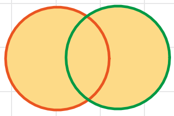
目次

6

排列組合與機率

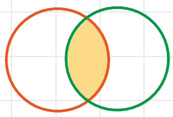
☆ 集合間的關係

$A \cup B$



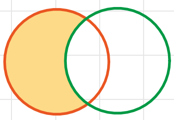
聯集：A與B所有的元素所成的集合

$A \cap B$



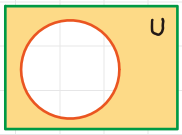
交集：A與B共同的元素所成的集合

$A - B$



差集：在A但不在B的元素所成的集合

A'



餘集：在宇集合中所有不屬於A的元素所成的集合

☆ 計數原理

1. 一一對應原理：兩個有限集合的元素可建立一個一一對應的關係，則這兩個集合的元素個數相等

2. 加法原理：如果完成某件事有 k 種不同途徑可選擇，且任兩種途徑不會同時發生，若 k 種途徑分別有 m_1、$m_2 \cdots m_k$ 種方法，則完成該件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 種方法

3. 乘法原理：如果完成某件事需經過 k 個步驟，若第 k 個步驟有 m_k 種方法，則完成該件事共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ 種方法

4. 取捨原理：$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+n(A \cap B \cap C)$

☆ 相異物的排列、組合

n個相異物排成一列的方法數為 $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 種

從n個相異物選k個出來排成一列（有先後順序），方法數為 $P^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 種

從n個相異物選k個出來為一組（沒有先後順序），方法數為 $C^n_k = \frac{P^n_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 種

note：排列、組合皆為計數的方法

計數前先分析 $\begin{cases}\text{需要考慮次序} \rightarrow \text{排列} \\ \text{不需要考慮次序} \rightarrow \text{組合}\end{cases}$

☆ 有相同物的排列

有k種不同種類的物件，每種個數分別為 m_1、m_2、…、m_k 個

且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，同種物件視為相同物，則將此n個

物件排成一列的方法共有 $\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ 種

☆ 重複排列

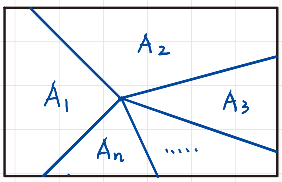
從 n 種不同種類的物件任選 k 個排成一列，每種至少k個，

可重複選取，則排法有 n^k 種

☆ 古典機率

1. 樣本空間 S 內每一事件發生的機會相同，則事件 A 發生的機率 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$
2. 事件 A 在樣本空間內，$0\le P(A)\le 1$
3. $P(\phi)=0$，$P(S)=1$，$P(A')=1-P(A)$

☆ 期望值



某隨機試驗的樣本空間 S

A_1、A_2、$A_3\cdots A_n$ 為樣本空間 S 的一組分割

即 $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 且 $A_1\sim A_n$ 兩兩交集為空集合。若事件 A_i

發生的機率為 P_i，且發生時可得到對應值 m_i，則此隨機

試驗的期望值為 $E=P_1m_1+P_2m_2+P_3m_3+\cdots+P_nm_n$

第壹部分：選擇題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分，每題 5 分）

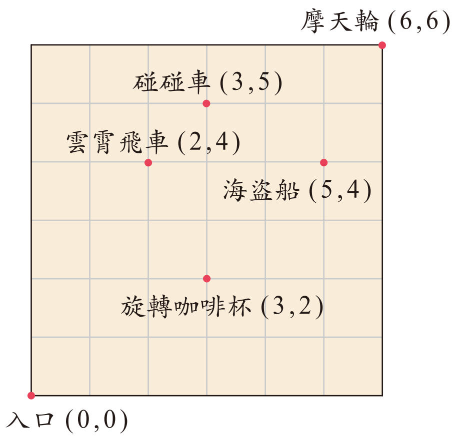
1.– 2.題為題組

右圖為樂多多遊樂園的地圖，今天千千到遊樂園玩耍，遊樂園裡分為水陸兩大主題，水樂園中有「急流泛舟」、「大海嘯」、「漂漂船」以及「人造海灘」四種遊樂設施；陸樂園有「摩天輪」、「雲霄飛車」、「碰碰車」、「海盜船」跟「旋轉咖啡杯」五種設施。樂園入園規定，每一個主題樂園只能進場一次，離場後若要再進場則需要重新購票。

______ 1. 今天千千買了一張票，樂園裡的每一種遊樂設施想都玩過一次，且因為考慮水樂園的遊樂過程中可能弄溼衣服，所以選擇先進入陸樂園玩耍。而且水樂園中的「人造海灘」要在最後才玩，陸樂園設施中的「海盜船」跟「雲霄飛車」太過刺激，不適合連續玩，請問千千玩遊樂設施的排列順序有幾種方式？

(A) 288　(B) 432　(C) 576
(D) 720　(E) 1728

______ 2. 進入陸樂園後，因為每一樣遊樂設施都超級誘人，千千不知道該如何決定遊戲的順序，於是哥哥幫千千畫了一張地圖，如右圖，他將陸樂園分隔成 36 塊，依據每個設施所在的位置給予一個坐標，千千可以擲兩個骰子一次，將兩個得到的點數記錄為坐標，例如兩個骰子擲得 3 點、5 點，就前往落在位置 $(3,5)$ 的「碰碰車」玩耍；如果兩個得 3 點、4 點，因為 $(3,4)$ 或 $(4,3)$ 都沒有遊樂設施，則重新丟骰子。試問丟兩個骰子一次，就可以玩遊樂設施的機率為何？



(A) $\frac{1}{36}$　(B) $\frac{5}{36}$　(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{7}{36}$　(E) $\frac{5}{9}$

二、多選題（占 30 分，每題 5 分）

______ 7. 設 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6=a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}+d\sqrt{15}$，其中 a、b、c、d 均為有理數。試選出正確的選項。

(A) $a=C_0^6\times 5^3+C_2^6\times 3\times 5^2+C_4^6\times 3^2\times 5+C_6^6\times 3^3$

(B) $b=C_1^6+C_3^6+C_5^6$

(C) $c=0$

(D) $d=C_1^6\times 5+C_3^6\times 3+C_5^6\times 15$

(E) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^6=a-b\sqrt{3}-c\sqrt{5}-d\sqrt{15}$

______ 8. 關於下列敘述，試選出方法數與 $C_3^{10}C_4^7$ 的值相同的選項。

(A)荳荳從直角坐標系的 $A(-7,-3)$ 走捷徑（僅可以向右與向上的方式移動）且經過原點 $O(0,0)$ 到 $B(3,4)$ 的方法數

(B)有列彩繪火車，主題為原住民文化。假設今天有 10 節車廂，其中 3 節分別繪製阿美族的食、衣、住三大主題；另有 3 節車廂也分別繪製排灣族的食、衣、住三大主題，其餘車廂均彩繪成藍白條紋的車廂，滿足這彩繪方式的車廂排列方法數

(C)睿睿家的陽臺有一排直線型的花架，他想要在上面放 3 盆一樣的紅玫瑰、3 盆一樣的紫玫瑰與 4 盆一樣的黃玫瑰，滿足這樣方式的花盆排列方法數

(D)有 10 個小朋友，要任選 3 個參加書法比賽，任選 4 個參加朗讀比賽，其餘的參加字音字形比賽，滿足這樣選擇的方法數

(E)將「來是是非人，去是是非者」句中的 10 個字，重新排列的方法數

______ 9. 紙箱中有 3 顆相同的白球跟 5 顆相同的紅球，假設每顆球被取到的機會均相等，試選出正確的選項。

(A)小華從紙箱中取出一球，這顆球為白球的機率為 $\frac{3}{8}$

(B)小鐘從紙箱中一次取出兩球，兩顆球均為白球的機率為 $\frac{3}{8}$

(C)一次取一球，取後放回，2 球異色的機率為 $\frac{15}{28}$

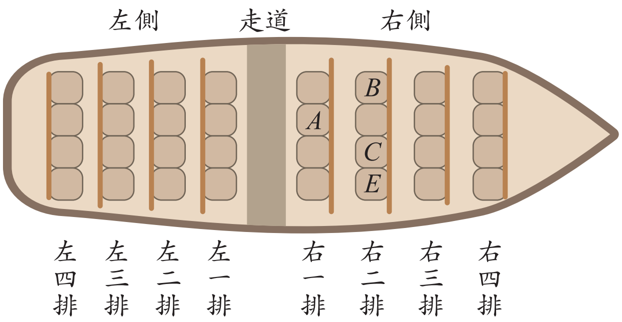
(D)一次取兩球，白球的期望值為 $\frac{3}{4}$ 顆

(E)一次取一球，直到所有球都被取完，則最後一球取到白球的機率為 $\frac{5}{8}$

三、選填題（占 25 分，每題 5 分）

13. 千千和哥哥一起去搭乘「海盜船」，如右圖，海盜船分左右兩側，每一側都有四排，每一排都有四個位置，每個位子皆面對走道。千千不想和哥哥比鄰而坐（亦即不可以左右相鄰或前後相鄰），但要跟哥哥選同一側且要坐在哥哥的後方（例如哥哥選右一排的 A，妹妹可選右二排的 B、C、E 或右三、四排的任一位置），如果今天設施只有哥哥跟千千兩個人進入，則有 ⑬-1 ⑬-2 ⑬-3 種座位的安排方式。

答 ______



14.－16.題為題組

今天旺旺旅行社舉辦了環島鐵路旅行，小米、小睿、小千跟小瑄參加了這個旅行團，一起體驗臺灣的美。

14. 這趟鐵路旅行從高雄出發，依序經過 9 個城市（臺南、臺中、新竹、桃園、臺北、基隆、花蓮、臺東、屏東）再回到高雄溫暖的家，並在這 9 個城市中任選 5 個城市居住，這些城市距離關係如右圖。因為考慮路程的關係，每天移動的距離要超過 40 公里但不可以超過 200 公里，請問安排住宿點的方式有 ⑭-1 種。

答 ______

15. 鐵路旅行的彩繪火車，有一節是供應餐點的車廂，因應季節的關係，供應 5 種果汁（芭樂牛奶、西瓜牛奶、鳳梨汁、檸檬梅汁還有柳橙汁），小千等 4 個人要前往點飲料，若 4 人一起填一張點購單，則有 ⑮-1⑮-2 種填單選購飲品的方式。 答 ______

16. 抵達臺東飯店，因為面海的房間只剩下一間 2 人房，但小米、小睿、小千跟小瑄都想住面海的房間，領隊想出一個好辦法，要四個人一起猜拳決定（避免 2 人 2 人猜拳），猜拳的方式即每人從剪刀、石頭、布三種拳出其中一種，關於勝負為石頭贏剪刀、布贏石頭、剪刀贏布，其餘情況為平手。獲勝的兩個人可以入住面海房間，請問猜拳一次就可以確認哪兩個人入住面海房間的機率為 $\dfrac{(16\text{-}1)}{(16\text{-}2)}$ 。（化成最簡分數） 答 ______

17. 箱子中有 1、2、3、4、5、6 號球各一顆，假設每顆球被取到的機會均相等，小華從箱子取球，一次取一顆球，取後不放回直到取到 1 號球即停止取球，試算小華取球次數的期望值為 $\dfrac{(17\text{-}1)}{(17\text{-}2)}$ 次。（化成最簡分數） 答 ______

第貳部分：混合題（占 15 分）

18.－20.題為題組

19 世紀末奧地利的孟德爾神父，利用數學分析法歸納出遺傳法則，他認為控制生物性狀的遺傳基因有顯性與隱性的分別，可分別用大寫與小寫英文字母來表示，且當隱性與顯性基因同時存在時，只有顯性基因控制的性狀會表現出來。孟德爾遺傳法則中的獨立分配律，即說明各種遺傳性狀遺傳給子代的時候，並不會互相影響。

用豌豆的例子來說明獨立分配律。豌豆的種皮顏色有黃色（Y，顯性）跟綠色（y，隱性）兩種基因，當均為黃色的豌豆交配，可能是 YY × YY、Yy × Yy 或 YY × Yy，其產生後代可能狀況可由下表得知：

	Y	Y
Y	YY	YY
Y	YY	YY

二代均為黃色豌豆

	Y	y
Y	YY	Yy
Y	YY	Yy

二代均為黃色豌豆

	Y	y
Y	YY	Yy
y	Yy	yy

二代 $\frac{3}{4}$ 為黃色豌豆，$\frac{1}{4}$ 為綠色豌豆

已知豌豆種子的外形有圓形（R，顯性）與皺皮（r，隱性）兩種基因。若同時觀察外形與顏色兩種性狀，將圓形綠色（Rryy）與皺皮黃色（rrYy）交配，其展現的基因配對如下，假設每種基因配對發生的機會均等：

	rY	rY	ry	ry
Ry	RrYy 圓黃	RrYy 圓黃	Rryy 圓綠	Rryy 圓綠
ry	rrYy 皺黃	rrYy 皺黃	rryy 皺綠	rryy 皺綠
Ry	RrYy 圓黃	RrYy 圓黃	Rryy 圓綠	Rryy 圓綠
ry	rrYy 皺黃	rrYy 皺黃	rryy 皺綠	rryy 皺綠

18. 根據上述的遺傳法則，若豌豆的圓形（R）與皺皮（r）各為顯、隱性基因，今天將圓形的豌豆與皺皮的豌豆交配，倘若已知道其有皺皮的二代，請問二代中產生皺皮豌豆的機率約為多少？（3 分）______

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{3}{4}$

(D) 1　(E)條件不足，不可推測

19. 若以同一種圓形黃色豌豆（RrYy）進行交配得到的後代，有哪些基因型？（5 分）其性狀比例為何？（2 分）

基因型	
性狀比例	

(B)若 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，則由 $a_5=a_1+4d$ 可求得公差 $d=4-3\sqrt{2}$，因此公差 $d<0$，所以 $a_{96}>a_{253}$

(C)若 $\langle a_n\rangle$ 為遞迴數列滿足遞迴關係 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

則 $a_5=a_4+a_3=(a_3+a_2)+a_3=2a_3+a_2$

$=2(a_2+a_1)+a_2=3a_2+2a_1$

將 $a_1=1$、$a_5=17-12\sqrt{2}$ 代入即可得 $a_2=5-4\sqrt{2}$

(D)若 $\langle a_n\rangle$ 為等比數列

則由 $a_5=a_1r^4$ 可求得 $r^4=17-12\sqrt{2}$

得 $r^2=\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=3-2\sqrt{2}$

得公比 $r=\pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\pm(\sqrt{2}-1)\approx\pm 0.4$

因為 $a_{97}>a_{96}$，表示 $r=-0.4$，此時偶數項皆為負數奇數項皆為正數，因此 $a_{96}<a_{253}$

(E)承(D)的說明，因為 $r=-0.4$，所以 a_{96} 與 a_{352} 皆為負數且 $|a_{96}|>|a_{352}|$，因此 $a_{96}<a_{352}$

13. 因為 $7=a_{31}+a_{32}=(a_1+30d)+(a_1+31d)=2a_1+61d$

$9=a_{41}+a_{42}+a_{43}=(a_1+40d)+(a_1+41d)+(a_1+42d)$

$=3a_1+123d$

可求得 $a_1=\dfrac{104}{21}$，$d=-\dfrac{1}{21}$

因此 $a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}$

$=(a_1+50d)+(a_1+51d)+(a_1+52d)+(a_1+53d)$

$=4a_1+206d=10$

14. 設公比為 r，則 $a_2\times a_4=144 \Rightarrow \dfrac{a_3}{r}\times a_3r=(a_3)^2=144$

所以 $a_3=12$ 或 -12，但若 $a_3=12$，則由 $a_3+a_4=12$ 得 $a_4=0$，與 $a_2\times a_4=144$ 矛盾

故 $a_3=-12$，代入 $a_3+a_4=12$，得 $a_4=24$

故公比 $r=-2$，因此 $a_1=\dfrac{a_3}{r^2}=\dfrac{-12}{(-2)^2}=-3$

15. 原級數的一般項為 $(2n+13)^2=4n^2+52n+169$

其中 $n=1,2,3,\cdots,13$

所以原級數的總和為

$4\times\dfrac{13\times14\times27}{6}+52\times\dfrac{13\times14}{2}+169\times13=10205$

因此總和被 1000 除的餘數為 205

16. 因為 y 對 x 的迴歸直線必通過 $(\mu_x,\mu_y)=(4,\dfrac{9+n}{4})$

所以 $\dfrac{9+n}{4}=4m-2$，整理可得 $16m-n=17$

因為 y 對 x 的迴歸直線的斜率

$$m=\frac{(2+9+20+7n)-4\times4\times\dfrac{9+n}{4}}{(1^2+3^2+5^2+7^2)-4\times4^2}=\frac{3n-5}{20}$$

整理可得 $20m-3n=-5$

解聯立 $\begin{cases}16m-n=17\\20m-3n=-5\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m=2\\n=15\end{cases}$

17. 設可魚的第三次段考成績為 x 分

根據題目所述：$56\times20\%+46\times20\%+x\times30\%$

$+\left[(\dfrac{94+86+72}{3})\times30\%-3\times2\right]\geq 60$

可求得 $x\geq 68$，因此，可魚第三次段考至少需考 68 分才不會陷入被當的危機

第貳部分：混合題

18. 根據「50-20-30 法則」的分配比例，月薪 40000 元所分配的「必要生活開銷」資金為 $40000\times50\%=20000$ 元，「投資」資金為 $40000\times20\%=8000$ 元，「自行運用」資金為 $40000\times30\%=12000$ 元

(A)「投資」資金為 $40000\times20\%=8000$ 元

(B)「必要生活開銷」資金為 $40000\times50\%=20000$ 元

而由小飛的列表可知其生活開銷恰為 20000 元，所以這部分的資金不會透支

(C)「自行運用」資金為 $40000\times30\%=12000$ 元，所以最快要 4 個月（$12000\times4=48000>45400$）才能購買

(D)每個月除了必要生活開銷外，小飛尚有 20000 元，一年即有 $20000\times12=240000$，只需要 4 年多，在他 30 歲前即可存到 100 萬元

(E)投資資金 8000 元，投資在金融股一次的利息為 $8000\times5\%=400$ 元，投資在銀行定存一次的利息為 $8000\times1\%=80$ 元，兩者相差 320 元

19. $40000\times20\%\times12=96000=9.6$ 萬元

$9.6\times(1+0.05)^{10}\approx9.6\times1.6=15.36$ 萬元 $=153600$ 元

20. 小飛 12 個月的投資資金為 $8000\times12=96000=9.6$ 萬元

假設他如此投資了 n 年（也表示投入了 n 批資金）

第 1 批投入的 9.6 萬元，經過了 n 次計息的本利和為 $9.6\times(1+5\%)^n$ 萬元

第 2 批投入的 9.6 萬元，經過了 $n-1$ 次計息的本利和為 $9.6\times(1+5\%)^{n-1}$ 萬元

依此類推

第 $n-1$ 批投入的 9.6 萬元，經過了 2 次計息的本利和為 $9.6\times(1+5\%)^2$ 萬元

第 n 批投入的 9.6 萬元，在該年 8 月計息 1 次時可領回的本利和為 $9.6\times(1+5\%)$ 萬元

因此，n 年後的本利和為

$9.6\times(1+5\%)+9.6\times(1+5\%)^2+\cdots+9.6\times(1+5\%)^n$

利用等比級數可求出此和為

$9.6\times\dfrac{1.05\times[(1.05)^n-1]}{1.05-1}=201.6\times[(1.05)^n-1]$

若 $201.6\times[(1.05^n)-1]>1000$

則 $(1.05)^n>\dfrac{1000}{201.6}+1\approx5.96$

由文章所列的表可知 $(1.05)^{36}\approx5.8$、$(1.05)^{37}>6$

因此 n 的最小值為 37。因為小飛在 23 歲那年的 7 月才開始投入第 1 筆資金（該年 8 月即領到第 1 筆股息），所以小飛達成目標時的年紀為 $22+37=59$ 歲

6 排列組合與機率

請參見題本 P.40

1.(B) 2.(C) 3.(D) 4.(E) 5.(D)

6.(D) 7.(A)(C)(E) 8.(A)(C)(D) 9.(A)(D) 10.(C)(D)(E)

11.(A)(D)(E) 12.(B)(D)(E)

13.① 1 ② 6 ③ 8 14.① 6 15.① 7 ② 0

16.① 2 ② 9 17.① 7 ② 2 18.(B)

20.(A)(B)(E)

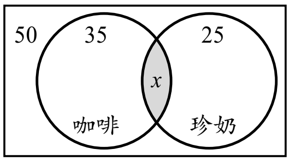
第壹部分：選擇題

1. 先選陸樂園，陸樂園中的遊樂設施遊玩順序有
$5!-4!\times 2!=72$ 種
（全部排序－「海盜船」跟「雲霄飛車」連續玩的方式）
水樂園的遊樂設施遊玩順序有 $3!=6$ 種
（「人造海灘」最後玩，其他三項排列）
所以共有 $72\times 6=432$ 種方式

2. 擲兩個骰子的總數 $=6\times 6=36$
因為依據地圖遊樂設施的坐標為
$(2,4)$、$(3,5)$、$(3,2)$、$(5,4)$、$(6,6)$
所以此事件的個數為 $2!\times 4+1=9 \Rightarrow p=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

3. 若沒有第三類運動，則有：
n(第一類或第二類的項目任選4種)$-n$(第一類的項目任選4種)
$=C^7_4-C^4_4=34$ 種
若有一項第三類運動，則有：
n(第三類的項目選1種)$\times n$(第一類或第二類的項目任選3種)
$=C^2_1C^7_3=70$ 種
故共有 $34+70=104$ 種安排運動項目的可能

4. 畫文氏圖可知，既喝咖啡也喜歡喝珍珠奶茶的人有 x 人



則 $35+25-x\le 50$
$\Rightarrow x\ge 10$ 且 $x\le 25$
所以 $\dfrac{10}{50}\le p\le\dfrac{25}{50} \Rightarrow 0.2\le p\le 0.5$

5. 因為進球數狀況的機率總和為 1
所以 $0.05+0.30+0.25+p+0.20+0.10=1 \Rightarrow p=0.1$
每場的進球數期望值
$0\times 0.05+1\times 0.3+2\times 0.25+3\times 0.1+4\times 0.2+5\times 0.1=2.4$

6. 10紅8黑 ＋10紅7黑 ＋10紅6黑 ＋10紅5黑 ＋10紅4黑 ＋10紅3黑 ＋10紅2黑 ＋10紅1黑 ＋10紅0黑

$$=\frac{18!}{10!8!}+\frac{17!}{10!7!}+\frac{16!}{10!6!}+\frac{15!}{10!5!}+\frac{14!}{10!4!}+\frac{13!}{10!3!}+\frac{12!}{10!2!}+\frac{11!}{10!1!}+\frac{10!}{10!0!}$$

$$=C^{18}_{10}+C^{17}_{10}+C^{16}_{10}+C^{15}_{10}+C^{14}_{10}+C^{13}_{10}+C^{12}_{10}+C^{11}_{10}+C^{10}_{10}$$
$$=C^{10}_0+C^{11}_1+C^{12}_2+C^{13}_3+C^{14}_4+C^{15}_5+C^{16}_6+C^{17}_7+C^{18}_8$$
$$=C^{11}_0+C^{11}_1+C^{12}_2+C^{13}_3+C^{14}_4+C^{15}_5+C^{16}_6+C^{17}_7+C^{18}_8$$
$$=C^{12}_1+C^{12}_2+C^{13}_3+C^{14}_4+C^{15}_5+C^{16}_6+C^{17}_7+C^{18}_8$$
$$=C^{13}_2+C^{13}_3+C^{14}_4+C^{15}_5+C^{16}_6+C^{17}_7+C^{18}_8$$
$=C^{19}_8=C^{19}_{11}$（利用巴斯卡定理）

7. 因為 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6$

$$=C^6_0(\sqrt{3})^0(\sqrt{5})^6+C^6_1(\sqrt{3})^1(\sqrt{5})^5+C^6_2(\sqrt{3})^2(\sqrt{5})^4+C^6_3(\sqrt{3})^3(\sqrt{5})^3+C^6_4(\sqrt{3})^4(\sqrt{5})^2+C^6_5(\sqrt{3})^5(\sqrt{5})^1+C^6_6(\sqrt{3})^6(\sqrt{5})^0$$

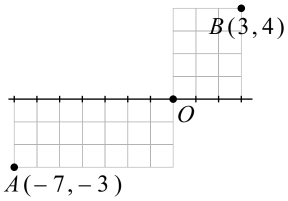
$$=C^6_0\times 5^3+C^6_1(\sqrt{15})\times 5^2+C^6_2\times 3\times 5^2+C^6_3\times 15\times(\sqrt{15})+C^6_4\times 3^2\times 5+C^6_5(\sqrt{15})\times 3^2+C^6_6\times 3^3$$

$\Rightarrow a=C^6_0\times 5^3+C^6_2\times 3\times 5^2+C^6_4\times 3^2\times 5+C^6_6\times 3^3$
$b=0$，$c=0$，$d=C^6_1\times 5^2+C^6_3\times 15+C^6_5\times 3^2$

(E)設展開後第 k 項為 $C^6_k(\sqrt{3})^k(-\sqrt{5})^{6-k}$
若 k 是偶數時，其值之和 $=a$
若 k 是奇數時，其值之和 $=-d\sqrt{15}$
所以 $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^6=a-b\sqrt{3}-c\sqrt{5}-d\sqrt{15}$，其中 $b=c=0$

8. 因為 $C^{10}_3C^7_4=\dfrac{10!}{3!7!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{10!}{3!3!4!}$

(A) $\underbrace{\dfrac{10!}{3!7!}}_{A\to O}\times\underbrace{\dfrac{7!}{3!4!}}_{O\to B}=\dfrac{10!}{3!3!4!}$



(B) $C^{10}_3C^7_3\times 3!\times 3!$

(C) $\dfrac{10!}{3!3!4!}$

(D) $C^{10}_3C^7_4C^3_3=C^{10}_3C^7_4$

(E)句中有 4 個「是」，2 個「非」，所以重新排列數為
$\dfrac{10!}{4!2!}-1$（扣除原本的情況）

9. (A) $\dfrac{C^3_1}{C^8_1}=\dfrac{3}{8}$　(B) $\dfrac{C^3_2}{C^8_2}=\dfrac{3}{28}$

(C)紅白＋白紅 $=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{30}{64}=\dfrac{15}{32}$

(D) 0 白 2 紅 ＋1 白 1 紅 ＋2 白 0 紅
$=0\times\dfrac{C^5_2}{C^8_2}+1\times\dfrac{C^3_1C^5_1}{C^8_2}+2\times\dfrac{C^3_2}{C^8_2}=\dfrac{15}{28}+\dfrac{6}{28}=\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}$

(E)因為最後一球是白球，所以所有球排列後的機率為
$\dfrac{\dfrac{7!}{2!5!}}{\dfrac{8!}{3!5!}}=\dfrac{3}{8}$

10. (A)先選花色有 $C^4_2=6$ 種情形，每個花色有 13 種點數的可能，故共有 $C^4_2\times 13\times 13=6\times 169$ 種可能

(B)抽兩張牌，至少一張紅心的情形有 $C^{13}_2+C^{13}_1C^{39}_1=585$ 種

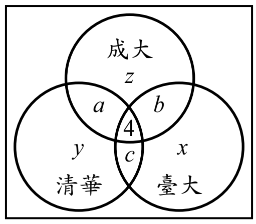
(C)抽兩張牌，點數相同的情形有 $C^{13}_1\times C^4_2=78$ 種

(D)期望值 $\dfrac{C^{13}_2+C^{13}_1C^{39}_1}{C^{52}_2}\times 10+\dfrac{C^{13}_1\times C^4_2}{C^{52}_2}\times 30=\dfrac{105}{17}\approx 6.2$ 元

(E)玩 3 次共付 30 元，但第 3 次時有可能得到 40 元獎金，故有機會贏回所有付出的錢
《誘答》
期望值約 6.2 元，玩 3 次獎金期望值小於 30 元，但是這一選項不能用期望值來判斷

11. 根據訊息顯示，可以畫文氏圖

$$\begin{cases}a+b+c=26\\x=40\\y=64\\26+4+x+y+z=186\end{cases}$$



(A)至少申請兩校的學生有
$a+b+c+4=26+4=30$

(B)僅申請成功大學的 $z=186-26-4-(x+y)=52$

(C)只申請一校的 $x+y+z=40+64+52=156$

(D)申請臺灣大學 $=x+4+b+c=44+b+c$
$44\le 44+b+c\le 44+26=70$

(E)申請成功大學 $=4+a+b+z=4+52+a+b$
$=56+a+b\le 56+26=82$

12. (A)因為每個位置都有 0 ～ 9 的數字可以使用
所以 $10^6=1000000=$ 一百萬

(B) $C^4_3\times 3!\times C^7_3\times 3!=5040>5000$

(C) $\frac{6!}{2!}=360$ 種密碼設置法

(D) $5^3\times5^3=125\times125=15625>10000$

(E)後二碼的組合有 25 種

一次就猜對的機率 $=\frac{1}{25}$

二次猜對的機率 $=\frac{24}{25}\times\frac{1}{24}=\frac{1}{25}$

三次猜對的機率 $=\frac{24}{25}\times\frac{23}{24}\times\frac{1}{23}=\frac{1}{25}$

所以不超過三次就猜對的機率 $=\frac{3}{25}=0.12>0.1$

13. 假設選擇右側海盜船

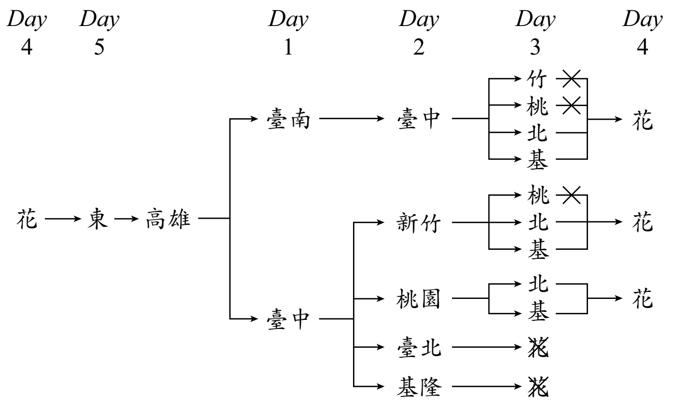
①哥哥坐第一排的任一個位置有 4 種選擇，妹妹有第二排的 3 個選擇或第三、四排的 4 個選擇，共 $(3+4+4)\times4=44$ 種方式

②哥哥坐第二排的任一個位置有 4 種選擇，妹妹有第三排的 3 個選擇或第四排的 4 個選擇，共 $(3+4)\times4=28$ 種方式

③哥哥坐第三排的任一個位置有 4 種選擇，妹妹有第四排的 3 個選擇，共 $3\times4=12$ 種方式

所以共有 $(44+28+12)\times2=168$ 種方式

14. 利用樹狀圖如下，確認花蓮、臺東一定要安排住宿，屏東不能安排住宿



①高雄 → 臺南（住 1，45 km）→ 臺中（住 2，150 km）
→ 臺北（住 3，80 + 45 + 50 = 175 km）
→ 花蓮（住 4，25 + 163 = 188 km）
→ 臺東（住 5，168 km）
→ 高雄溫暖的家（135 + 30 = 165 km）

②高雄 → 臺南（住 1，45 km）→ 臺中（住 2，150 km）
→ 基隆（住 3，80 + 45 + 50 + 25 = 200 km）
→ 花蓮（住 4，163 km）→ 臺東（住 5，168 km）
→ 高雄溫暖的家（135 + 30 = 165 km）

③高雄 → 臺中（住 1，45 + 150 = 195 km）
→ 新竹（住 2，80 km）
→ 臺北（住 3，45 + 50 = 95 km）
→ 花蓮（住 4，25 + 163 = 188 km）
→ 臺東（住 5，168 km）
→ 高雄溫暖的家（135 + 30 = 165 km）

④高雄 → 臺中（住 1，45 + 150 = 195 km）
→ 新竹（住 2，80 km）
→ 基隆（住 3，45 + 50 + 25 = 120 km）
→ 花蓮（住 4，163 km）→ 臺東（住 5，168 km）
→ 高雄溫暖的家（135 + 30 = 165 km）

⑤高雄 → 臺中（住 1，45 + 150 = 195 km）
→ 桃園（住 2，80 + 45 = 125 km）
→ 臺北（住 3，50 km）
→ 花蓮（住 4，25 + 163 = 188 km）
→ 臺東（住 5，168 km）
→ 高雄溫暖的家（135 + 30 = 165 km）

⑥高雄 → 臺中（住 1，45 + 150 = 195 km）
→ 桃園（住 2，80 + 45 = 125 km）
→ 基隆（住 3，50 + 25 = 75 km）
→ 花蓮（住 4，163 km）→ 臺東（住 5，168 km）
→ 高雄溫暖的家（135 + 30 = 165 km）

共 6 種安排住宿的方式

15. 四人填單可能：① 4 個均相同飲品：5 種

② 3 個相同 1 個相異：$C^5_1\times C^4_1=20$ 種

③ 2 個相同 2 個相同：$C^5_2=10$ 種

④ 2 個相同 2 個相異：$C^5_1\times C^4_2=30$ 種

⑤ 4 個均相異：$C^5_4=5$ 種

共 $5+20+10+30+5=70$ 種填單點餐的方式

16. 猜一次拳恰有兩人獲勝的機率為：

(2 人剪刀，2 人石頭) + (2 人石頭，2 人布) + (2 人布，2 人剪刀)

$=\frac{C^4_2C^2_2\times3}{3^4}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

17.

取球次數	1	2	3	4
機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{5\times1}{6\times5}=\frac{1}{6}$	$\frac{5\times4\times1}{6\times5\times4}=\frac{1}{6}$	$\frac{5\times4\times3\times1}{6\times5\times4\times3}=\frac{1}{6}$
取球次數	5		6	
機率	$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2}=\frac{1}{6}$		$\frac{5\times4\times3\times2\times1\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{1}{6}$	

所以期望值 $=(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$ 次

第貳部分：混合題

18. 因為其二代中有皺皮豌豆，所以一代中的圓形豌豆的基因為 Rr，根據孟德爾的遺傳法則，其產生後代可能狀況如右表

	R	r
r	Rr	rr
r	Rr	rr

所以產生皺皮豌豆的機率為 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

19.

	RY	Ry	rY	ry
RY	RRYY圓黃	RRYy圓黃	RrYY 圓黃	RrYy 圓黃
Ry	RRYy圓黃	RRyy 圓綠	RrYy 圓黃	Rryy 圓綠
rY	RrYY 圓黃	RrYy 圓黃	rrYY 皺黃	rrYy 皺黃
ry	RrYy 圓黃	Rryy 圓綠	rrYy 皺黃	rryy 皺綠

基因型為 RRYY、RRYy、RRyy、RrYY、RrYy、Rryy、rrYY、rrYy、rryy

所以得到圓形黃色：圓形綠色：皺皮黃色：皺皮綠色 $=9:3:3:1$

20. (A)(B)六指者的基因型為 AA 或 Aa，五指者為 aa，故小明母親與小明的基因型均為 aa。又小明的 aa，其一 a 來自父親，另一 a 來自母親，所以可知父親的基因型為 Aa

(C)因母親的基因型為 aa，僅可知外祖父母兩人均有隱性基因，可能的組合為 Aa × Aa 或 aa × aa 或 Aa × aa