 $\dfrac{6}{30}=0.2$

女生中選出 $AB$ 型之機率為 $\dfrac{6}{20}=0.3$

(D)皆為 $\dfrac{1}{2}$

(E)全班選 1 人為 $A$ 型之機率為 $\dfrac{12}{50}$

全班選 1 人為 $AB$ 型之機率為 $\dfrac{12}{50}$

11. (A)三球不同色的機率為 $\dfrac{C_1^1C_1^2C_1^3\times 3!}{6\times 5\times 4}=\dfrac{3}{10}$

(B)三球皆同色（只能黃色）的機率為 $\dfrac{C_3^3\times 3!}{6\times 5\times 4}=\dfrac{1}{20}$

(C)取出 2 白 1 黃的機率為 $\dfrac{C_2^2\times C_1^3\times 3!}{6\times 5\times 4}=\dfrac{3}{20}$

(D) $1-P$(三球皆同色)$-P$(三球不同色)

$=1-\dfrac{1}{20}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{13}{20}$

(E)期望值 $E=300\times\underbrace{\dfrac{3}{10}}_{\text{由(A)}}+200\times\underbrace{\dfrac{13}{20}}_{\text{由(D)}}+100\times\underbrace{\dfrac{1}{20}}_{\text{由(B)}}=225$ 元

12. (A)僅兩種情形，如右圖

☐⊠☐⊠☐⊠　⊠☐⊠☐⊠☐
⊠☐⊠☐⊠☐　☐⊠☐⊠☐⊠
☐⊠☐⊠☐⊠　⊠☐⊠☐⊠☐
⊠☐⊠☐⊠☐　☐⊠☐⊠☐⊠

(B)由(A)觀察出最多能坐 12 個人

(C)共 $C_2^{12}\cdot 2!=132$ 種

(D)甲先選位置有 12 種方法，乙再選位置有 2 種方法

因此，機率為 $\dfrac{12\times 2}{C_2^{12}\times 2!}=\dfrac{2}{11}$

(E)甲先選位置有 12 種方法，乙再選位置有 8 種方法（扣除甲所在的行與列），因此，機率為 $\dfrac{12\times 8}{C_2^{12}\times 2!}=\dfrac{8}{11}$

13. 可連成一線之機率為 $\dfrac{8}{C_3^9}=\dfrac{8}{84}=\dfrac{2}{21}$

故不可能連成一線之機率為 $1-\dfrac{2}{21}=\dfrac{19}{21}$

14. 設 20 元盆栽買 $x$ 個，30 元盆栽買 $y$ 個

故 $20x+30y=100$，得 $(x,y)=(2,2)$ 或 $(5,0)$

所以有 $C_2^6\cdot C_2^4+C_5^6\cdot C_0^4=96$ 種買法

15. 期望值

$E=\dfrac{1}{3}\times 2000+\dfrac{1}{3}\times 1000+\underbrace{\dfrac{1}{3\times 2}\times\left(\dfrac{2000}{2}\right)}_{\text{第 2 次抽 2000}}+\underbrace{\dfrac{1}{3\times 2}\times\left(\dfrac{1000}{2}\right)}_{\text{第 2 次抽 1000}}$

$=\dfrac{2000}{3}+\dfrac{1000}{3}+\dfrac{500}{3}+\dfrac{250}{3}=1250$ 元

16. $\begin{cases}\text{末一碼為奇數：甲、乙}\\\text{末一碼為偶數：丙、丁、戊}\end{cases}$

每個人任選一天的方法皆為 4 種

所以 5 個人任選，有 $4^5$ 種方法

① 5 人皆不在星期日購買

方法數為 $(\underbrace{3}_{\text{甲}}\times\underbrace{2}_{\text{乙}})\times\underbrace{3!}_{\text{丙、丁、戊}}=36$ 種

②甲或乙在星期日購買

方法數為 $(\underbrace{C_1^2\times 3}_{\text{甲、乙}})\times\underbrace{3!}_{\text{丙、丁、戊}}=36$ 種

③丙或丁或戊在星期日購買

方法數為 $(\underbrace{3}_{\text{甲}}\times\underbrace{2}_{\text{乙}})\times(\underbrace{C_1^3\times 3\times 2}_{\text{丙、丁、戊}})=108$ 種

故所求機率為 $\dfrac{36+36+108}{4^5}=\dfrac{45}{256}$

17. 設四種顏色為 $a$、$b$、$c$、$d$

①選出使用兩次的顏色，有 $C_2^4$ 種

不妨設使用的顏色為 $a$、$a$、$b$、$b$、$c$、$d$

②將 *Google* 配色

❶兩個 $g$ 同色，兩個 $o$ 異色：

先將兩個 $g$ 配色有 $C_1^2$ 種方法

不妨設兩個 $g$ 選兩個 $a$，顏色剩下 $b$、$b$、$c$、$d$

剩下四字 *oole* 任意配色有 $\frac{4!}{2!}$ 種方法

其不合情形為兩個 $o$ 同色有 $2!$ 種方法

由乘法原理知有 $C_1^2\times(\frac{4!}{2!}-2!)$ 種方法

❷兩個 $g$ 異色，兩個 $o$ 同色：

同❶有 $C_1^2\times(\frac{4!}{2!}-2!)$ 種方法

因此，配色方法共有 $C_2^4\cdot 2\cdot C_1^2\times(\frac{4!}{2!}-2!)=240$ 種方法

## 第貳部分：混合題

18. $\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\times 6}{2!}=21$ 種

19. 任意排的方法數為 $\frac{6!}{4!2!}=15$ 種

獲得 20 元的排列方式，如：$\underbrace{\boxed{\text{黑白白黑}}}^{\text{視為一體}}$白白

共有 $\frac{3!}{2!}=3$ 種方法，故獲得 20 元之機率為 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

20. ①任意排的方法數為 $\frac{8!}{2!6!}=28$ 種

| 獎金 | 0元 | 10元 | 20元 | 30元 | 40元 | 50元 | 60元 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 機率 | $\frac{7}{28}$ | $\frac{6}{28}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{4}{28}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{2}{28}$ | $\frac{1}{28}$ |

故獎金期望值

$$E=\frac{7}{28}\times 0+\frac{6}{28}\times 10+\frac{5}{28}\times 20+\frac{4}{28}\times 30+\frac{3}{28}\times 40+\frac{2}{28}\times 50+\frac{1}{28}\times 60=\frac{560}{28}=20\text{ 元}$$

②買 6 顆白球需付 30 元，大於獎金期望值 20 元，故不划算

# 6 三角比

請參見題本 P.44

1.(D) 2.(C) 3.(E) 4.(D) 5.(C)
6.(B) 7.(C) 8.(A)(D)(E) 9.(A)(C)(D)(E) 10.(A)(C)(D)
11.(B)(C)(E) 12.(A)(B)(D)
13.① 1 ② 0 ③ 0 ④ 0　14.① 9 ② 3
15.① 1 ② 7 ③ 8　16.① 2 ② 8 ③ 3
17.① 1 ② 6 ③ 1 ④ 5　18.(D)
19. 265 公里；不會進入十級風暴風圈內；不會進入七級風暴風圈內
20.(B)(C)(D)

## 第壹部分：選擇題

1. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow 3x+2y=6 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+3$

所以直線 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 的斜率為 $-\frac{3}{2}$

因此直線 $L$ 的斜率為 $\frac{2}{3} \Rightarrow \tan\theta=\frac{2}{3}$

由於 $-90^\circ<\theta\le 90^\circ$，因此 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

2. 令 $A=\cos^2 0^\circ+\cos^2 3^\circ+\cos^2 6^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ$

因此 $A=\sin^2 90^\circ+\sin^2 87^\circ+\sin^2 84^\circ+\cdots+\sin^2 0^\circ$

因為 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $A+A=31 \Rightarrow A=\frac{31}{2}$

3. $\sin A=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin B=\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin C=\sin 105^\circ=\sin 75^\circ>\sin 60^\circ$，$\sin D=\sin 90^\circ=1$

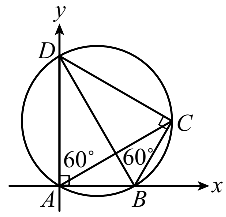
$\sin E=\sin 150^\circ=\frac{1}{2}$，故 $\sin E$ 的值最小

4. 令 $C$ 為原點，$\overline{CA}=5$，$\overline{CB}=3$，$\angle ACB=120^\circ$

由餘弦定理：$\overline{AB}^2=5^2+3^2-2\times 5\times 3\cos 120^\circ=49$

$\Rightarrow \overline{AB}=7$

5. 因為 $\angle CAD=\angle CBD=60^\circ$




所以 $ABCD$ 四點共圓

已知 $\angle BAD=90^\circ$

因此 $\overline{BD}=\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}=12$

$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta BCD$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形且 $\overline{BD}=12$

$\Rightarrow \overline{CD}=6\sqrt{3}$

6. 假設 50 大樓的高度為 $2h$，85 大樓的高度為 $3h$

在地面上看到兩棟建築物等高表示視角相同

假設視角為 $\theta$，觀測點為 $P(x,y)$

50 大樓底部為點 $A(0,0)$，85 大樓底部為點 $B(4,0)$

則 $\overline{PA}:\overline{PB}=\frac{2h}{\tan\theta}:\frac{3h}{\tan\theta}=2:3$

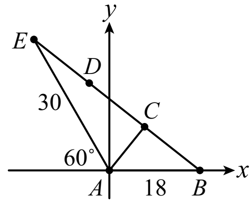
$\Rightarrow 9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2 \Rightarrow 9x^2+9y^2=4(x-4)^2+4y^2$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2+32x-64=0 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{32}{5}x-\frac{64}{5}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{16}{5})^2+y^2=\frac{576}{25}=(\frac{24}{5})^2$

此圓的半徑為 $\frac{24}{5}$ 公里，即直徑為 $\frac{48}{5}$ 公里

7. $\cos\angle BAE=\frac{18^2+30^2-42^2}{2\times 18\times 30}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAE=120^\circ$




定坐標如下：$A(0,0)$，$B(18,0)$

直線 $AE$ 的斜角為 $-60^\circ$，$\overline{AE}=30$

因此 $E$ 點為 $(-15,15\sqrt{3})$

$\overline{BC}:\overline{CE}=1:2$

由分點公式

$C(\frac{2\times 18+1\times(-15)}{3},\frac{2\times 0+1\times 15\sqrt{3}}{3})=(7,5\sqrt{3})$

$\angle BAC$ 為直線 $AC$ 的斜角

因此 $\tan\angle BAC$ 恰為直線 $AC$ 的斜率 $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

8. (A)因為 $\overline{AD}=1$，所以 $\overline{AB}=\cos\theta$，$\overline{BD}=\sin\theta$

(B) $\Delta ABD$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$

(C) $\Delta ACD$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$

(D)因為 $\tan\theta=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\overline{CE}$，所以 $\Delta ACE$ 的面積為

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CE}=\frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta=\frac{1}{2}\tan\theta$