第一冊　高雄女中　張軒懷老師

✦ 測驗目標　+ 跨單元概念

第二冊　臺中一中　梁勇能老師

Contents

1

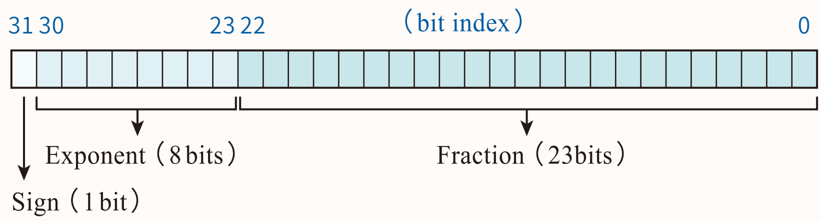
第一冊

第一回

1－3 題為題組

基本題

在計算機科學中，浮點數是一種對於實數的近似數值，當今電腦所使用的浮點數，被電機電子工程師學會（IEEE）規格化為 IEEE 二進位浮點數算術標準（IEEE754），其中單精度（32 位元）浮點數格式規定如下：



IEEE754 單精度浮點數格式

32 個位元（32 bits）皆由數字 0 或 1 組成：

一、Sign（1 bit）表示此數字的正負號，其值記為符號 s。

二、Exponent（8 bits）表示指數部分，其值記為符號 c。

三、Fraction（23 bits）表示尾數部分，其值記為符號 f。

單精度 32 位元浮點數值為 $(-1)^s \times 2^{c-127} \times (1+f)$。

舉例

某浮點數格式如下：

Sign	Exponent								Fraction																						
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

則 $s = 0$

$c = 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 124$

$f = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + \cdots + 0 \times 2^{-22} + 0 \times 2^{-23} = 2^{-2}$

故此浮點數值為 $(-1)^0 \times 2^{124-127} \times (1+2^{-2}) = 1 \times 2^{-3} \times (1+2^{-2}) = 0.15625$

試回答下列問題。

1 已知某浮點數格式為 01000000101000000000000000000000，試問此浮點數值為下列哪一個選項？（單選題）______

Ⓐ 0.25　Ⓑ 0.5　Ⓒ 1　Ⓓ 4　Ⓔ 5

2 試問下列哪一個選項的浮點數值最大？（單選題）______

Ⓐ 01000000100111111111111111111111

Ⓑ 01000000101000000000000000000000

Ⓒ 01000000101000000000000000000001

Ⓓ 10111111110101010101010101010101

Ⓔ 11111111011111111111111111111111

3 若最大正浮點數格式為 01111111011111111111111111111111，則此浮點數的整數部分為幾位數？（已知 $\log 2 \approx 0.3010$）（非選擇題）

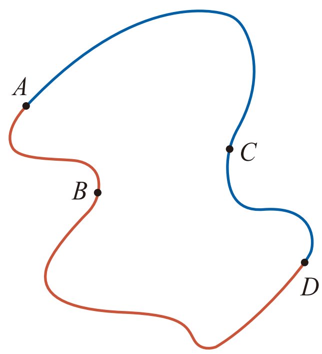
4－6 題為題組　　基本題

在運輸模型中，常用函數 $f(x)=a+bx$ 來設計某一路段在車流量為 x（單位：千輛）時行駛所需的旅程時間（單位：分鐘），其中實數 a（$a\geq 0$）表示該路段地形的行駛難度，a 值愈大，行駛上愈困難耗時；實數 b（$b\geq 0$）表示該路段車流量 x 對行駛難度的影響，b 值愈大，當車流量 x 增加時對旅程時間的影響愈劇烈。此外，當兩個目的地之間有兩條以上的行駛路線，並且每一條路線行駛所需的旅程時間皆相同時，表示此兩地之間的運輸系統已達到「流量平衡」的狀態。試回答下列問題。

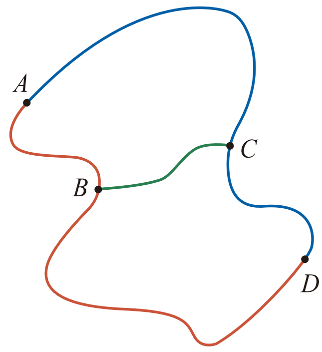
4 假設某路段的運輸模型，在車流量為 1.2 千輛時行駛所需的旅程時間為 8 分鐘，3.6 千輛時為 20 分鐘。試問在此運輸模型中，當車流量為 3 千輛時，行駛所需的旅程時間應為下列哪一個選項？（單選題）＿＿＿＿

(A) 12　(B) 16　(C) 17　(D) 18　(E) 20

5 如右圖，假設 A、D 兩地之間有兩條路線，經調查、資料蒐集與數據統計後發現，每天共有 6 千輛車要從 A 地開往 D 地，且各路段的旅程時間函數為 $\begin{cases} f_{AB}(x)=3+10x \\ f_{BD}(x)=50+x \\ f_{AC}(x)=50+x \\ f_{CD}(x)=3+10x \end{cases}$（單位：分鐘）。試求當此運輸系統達到「流量平衡」的狀態時，行駛在任一條路線所需的旅程時間。（填充題）＿＿＿＿



❻ 承上題，假設在 B、C 兩地之間新開鑿第三條路線，如右圖，且此路段的旅程時間函數為 $f_{BC}(x)=2+2x$（單位：分鐘）。試問當新運輸系統達到「流量平衡」的狀態時，是否有比原運輸系統在流量平衡狀態下更節省行駛所需的旅程時間？請說明理由。（非選擇題）

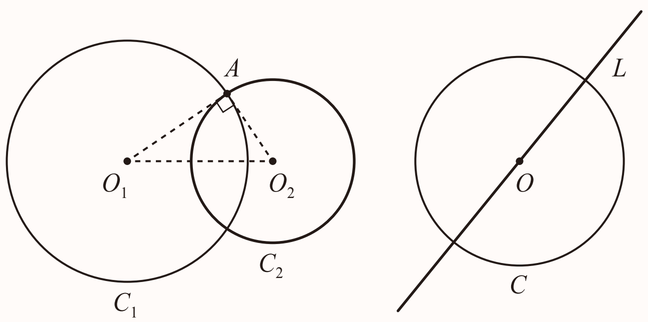


7－9 題為題組

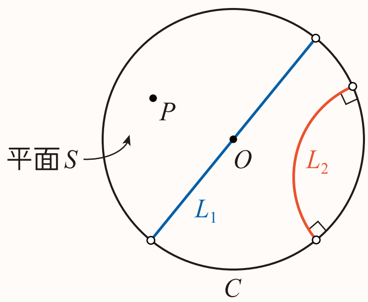
進階題

「正交」是「垂直」這一直觀概念的推廣。在坐標（歐氏）平面上，假設兩圓 C_1、C_2 的圓心分別為 O_1、O_2，且兩圓相交於 A 點，若 $\overline{AO_1}\perp\overline{AO_2}$，則稱兩個圓正交。另外，若一直線 L 通過圓 C 的圓心 O，也稱直線與圓正交，如圖㈠。

然而，法國數學家龐加萊提出了一個非歐幾何，其定義如下：在歐氏平面上，假設一圓 C 的圓心為 O，半徑 $r>0$。圓 C 內部區域為平面 S（不含圓 C 及圓 C 外部），如圖㈡。平面 S 上的「點」即圓 C 內部區域的點，如點 P。平面 S 上的「直線」是與圓 C 正交的圓或直線，在圓 C 內部的部分，如 L_1 與 L_2。如此，平面 S（圓 C 內部區域）為一個非歐平面，一般稱為雙曲平面或龐加萊圓盤。試回答下列問題。



圖㈠



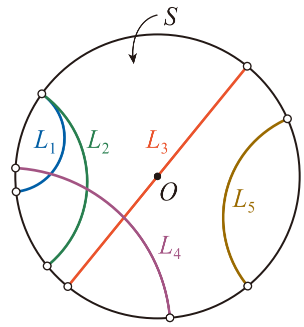
圖㈡

7 坐標平面上，已知圓 C_1 的半徑為 2，圓 C_2 的半徑為 1，且 C_1 的圓心為 $(0,0)$，C_2 的圓心為 $(a,0)$。若兩個圓正交，試問 a 值可能為下列哪一個選項？（單選題）______

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$　(E) 3

8 在龐加萊圓盤中，若兩直線沒有交點，則稱兩直線「平行」，反之亦然。如右圖，假設一龐加萊圓盤 S 中有 L_1、L_2、L_3、L_4 與 L_5 五條直線，試問共有幾條直線與直線 L_1 平行？（單選題）______

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 4



9 坐標平面上，設圓 C 的圓心 $O(0,0)$，半徑為 2，且點 $A(\frac{1}{2},1)$，點 $B(1,0)$。今於圓 C 內部區域建立一龐加萊圓盤，並於龐加萊圓盤中過 A、B 兩點作直線 L，則此直線 L 在坐標平面上滿足的圖形方程式為何？（非選擇題）

詳細解說請參見詳解本 P.1

1 第一冊

第一回

1. Ⓔ　2. Ⓒ　3. 39 位數　4. Ⓒ　5. 86 分鐘　6. 沒有
7. Ⓓ　8. Ⓓ　9. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{11}{8})^2=\frac{265}{64}$

1. $\begin{cases} s=0 \\ c=1\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=129 \\ f=0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+0\times2^{-3}+0\times2^{-4}+\cdots+0\times2^{-22}+0\times2^{-23}=2^{-2} \end{cases}$

此浮點數值為

$(-1)^0\times2^{129-127}\times(1+2^{-2})=1\times2^2\times(1+2^{-2})=5$

故選 Ⓔ

2. 由 Sign（1 bit）可知選項 ⒶⒷⒸ 的浮點數值為正，選項 ⒹⒺ 的浮點數值為負。又 ⒶⒷⒸ 的 Exponent（8 bits）部分相同，而 Fraction（23 bits）部分分別如下：

Ⓐ $f=2^{-3}+2^{-4}+\cdots+2^{-23}=\frac{2^{-23}(2^{21}-1)}{2-1}=2^{-2}-2^{-23}$

Ⓑ $f=2^{-2}$

Ⓒ $f=2^{-2}+2^{-23}$

由於 $2^{-2}+2^{-23}>2^{-2}>2^{-2}-2^{-23}$。故選 Ⓒ

3. $\begin{cases} s=0 \\ c=2^7+2^6+\cdots+2=\frac{2(2^7-1)}{2-1}=254 \\ f=2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-23}=\frac{2^{-23}(2^{23}-1)}{2-1}=1-2^{-23} \end{cases}$

則此浮點數值為 $(-1)^0\times2^{254-127}\times[1+(1-2^{-23})]$

$=(-1)^0\times2^{127}\times(2-2^{-23})=2^{128}-2^{104}$

$\log2\approx0.3010 \Rightarrow 2\approx10^{0.3010}$

則 $2^{128}-2^{104}\approx10^{0.3010\times128}-10^{0.3010\times104}$

$=10^{38.528}-10^{31.304}=10^{38.528}\times(1-10^{-7.224})$

$\approx10^{38.528}=10^{0.528}\times10^{38}$

故此浮點數為 38 + 1 = 39 位數

評　分　原　則	給　分
根據題意正確列出最大正浮點數值的數學式	1/2 題分
利用常用對數 $\log2\approx0.3010$ 正確估計其位數	滿分

4. 設此路段的旅程時間函數為 $f(x)=a+bx$

則 $\begin{cases} f(1.2)=a+1.2b=8 \\ f(3.6)=a+3.6b=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$

可得 $f(x)=2+5x$，所求 $f(3)=2+5\times3=17$。故選 Ⓒ

《另解》

因為旅程時間函數為一次（線型）函數

且 $|3-1.2|:|3.6-3|=1.8:0.6=3:1$

故所求 $=\frac{1\times8+3\times20}{3+1}=\frac{68}{4}=17$

5. 假設每天 6 千輛車中有 x_1 千輛車行駛 $A\to B\to D$ 路線，有 x_2 千輛車行駛 $A\to C\to D$ 路線，則當此運輸系統達到流量平衡狀態時，可得

$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ f_{AB}(x_1)+f_{BD}(x_1)=f_{AC}(x_2)+f_{CD}(x_2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=6 \\ 3+10x_1+50+x_1=50+x_2+3+10x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1=x_2=3$ 千輛

故行駛在任一條路線所需的旅程時間為

$f_{AB}(3)+f_{BD}(3)=3+10\times3+50+3=86$ 分鐘

《另解》

因 $\begin{cases} f_{AB}(x)=f_{CD}(x) \\ f_{BD}(x)=f_{AC}(x) \end{cases}$

$\Rightarrow f_{AB}(x)+f_{BD}(x)=f_{CD}(x)+f_{AC}(x)$，$\forall x$

可知此運輸系統達到流量平衡狀態時，$x_1=x_2=3$ 千輛

故行駛在任一條路線所需的旅程時間為

$f_{AB}(3)+f_{BD}(3)=3+10\times3+50+3=86$ 分鐘

6. 假設新運輸系統，每天 6 千輛車中，有 x_1 千輛車行駛 $A\to B\to D$ 路線，有 x_2 千輛車行駛 $A\to C\to D$ 路線，有 x_3 千輛車行駛 $A\to B\to C\to D$ 路線（新開鑿的第三條路線），則可推得有 x_1+x_3 千輛車行駛 $A\to B$ 路段，有 x_2+x_3 千輛車行駛 $C\to D$ 路段，當新運輸系統達到流量平衡狀態時，可得

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ f_{AB}(x_1+x_3)+f_{BD}(x_1)=f_{AB}(x_1+x_3)+f_{BC}(x_3)+f_{CD}(x_2+x_3) \\ f_{AB}(x_1+x_3)+f_{BD}(x_1)=f_{AC}(x_2)+f_{CD}(x_2+x_3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 3+10(x_1+x_3)+50+x_1=3+10(x_1+x_3)+2+2x_3+3+10(x_2+x_3) \\ 3+10(x_1+x_3)+50+x_1=50+x_2+3+10(x_2+x_3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ -x_1+10x_2+12x_3=45 \\ x_1=x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=1.8 \\ x_3=2.4 \end{cases}$

此時行駛任一條路線所需的旅程時間為

$f_{AB}(1.8+2.4)+f_{BD}(1.8)=3+10\times(1.8+2.4)+50+1.8$

$=96.8$ 分鐘

承上題可知，原運輸系統行駛任一條路線所需的旅程時間為86分鐘，故新運輸系統在流量平衡狀態下比原運輸系統所需的旅程時間增加了 10.8 分鐘，並沒有更節省行駛時間

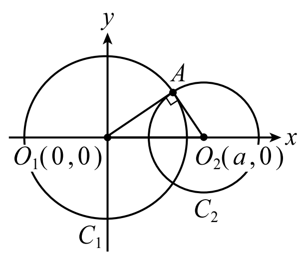
評　分　原　則	給　分
根據題意正確列出三元一次聯立方程式	1/3 題分
正確解出流量平衡狀態下的解	2/3 題分
正確以本題及上題的個別旅程時間，說明新運輸系統反而增加了 10.8 分鐘	滿分

7. 如右圖，因為 $\angle O_1AO_2=90^\circ$

則 $\overline{O_1O_2}^2=\overline{AO_1}^2+\overline{AO_2}^2$

$\Rightarrow |a|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

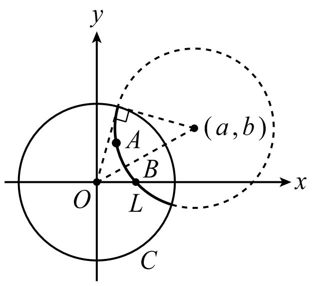
故選 Ⓓ



8. 僅 L_4 與 L_1 於龐加萊圓盤中交於一點，其餘 3 條直線與 L_1 皆無交點。故選 Ⓓ

註 因 L_2 與 L_1 的交點在圓上，故 L_2 與 L_1 於龐加萊圓盤中並無交點

9. 龐加萊圓盤中的直線 L 在坐標平面上的圖形為與圓 C 正交的圓，如右圖



設此圓方程式的圓心 (a,b)，半徑為 r

則 $\begin{cases}(a-\frac{1}{2})^2+(b-1)^2=r^2\\(a-1)^2+(b-0)^2=r^2\\a^2+b^2=r^2+2^2\end{cases}$

$\Rightarrow\quad a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{11}{8}$，$r^2=\frac{265}{64}$

故所求方程式為 $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{11}{8})^2=\frac{265}{64}$

評　分　原　則	給　分
根據題意正確判斷龐加萊圓盤中的直線 L 在坐標平面上的圖形	1/3 題分
正確解出圓方程式	滿分

第二回

1. D　2. 447.5k 萬元　3. 385k 萬元；120 公尺　4. B
5. $0<r\le 4$　6. $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　7. C　8. $x+\sqrt{3}y=2$
9. $(\cos\theta+\theta\sin\theta,\sin\theta-\theta\cos\theta)$

1. 依題意可知整面舊牆的修繕費用為 $140\times\frac{k}{2}=70k$ 萬元

而三面新牆的建造費用為

$(2\times\frac{12600}{140}+140)\times k=320k$ 萬元

共需 $70k+320k=390k$ 萬元，故選 D

2. 依題意可知保留 70 公尺的舊牆修繕費用為

$70\times\frac{k}{2}=35k$ 萬元，而三面新牆的建造費用為

$(2\times\frac{12600}{70}+70)\times k-(140-70)\times\frac{k}{4}=412.5k$ 萬元

則此項工程費用為 $35k+412.5k=447.5k$ 萬元

3. 假設保留舊牆 x 公尺作為一側圍牆，其中 $0<x\le 140$

則此項工程費用為

$\frac{k}{2}x+(x+2\times\frac{12600}{x})k-(140-x)\frac{k}{4}$

$=(\frac{7}{4}x+\frac{25200}{x})k-35k$ 萬元

由算幾不等式可知 $\frac{7}{4}x+\frac{25200}{x}\ge 2\sqrt{\frac{7}{4}x\cdot\frac{25200}{x}}=420$

$\Rightarrow\quad(\frac{7}{4}x+\frac{25200}{x})k-35k\ge 420k-35k=385k$ 萬元

小於保留整面舊牆的工程費用 390k 萬元

其中等號成立於 $\frac{7}{4}x=\frac{25200}{x}\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{14400}=120$ 公尺

滿足 $0<x\le 140$

故此項工程費用的最小值為 385k 萬元，且需保留舊牆 120 公尺

評　分　原　則	給　分
根據題意正確列出工程費用的數學式	1/2 題分
利用算幾不等式正確求出工程費用的最小值以及所需保留舊牆的長度	滿分

4. 依題意可得 $x_1=\frac{3}{2}x_0(1-x_0)=\frac{3}{2}(\frac{4}{5})(1-\frac{4}{5})=\frac{6}{25}$

同理 $x_2=\frac{3}{2}x_1(1-x_1)=\frac{3}{2}(\frac{6}{25})(1-\frac{6}{25})=\frac{171}{625}$

則 $x_3=\frac{3}{2}x_2(1-x_2)=\frac{3}{2}(\frac{171}{625})(1-\frac{171}{625})=\frac{116451}{390625}\approx 0.3$

故選 B

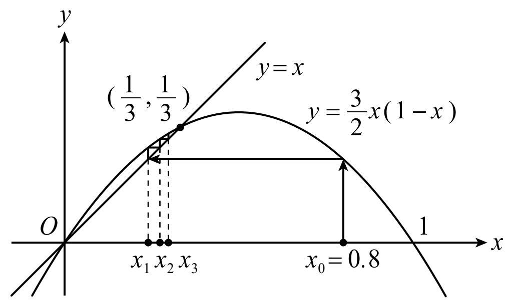
5. 因為 $f(x)=rx(1-x)=-r(x^2-x)=-r(x-\frac{1}{2})^2+\frac{r}{4}$ 且

$\forall n\in N\cup\{0\}$，$x_n\in[0,1]$，可知 $0\le x\le 1$，$0\le f(x)\le 1$

則 $\frac{r}{4}\le 1\quad\Rightarrow\quad r\le 4$，故 $0<r\le 4$

評　分　原　則	給　分
正確解出二次函數的最大值	1/2 題分
根據題意正確解出 r 的範圍	滿分

6. 依題意作圖如下



交點為 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x(1-x)\\y=x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad(a,b)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

由圖形可知 x_n $(n\in N\cup\{0\})$ 持續向 $\frac{1}{3}$ 靠近

且 $y=\frac{3}{2}(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$，故 $x_{100}\approx\frac{1}{3}$

評　分　原　則	給　分
正確繪製一次與二次函數的圖形及求出交點	1/3 題分
能以圖形說明該生物的比值 x_n $(n\in N\cup\{0\})$ 持續向 $\frac{1}{3}$ 靠近	2/3 題分
正確考慮到以 $x=\frac{1}{3}$ 代入 $y=\frac{3}{2}x(1-x)$ 可得 $y=\frac{1}{3}$ 的結果	滿分

7. 依題意可知線段 $\overline{P_1A_1}$ 長，即為 $\overset{\frown}{P_0A_1}$ 長

可得 $\overline{P_1A_1}=1\times\frac{\pi}{3}$（弧度）$\approx 1$（弧長）。故選 C

8. 因圓半徑為 1 且 $\angle A_1OP_0=60^\circ$

可得點 $A_1(1\times\cos 60^\circ,1\times\sin 60^\circ)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

則過圓 $x^2+y^2=1$ 上一點 $A_1(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的切線方程式為

$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$，即 $x+\sqrt{3}y=2$