目次

第一章　數列與級數

1-1　數列與遞迴關係　1
課後練習本第 1 ～ 3 回

1-2　級數與求和公式　16
第 4 ～ 6 回

第二章　數據分析

2-1　一維數據分析　34
第 7 ～ 9 回

2-2　二維數據分析　56
第 10 ～ 12 回

第三章　排列組合與機率

3-1　簡單邏輯、集合與計數原理　82
第 13 ～ 16 回

3-2　排 列　108
第 17 ～ 21 回

3-3　組 合　128
第 22 ～ 25 回

3-4　古典機率　149
第 26 ～ 28 回

第四章　三角比

4-1　直角三角形的三角比　172
第 29 ～ 30 回

4-2　廣義角三角比　186
第 31 ～ 34 回

4-3　三角比的性質　206
第 35 ～ 37 回

1-2 級數與求和公式

重點整理

• 級 數

1. 將數列 $\langle a_n \rangle$ 的各項依序用加號連結起來的式子，形如 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，稱為級數。我們常用 S_n 表示級數的前 n 項和，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。（亦可以用 Σa_k 表示級數）

2. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 是等差數列，則稱 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 為等差級數。且公差為 d 時，其前 n 項和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 可表示成 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

證 高斯推導等差級數和的方法如下：

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

將其連加順序顛倒後，進行加法

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & S_n & = & \boxed{a_1} & + & \boxed{a_2} & + & a_3 & +\cdots+ & \boxed{a_{n-1}} & + & \boxed{a_n} \\
+) & S_n & = & \boxed{a_n} & + & \boxed{a_{n-1}} & + & a_{n-2} & +\cdots+ & \boxed{a_2} & + & \boxed{a_1} \\
\hline
 & 2S_n & = & \multicolumn{9}{l}{\underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_1)}_{\text{共 } n \text{ 項}}}
\end{array}$$

$\because$ $\langle a_n \rangle$ 為等差數列　$\therefore$ 由等差中項特性可知 $(a_1+a_n)=(a_2+a_{n-1})=\cdots=(a_n+a_1)$

故 $2S_n=n(a_1+a_n)$ $\Rightarrow$ $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

又因為 $a_1+a_n=2a_1+(n-1)d$，亦可得 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

舉例 有一等差數列，首項為 3，公差為 2，則其前 10 項總和 $S_{10}=$ ＿＿＿＿。

3. 若數列 $\langle b_n \rangle$ 是等比數列，則稱 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$ 為等比級數。且公比為 r 時，其前 n 項和 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$ 可表示成：

(1) $S_n=nb_1$（當 $r=1$ 時）。

(2) $S_n=\dfrac{b_1(1-r^n)}{1-r}$（當 $r\neq 1$ 時）。

證 首項為 b_1，公比為 r 的 n 項等比級數和為 $S_n=b_1+b_1r+b_1r^2+\cdots+b_1r^{n-1}$

(1) 當 $r=1$ 時，$S_n=b_1+b_1+\cdots+b_1=nb_1$。

(2) 當 $r\neq 1$ 時，將 S_n 乘上 r 後，進行減法

$$\begin{array}{rrcccccc}
 & S_n & = & b_1 & + b_1r+b_1r^2+\cdots+b_1r^{n-1} & \\
-) & rS_n & = & & b_1r+b_1r^2+\cdots+b_1r^{n-1} & +b_1r^n \\
\hline
 & (1-r)S_n & = & b_1 & & -b_1r^n
\end{array}$$

因此 $S_n=\dfrac{b_1(1-r^n)}{1-r}$。

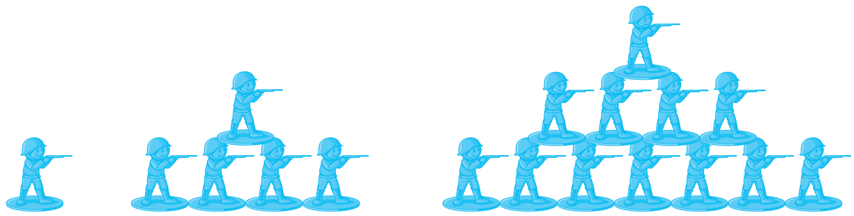
舉例 有一等比數列，首項為 3，公比為 2，則其前 10 項總和 $S_{10}=$ ＿＿＿＿。

範例 等差級數觀察與計算

1. 有一等差數列 $\langle a_n \rangle$，首項 $a_1 = 110$，公差 $d = -7$，則當 $n =$ ______ 時，前 n 項的和最大，其值為 ______ 。

> 等差數列中
> $a_n = a_1 + (n-1)d$
> $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$
> $= \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

2. 阿霆蒐集某超商公仔，將其堆疊擺放在展示櫃中。堆法如下圖，堆一層需 1 隻公仔，堆兩層需 5 隻公仔，堆三層需 12 隻公仔，若規則不變，則堆 9 層共需要 ______ 隻公仔。



類題

1 已知 $\langle a_n \rangle$ 是一個等差數列，首項為 10，前 9 項和為 180，試求：

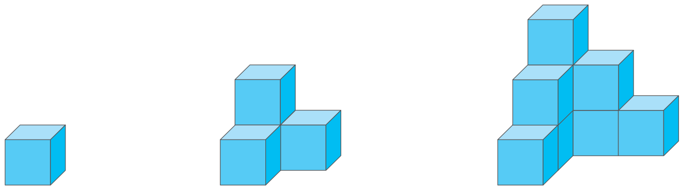
(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差 $d =$ ______ 。

(2) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 18 項和 $S_{18} =$ ______ 。

2 小葦使用體能訓練 APP 安排「剝皮跳」訓練，第一回合為 20 秒，之後每回合都會比前一回合多 4 秒，已知小葦最後一回合進行了 80 秒，則小葦總共進行了 ______ 回合，進行剝皮跳總時數為 ______ 秒。

3 體育館球場搖滾區共有 25 排座位，此區的每一排都比前一排多 2 個座位。今小霆坐在第 13 排，而他發現這一排共有 75 個座位，則此球場的搖滾區共有＿＿＿＿個座位。

4 阿銘童心未泯，動手去推疊積木，堆疊方式如下圖。堆一層需 1 個積木，堆兩層需 4 個積木，堆三層需 9 個積木，若規則不變，則堆 99 層共需要＿＿＿＿個積木。



觀察每個圖形，最底層比上一層多幾個積木？

範例 級數與等差級數應用

3. 有一等差數列的前 4 項和為 20，後 4 項和為 112，且所有項總和為 165，則此數列共有＿＿＿項。

4. 已知 $\langle a_n \rangle$ 是一個等差數列，且 $a_1+a_2+a_3=14$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=55$，則此等差數列的前 9 項和 $S_9=$＿＿＿＿。

等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中

$$\begin{array}{rcccccc}
S_n = & a_1 & + & a_2 & + \cdots + & a_n \\
 & \downarrow{+nd} & & \downarrow{+nd} & & \downarrow{+nd} \\
S_{2n}-S_n = & a_{n+1} & + & a_{n+2} & + \cdots + & a_{2n} \\
 & \downarrow{+nd} & & \downarrow{+nd} & & \downarrow{+nd} \\
S_{3n}-S_{2n} = & a_{2n+1} & + & a_{2n+2} & + \cdots + & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

故 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 亦成等差數列，公差為 n^2d

常用級數求和公式

1. 常數級數：$\underbrace{c+c+\cdots+c}_{n\text{ 個}}=n\times c$，$c$ 為常數。

2. 等差級數：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

3. 平方數級數：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

4. 立方數級數：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

分項對消型級數

1. $\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$。

2. $\dfrac{k}{n\times(n+k)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}$。

3. $\dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{1}{n\times(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right]$。

舉例 有一數列 $\langle a_n\rangle$，且其一般項 $a_n=\dfrac{1}{n\times(n+1)}$，求此數列的前 10 項和

$S_{10}=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{10\times11}=$ ______。

範例 平方和與立方和公式推導

11. 已知 n 是任一正整數，級數和 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 恆成立。請利用數學歸納法進行驗證。

數學歸納法流程

驗證初始項
（$n=1$ 時，原式是否成立）
↓
歸納法假設
（假設 $n=k$ 時，原式成立）
↓
利用歸納法假設，驗證
$n=k+1$ 時原式成立

類題 :::

17 已知 n 是任一正整數，級數和 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 恆成立。請利用數學歸納法進行驗證。

18 已知 n 是任一正整數，級數和 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 恆成立。請利用數學歸納法進行驗證。

範例 常用級數求和公式應用

12. 有一數列 $\langle a_n\rangle$，若其一般項 $a_n=(2n)^3$，則：

(1) 此數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 10 項總和為 ＿＿＿＿＿。

(2) 若另有一數列 $\langle b_n\rangle$，$b_n=a_n+n$，則數列 $\langle b_n\rangle$ 的前 10 項總和為 ＿＿＿＿＿。

13. 觀察下列 2×2、3×3、4×4 方格中的數字規律，依照此規律在 12×12 方格中填入數字，則所填入的 144 個數字總和為 ______。

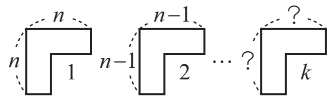
1	1
1	2

1	1	1
1	2	2
1	2	3

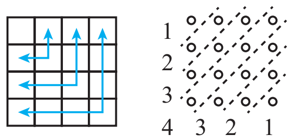
1	1	1	1
1	2	2	2
1	2	3	3
1	2	3	4

建議同學嘗試找出數字排列的規律，自己發現的規則最有價值！以下提供 2 種觀察的方向作為參考：

①$n\times n$ 的方格中，有幾個 1 ？幾個 2 ？幾個 k ？他們的和怎麼描述？



②在方格中，觀察每一個 ↲ 方向的數字和



例如：

$1+2+3+4+3+2+1=4^2$

類題 :::

19 有一級數，為連續正整數的立方和，則 $6^3+7^3+\cdots+10^3=$ ______。

20 有一數列 $\langle a_n\rangle$，若其一般項 $a_n=(2n-1)^2$，則：

(1) 此數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 15 項總和 $1^2+3^2+\cdots+29^2=$ ______。

(2) 若另有一數列 $\langle b_n\rangle$，$b_n=a_n+2n$，則數列 $\langle b_n\rangle$ 的前 15 項總和為 ______。

21 試求下列級數之和。

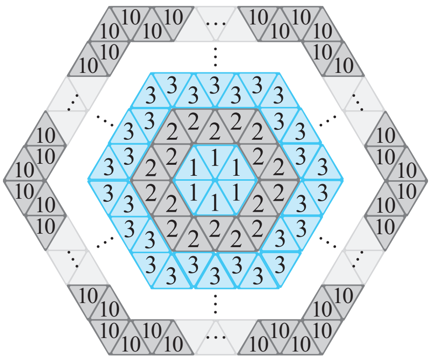
(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100=$ ______ 。

(2) $1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+29\times31=$ ______ 。

22 在三角形拼貼的磁磚上有數字排列，如圖所示，試問：

(1)圖中有 ______ 個三角形。

(2)圖中的數字總和為 ______ 。



範例 分項對消型級數應用

14. 設 n 為正整數，試求下列級數之和。

(1) $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=$ ______ 。

(2) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}=$ ______ 。

$\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\overset{\text{通分}}{=\!=}\dfrac{k+1}{k(k+1)}-\dfrac{k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k(k+1)}$

想一想，$\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+t}=$?

類題 : : :

23 利用分項對消求下列級數之和。

(1) $\dfrac{1}{5\times6}+\dfrac{1}{6\times7}+\dfrac{1}{7\times8}+\cdots+\dfrac{1}{29\times30}=$ ______。

(2) $\dfrac{1}{6\times8}+\dfrac{1}{7\times9}+\dfrac{1}{8\times10}+\cdots+\dfrac{1}{20\times22}=$ ______。

24 有一數列 $\langle a_n\rangle$，若其一般項 $a_n=\dfrac{1}{n\times(n+3)}$，且前 15 項總和為 S_{15}，則 $S_{15}+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{18})$ $=$ ______。

25 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}=$ ______。

定期綜合測驗

: : 多選題

______ 1. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 前 n 項的和為 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2-15n$，試問下列選項哪些正確？

(A) $a_1=10$　(B) $a_9<0$　(C) $\langle a_n\rangle$ 是等差數列

(D) $a_{22}-a_{21}=2$　(E)此數列前 11 項的和最小

______ 2. 已知 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，且首項 $a_1>0$，若前 n 項和 S_n 滿足 $S_{10}=S_{11}$，試問下列選項哪些正確？

(A)數列 $\langle a_n\rangle$ 的公差 $d<0$　(B) $a_8>0$　(C) $S_{11}<S_{12}$

(D) $a_3+a_{17}=0$　(E) $S_{20}>0$

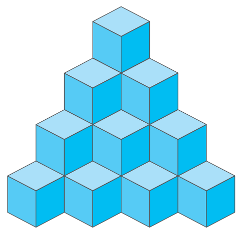
∷ 填充題

3. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，其首 n 項的和為 S_n，若 $S_{10}=16$，$S_{20}=36$，則：
(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差為______ (2) $S_{30}=$______ (3) $S_{40}=$______。

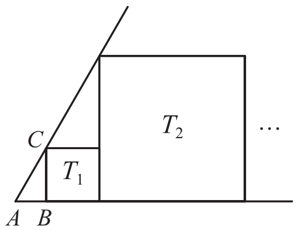
4. 已知 $\langle a_n \rangle$ 是一個等比數列。
(1) 若 $a_5=-96$，公比 $r=-2$，則 $a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=$______。
(2) 若首項 $a_1=3$，公比 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，則 $a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=$______。
(3) 若首項 $a_1=\sqrt{5}$，公比 $r=1$，則 $a_{14}+a_{15}+\cdots+a_{29}+a_{30}=$______。

5. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，若前 5 項的和 $S_5=1$，前 10 項的和 $S_{10}=-31$，則：
(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的公比為______ (2) 此等比數列的前 15 項和 $S_{15}=$______。

6. 小霆將同樣大小的正方體積木，堆疊成如右圖所示。由上往下數，第一層堆 1 個，第二層堆 3 個，第三層堆 6 個，若規則不變，則：
(1) 在第 25 層使用______個積木。
(2) 從第 1 層到第 25 層共使用了______個積木。

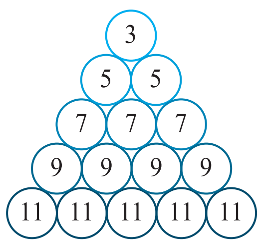


7. 如右圖所示，已知 $\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=2$，依序做出正方形 T_1、T_2、T_3、⋯，試問：
(1) 正方形 T_1、T_2、T_3、T_4 周長的總和為______。
(2) 正方形 T_1、T_2、T_3、T_4 面積的總和為______。



8. 阿凱每月將薪水撥出 5000 元參加公司優惠存款專案，其年利率為 1.8%，存款期為 24 個月，且採每個月複利計息一次的零存整付。若阿凱依此專案每月月初存入 5000 元，並連續儲蓄 24 個月，則期滿後阿凱連本帶利總共有______元。（四捨五入至整數位，$1.0015^{23}\approx 1.035$，$1.0015^{24}\approx 1.037$）

9. 依照右圖的規則把數字作排列，若排到第 10 列，則所有的數字和為多少？______



10. 試求下列各級數總和。
(1) $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2=$______。
(2) $3^2+6^2+9^2+\cdots+30^2=$______。
(3) $5^2+8^2+11^2+\cdots+(3k+2)^2+\cdots+32^2=$______。

11. 設 n 為自然數，試利用數學歸納法證明：
$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}。$$

歷屆試題典藏

1. 設實數組成的數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列。已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$。請選出正確的選項。________

(A) $a_9 \times a_{10} < 0$　(B) $b_{10} > 0$　(C) $b_9 > b_{10}$
(D) $a_9 > a_{10}$　(E) $a_8 > b_8$

21% 全對率 102 年學測

2. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 80$，前五個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$，請選出首項 a_1 的正確範圍。______

(A) $a_1 < 80$　(B) $80 \le a_1 < 90$　(C) $90 \le a_1 < 100$
(D) $100 \le a_1 < 110$　(E) $110 \le a_1$

28% 答對率 105 年學測

3. 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$，其中 $n \ge 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 5$，$a_4 = 12$，則 $a_5 =$ ______ 。

54% 答對率 106 年學測

4. 設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 之公差為正實數 α。試選出正確的選項。________

(A)若 $b_n = -a_n$，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$
(B)若 $c_n = a_n^2$，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots$
(C)若 $d_n = a_n + a_{n+1}$，則 $d_1, d_2, d_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列
(D)若 $e_n = a_n + n$，則 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ 是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列
(E)若 f_n 為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列

28% 全對率 108 年學測

5. 網路賣家以 200 元的成本取得某件模型，並以成本的 5 倍作為售價，差價即為利潤。但過了一段時間無人問津，因此賣家決定以逐次減少一半利潤的方式調降售價。若依此方式進行，則調降三次後該模型的售價為 ________ 元。

78% 答對率 109 年學測

6. 設 a、b、c 為三實數，且 $a > b > c$。已知 $2^a, 2^b, 2^c$ 三數依序成等差數列。試選出正確的選項。__________

(A) a, b, c 三數依序成等比數列　(B) $2^{a+100}, 2^{b+100}, 2^{c+100}$ 三數依序成等差數列
(C) $4^a, 4^b, 4^c$ 三數依序成等差數列　(D) $a < b + 1$
(E) $b \ge \dfrac{a+c}{2}$

109 年指考甲補考

7. 五項實數數列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1 = \log_{10}36$，則 a_5 有多少種可能的值？______

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 7　(E) 8　30% 答對率 110 年學測

8. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後______秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。　70% 答對率 110 年學測

9. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差。______

(A) $\log d$　(B) $\log \frac{2}{3}$　(C) $\log \frac{3}{2}$

(D) $\log 2d$　(E) $\log 3d$　57% 答對率 111 年學測 A

10. 某燈會布置變色閃燈，每次啟動後的閃燈顏色會依照以下的順序做週期性變換：藍－白－紅－白－藍－白－紅－白－藍－白－紅－白⋯，每四次一循環，其中藍光每次持續 5 秒，白光每次持續 2 秒，而紅光每次持續 6 秒。假設換燈號的時間極短可被忽略，試選出啟動後第 99 至 101 秒之間的燈號。______

(A)皆為藍燈　(B)皆為白燈　(C)皆為紅燈

(D)先亮藍燈再亮白燈　(E)先亮白燈再亮紅燈　83% 答對率 111 年學測 B

1-2 級數與求和公式

16 • **級 數**

2. 120　3. 3069

17 範例　1. 16；920　2. 117

1. 此等差數列公差 $d=-7$，故數列依序遞減，若要前 n 項總和最大，則不要累加到負值的項

設此數列從第 k 項起開始為負數

$\Rightarrow\ a_k=110+(k-1)\times(-7)<0$

$\Rightarrow\ 117-7k<0\ \Rightarrow\ k>\frac{117}{7}=16.$多

所以取 $k=17$（即數列從第 17 項起開始為負數）

當 $n=16$ 時，前 n 項的和最大

$$S_{16}=\frac{16\times[2\times110+(16-1)\times(-7)]}{2}=\frac{16\times115}{2}=920$$

2. 觀察每層公仔的個數，為首項 $a_1=1$，公差 $d=3$ 的等差數列

$$S_9=\frac{9\times[2\times1+(9-1)\times3]}{2}=\frac{9\times26}{2}=117$$

∴堆 9 層需要 117 隻公仔

類題　1 (1) $\frac{5}{2}$　(2) $\frac{1125}{2}$　2 16；800　3 1875　4 9801

1 (1)利用等差級數的和公式

得 $S_9=\frac{9\times[2\times10+(9-1)\times d]}{2}=180$，解得 $d=\frac{5}{2}$

(2) $S_{18}=\frac{18\times[2\times10+(18-1)\times\frac{5}{2}]}{2}=\frac{18\times\frac{125}{2}}{2}=\frac{1125}{2}$

2 令 a_n 為每回合的秒數，$\langle a_n\rangle$ 為首項 $a_1=20$，公差 $d=4$ 的等差數列，設此等差數列的項數為 n，末項 $a_n=80$

所以 $80=20+(n-1)\times4\ \Rightarrow\ n=16$ 回合

利用等差級數的和公式

得 $S_{16}=\frac{16\times(a_1+a_{16})}{2}=\frac{16\times(20+80)}{2}=800$ 秒

18 3 設搖滾區的座位依序為 $a_1,a_2,\cdots,a_{25}$，數列 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列

$a_{13}=a_1+12\times2=75\ \Rightarrow\ a_1=51$

$a_{25}=a_1+24d=51+24\times2=99$

故 $S_{25}=\frac{25\times(51+99)}{2}=1875$

《另解》

$\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1+a_{25}=a_2+a_{24}=\cdots=a_{12}+a_{14}$

$=2\times a_{13}=150$，中間項為 $a_{13}=75$

所以搖滾區共有座位 $75\times25=1875$ 個

4 觀察每層積木的個數，為首項 $a_1=1$，公差 $d=2$ 的等差數列

$$S_{99}=\frac{99\times[2\times1+(99-1)\times2]}{2}=\frac{99\times198}{2}=9801$$

∴堆 99 層需要 9801 個積木

範例　3. 10　4. 123

5. (1) 10　(2) 55　(3) $\begin{cases}10，n=1\\20n-5，n\ge2\end{cases}$

3. 設公差為 d，由等差中項的性質可知

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}=\frac{20+112}{4}=33$

$\Rightarrow\ a_1+a_n=2a_1+(n-1)\times d=33$

又 $S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)\times d]}{2}=165$

故 $\frac{33n}{2}=165\ \Rightarrow\ n=10$　∴數列共有 10 項

4. 設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的公差為 d，依題意重新整理可得

$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=14 & \cdots①\\a_4+a_5+a_6=55-14=41 & \cdots②\end{cases}$

②－①可得 $(a_4-a_1)+(a_5-a_2)+(a_6-a_3)$

$=3d+3d+3d=9d=27\ \Rightarrow\ d=3$

同理可得 $a_7+a_8+a_9$ 與 $a_4+a_5+a_6$ 相減亦為 $9d$

可得 $(a_1+a_2+a_3),(a_4+a_5+a_6),(a_7+a_8+a_9)$ 成等差數列，公差為 $9d$

所求 $S_9=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)$

$=14+41+(41+9d)=14+41+68=123$

《另解》

設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 a，公差為 d

$\begin{cases}a+(a+d)+(a+2d)=14\\a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=55\end{cases}$

$\Rightarrow\ \begin{cases}3a+3d=14\\6a+15d=55\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}6a+6d=28 & \cdots①\\6a+15d=55 & \cdots②\end{cases}$

②－①可得 $9d=27\ \Rightarrow\ d=3$，$a=\frac{5}{3}$

$$S_9=\frac{9\times[2\times\frac{5}{3}+(9-1)\times3]}{2}=123$$

19 5. (1) $a_1=S_1=10+5-5=10$

(2) ∵ $S_3=a_1+a_2+a_3$，$S_2=a_1+a_2$

∴ $a_3=S_3-S_2=(90+15-5)-(40+10-5)=55$

(3)當 $n\ge2$ 時

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(10n^2+5n-5)-[10(n-1)^2+5(n-1)-5]$

$=(10n^2+5n-5)-(10n^2-15n)=20n-5$

∴ $a_n=\begin{cases}10，n=1\\20n-5，n\ge2\end{cases}$（此數列非等差數列）

類題　5 －4　6 (1) 0.65　(2) 35

7 (1) 10　(2) 15　(3) $\begin{cases}10，n=1\\6n-3，n\ge2\end{cases}$

5 設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 a，公差為 d

$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=a+(a+d)+(a+2d)=2 & \cdots①\\a_4+a_5+a_6=(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=-7 & \cdots②\end{cases}$

②－①可得 $3d+3d+3d=9d=-9\ \Rightarrow\ d=-1$

$a_3+a_4+a_5=(a_1+2d)+(a_2+2d)+(a_3+2d)$

$=a_1+a_2+a_3+6d=2+6\times(-1)=-4$

⋮

第十次存入之 100000 元，1 年後本利和

$100000\times(1+1.2\%)^1$

可視為首項 $100000\times(1+1.2\%)$

公比 $(1+1.2\%)$，共 10 項

本利和為 $\dfrac{100000\times(1+1.2\%)\times[(1+1.2\%)^{10}-1]}{(1+1.2\%)-1}$

$=\dfrac{100000\times[(1.012)^{11}-1.012]}{1.2\%}$

$\approx\dfrac{10^8}{12}\times(1.140212-1.012)$

$=\dfrac{12821200}{12}\approx 1068433$ 元

(2) 每半年計息一次，期利率為 $1.2\%\times\dfrac{1}{2}=0.6\%$，1 年有 2 期，10 年共 20 期

$100000\times(1+0.6\%)^{20}+100000\times(1+0.6\%)^{18}+\cdots+100000\times(1+0.6\%)^2$

可視為首項 $100000\times(1+0.6\%)^2$

公比 $(1+0.6\%)^2$，共 10 項

本利和為 $\dfrac{100000\times(1+0.6\%)^2\times\{[(1+0.6\%)^2]^{10}-1\}}{(1+0.6\%)^2-1}$

$=\dfrac{10^5\times[(1.006)^{22}-(1.006)^2]}{(1.006)^2-1}$

$\approx\dfrac{10^5\times(1.140658-1.012036)}{1.012036-1}$

$=\dfrac{12862.2}{0.012036}\approx 1068644$ 元

16 (1) $2400000\times(1+0.5\%)^{12}\approx 2400000\times 1.06168$

$=2548032$ 元

(2) 第一個月月底支付 x 元，11 個月後本利和

$x\times(1+0.5\%)^{11}$

第二個月月底支付 x 元，10 個月後本利和

$x\times(1+0.5\%)^{10}$

⋮

第十二個月月底支付 x 元，還清

可視為首項 x，公比 $(1+0.5\%)$，共 12 項

本利和為 $\dfrac{x\times[(1+0.5\%)^{12}-1]}{(1+0.5\%)-1}=\dfrac{x\times[(1.005)^{12}-1]}{0.5\%}$

$\approx 200x\times 0.06168=12.336x=2548032$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{2548032}{12.336}\approx 206553$

26 • **分項對消型級數**

$\dfrac{10}{11}$

範例 *11.* 見詳解

11. ① 當 $n=1$ 時，左式 $=1^2=1$

右式 $=\dfrac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=1$，原式成立

② 設當 $n=k$ 時，$1^2+2^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，原式成立

則當 $n=k+1$ 時

左式 $=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}=$ 右式，成立

故由數學歸納法原理得知，對於所有的正整數 n，

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 恆成立

類題 17 18 見詳解

27 17 ① 當 $n=1$ 時，左式 $=1$，右式 $=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$，原式成立

② 設當 $n=k$ 時，$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，原式成立

則當 $n=k+1$ 時

左式 $=1+2+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=$ 右式，成立

故由數學歸納法原理得知，對於所有的正整數 n，

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 恆成立

18 ① 當 $n=1$ 時，左式 $=1^3=1$

右式 $=\left[\dfrac{1\times(1+1)}{2}\right]^2=1$，原式成立

② 設當 $n=k$ 時，$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$，原式成立

則當 $n=k+1$ 時

左式 $=1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$

$=(k+1)^2(\dfrac{k^2+4k+4}{4})=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$=\left\{\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=$ 右式，成立

故由數學歸納法原理得知，對於所有的正整數 n，

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 恆成立

範例 *12.* (1) 24200 (2) 24255 *13.* 650

12. (1) $\langle a_n\rangle$ 的前 10 項總和

$=(2\times1)^3+(2\times2)^3+(2\times3)^3+\cdots+(2\times10)^3$

$=8\times1^3+8\times2^3+8\times3^3+\cdots+8\times10^3$

$=8\times(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$

$=8\times\left[\dfrac{10\times(10+1)}{2}\right]^2=8\times3025=24200$

(2) $\langle b_n \rangle$ 的前 10 項總和

$= (a_1+1)+(a_2+2)+(a_3+3)+\cdots+(a_{10}+10)$

$= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(1+2+3+\cdots+10)$

$= 24200+\dfrac{10\times(10+1)}{2}=24200+55=24255$

28 **13.** 12×12 方格中的數字規律可觀察到

數字	1	2	3
個數	$23=25-2\times1$	$21=25-2\times2$	$19=25-2\times3$
總和	$25\times1-2\times1^2$	$25\times2-2\times2^2$	$25\times3-2\times3^2$

數字	…	k	…	12
個數	…	$25-2\times k$	…	$1=25-2\times12$
總和	…	$k(25-2\times k)$ $=25\times k-2\times k^2$	…	$25\times12-2\times12^2$

總和 $=(25\times1-2\times1^2)+(25\times2-2\times2^2)$

$+(25\times3-2\times3^2)+\cdots+(25\times11-2\times11^2)$

$+(25\times12-2\times12^2)$

$=25\times(1+2+3+\cdots+11+12)$

$-2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+11^2+12^2)$

$=25\times\dfrac{12\times(12+1)}{2}-2\times\dfrac{12\times(12+1)\times(2\times12+1)}{6}$

$=1950-1300=650$

《另解》

觀察 4×4 方格中的數字規律

1	1	1	1
1	2	2	2
1	2	3	3
1	2	3	4

$1=1^2$

$1+2+1=4=2^2$

$1+2+3+2+1=9=3^2$

$1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$

推廣 12×12 方格中的數字規律

故數列總和

$=1^2+2^2+\cdots+12^2=\dfrac{12\times(12+1)\times(2\times12+1)}{6}=650$

類題 19 2800　20 (1) 4495　(2) 4735

21 (1) 333300　(2) 4945　22 (1) 600　(2) 4290

19 $S_5=1^3+2^3+\cdots+5^3=\left[\dfrac{5\times(5+1)}{2}\right]^2=225$

$S_{10}=1^3+2^3+\cdots+10^3=\left[\dfrac{10\times(10+1)}{2}\right]^2=3025$

故 $6^3+7^3+\cdots+10^3=S_{10}-S_5=3025-225=2800$

20 (1) $\because a_n=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$

$\therefore 1^2+3^2+\cdots+29^2$

$=(4\times1^2-4\times1+1)+(4\times2^2-4\times2+1)$

$+(4\times3^2-4\times3+1)+\cdots$

$+(4\times15^2-4\times15+1)$

$=4\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2)$

$-4\times(1+2+3+\cdots+15)+1\times15$

$=4\times\dfrac{15\times16\times31}{6}-4\times\dfrac{15\times16}{2}+15$

$=4960-480+15=4495$

《另解》

設 $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$

$S_{29}=1^2+2^2+\cdots+29^2=\dfrac{29\times(29+1)\times(2\times29+1)}{6}$

$=8555$

$2^2+4^2+\cdots+28^2=4\times(1^2+2^2+\cdots+14^2)=4S_{14}$

$=4\times\left[\dfrac{14\times(14+1)\times(2\times14+1)}{6}\right]=4060$

故 $1^2+3^2+\cdots+29^2=8555-4060=4495$

(2) $\langle b_n \rangle$ 的前 15 項總和

$=(a_1+2\times1)+(a_2+2\times2)+(a_3+2\times3)$

$+\cdots+(a_{15}+2\times15)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+2\times(1+2+3+\cdots+15)$

$=4495+2\times\dfrac{15\times(15+1)}{2}=4495+240=4735$

29 21 (1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100$

$=1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)$

$+\cdots+99\times(99+1)$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2)+(1+2+3+\cdots+99)$

$=\dfrac{99\times(99+1)\times(2\times99+1)}{6}+\dfrac{99\times(99+1)}{2}$

$=328350+4950=333300$

(2) $1\times3+3\times5+5\times7+\cdots+29\times31$

$=(2\times1-1)\times(2\times1+1)+(2\times2-1)\times(2\times2+1)$

$+(2\times3-1)\times(2\times3+1)+\cdots$

$+(2\times15-1)\times(2\times15+1)$

$=(4\times1^2-1)+(4\times2^2-1)+(4\times3^2-1)$

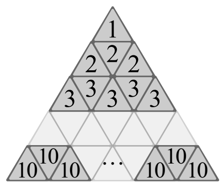
$+\cdots+(4\times15^2-1)$

$=4\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2)-1\times15$

$=4\times\dfrac{15\times(15+1)\times(2\times15+1)}{6}-15$

$=4960-15=4945$

22 只考慮右圖的情況，共有



$1+3+5+\cdots+9=\dfrac{10\times(1+19)}{2}$

$=100$ 個三角形

數字和為

$1\times1+2\times3+3\times5+4\times7+\cdots+10\times19$

$=1(2\times1-1)+2(2\times2-1)+3(2\times3-1)$

$+\cdots+10(2\times10-1)$

$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)-(1+2+3+\cdots+10)$

$=2\times\dfrac{10\times11\times21}{6}-\dfrac{10\times11}{2}=715$

故題中的圖形，共有 $6\times100=600$ 個三角形

數字總和為 $6\times715=4290$

範例 **14.** (1) $\dfrac{n}{n+1}$　(2) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2n^2+6n+4}$

14. (1) $\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

原式 $=(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{2}})+(\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}})+\cdots+(\cancel{\dfrac{1}{n-1}}-\cancel{\dfrac{1}{n}})+(\cancel{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+1})$

$=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

(2) $\frac{1}{n\times(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

原式 $=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}})$

$+\cdots+(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1})+(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2})]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2n^2+6n+4}$

30 **類題** 23 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{25}{231}$ 24 $\frac{11}{18}$ 25 $\frac{20}{11}$

23 (1) $\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

原式 $=(\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{6}})+(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{7}})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{29}}-\frac{1}{30})$

$=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}=\frac{1}{6}$

(2) $\frac{1}{n\times(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

原式 $=\frac{1}{2}[(\frac{1}{6}-\cancel{\frac{1}{8}})+(\frac{1}{7}-\cancel{\frac{1}{9}})+(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{10}})+(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{11}})$

$+\cdots+(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21})+(\cancel{\frac{1}{20}}-\frac{1}{22})]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{21}-\frac{1}{22})=\frac{25}{231}$

24 $\frac{1}{n\times(n+3)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$

$S_{15}=\frac{1}{3}[(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}})+(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{6}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}})$

$+\cdots+(\cancel{\frac{1}{13}}-\frac{1}{16})+(\cancel{\frac{1}{14}}-\frac{1}{17})+(\cancel{\frac{1}{15}}-\frac{1}{18})]$

$=\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{16}-\frac{1}{17}-\frac{1}{18})$

$=\frac{11}{18}-\frac{1}{3}(\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18})$

故 $S_{15}+\frac{1}{3}(\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18})=\frac{11}{18}$

25 $\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}=2(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

∴原式 $=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+2(\frac{1}{10}-\frac{1}{11})$

$=2(1-\frac{1}{11})=\frac{20}{11}$

定期綜合測驗

1. (C)(D)　　2. (A)(B)(E)
3. (1) 0.04 (2) 60 (3) 88
4. (1) 2046 (2) $\frac{186+93\sqrt{2}}{32}$ (3) $17\sqrt{5}$
5. (1) -2 (2) 993　　6. (1) 325 (2) 2925
7. (1) $108+64\sqrt{3}$ (2) $723+414\sqrt{3}$
8. 123518　　9. 825
10. (1) 385 (2) 3465 (3) 4165

1. (A) $a_1=S_1=1-15=-14$

(B) $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-15n)-[(n-1)^2-15(n-1)]$

$=(n^2-15n)-(n^2-17n+16)=2n-16$，$n\geq 2$

所以 $a_9=18-16=2>0$

(C)因為 $a_1=-14$，$a_2=-12$，$a_3=-10$，⋯，$a_n=2n-16$

所以 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，首項為 -14，公差為 2

(D)承(C)，$\langle a_n\rangle$ 的公差為 2，所以 $a_{22}-a_{21}=2$

(E)承(C)，此數列公差為 2（大於 0）且 $a_8=0$

故前 7 項或前 8 項總和最小

2. (A)∵ $a_1>0$ 且 $S_{10}=S_{11}$　∴ $a_{11}=S_{11}-S_{10}=0$

$\Rightarrow\ a_{11}=a_1+(11-1)d\ \Rightarrow\ 0=a_1+10d$

$\Rightarrow\ d=\frac{-a_1}{10}<0$

(B)∵ $a_1>0$，$a_{11}=0$　∴ $a_8>0$

(C)∵ $d<0$，$a_{11}=0$　∴ $a_{12}<0$

$S_{12}-S_{11}=a_{12}<0\ \Rightarrow\ S_{12}<S_{11}$

(D) $\langle a_n\rangle$ 是一個等差數列，$a_{10}>0$，由等差中項可知

$a_3+a_{17}=2\times a_{10}>0$

(E)∵ $a_{10}>0$，$a_{11}=0$

∴ $S_{20}=\frac{20\times(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times(a_{10}+a_{11})}{2}>0$

31 3. 設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的公差為 d，$S_{30}=x$，$S_{40}=y$

由等差級數知 $S_{10},(S_{20}-S_{10}),(S_{30}-S_{20}),(S_{40}-S_{30})$

亦成等差數列，此時公差為 $10\times 10d=100d$

即 $16,36-16,x-36,y-x$

$\Rightarrow\ 16,20,x-36,y-x$ 成等差數列

此時公差為 $20-16=100d\ \Rightarrow\ d=0.04$

$\begin{cases}x-36=24\\ y-x=28\end{cases}\ \Rightarrow\ x=60$，$y=88$

4. (1)等比數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_5=a_1\times r^{5-1}$

$\Rightarrow\ -96=a_1\times(-2)^4\ \Rightarrow\ a_1=\frac{-96}{16}=-6$

$S_{10}=\frac{-6\times[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}=(-2)\times(-1023)=2046$

(2) $S_{10}=\frac{3\times[1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^{10}]}{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\times(1-\frac{1}{32})$

$=3\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)\times\frac{31}{32}=\frac{186+93\sqrt{2}}{32}$

(3)∵等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比 $r=1$　∴各項皆為 $\sqrt{5}$

$a_{14}+a_{15}+\cdots+a_{29}+a_{30}=\sqrt{5}\times$ 項數

$=\sqrt{5}\times(30-14+1)=17\sqrt{5}$

5. 設等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比為 r，$S_{15}=x$

由等比級數知 $S_5,(S_{10}-S_5),(S_{15}-S_{10})$ 三數亦成等比數列，此時公比為 r^5

即 $1,-31-1,x-(-31)$

$\Rightarrow\ 1,-32,x+31$ 成等比數列

此時公比為 $r^5=\frac{-32}{1}\ \Rightarrow\ r=-2$

$x+31=(-32)\times(-32)=1024\ \Rightarrow\ x=993$

6. (1)第 1 層堆 1 個

第 2 層堆 $1+2=3$ 個

第 3 層堆 $1+2+3=6$ 個，⋯

依此類推，第 25 層共堆了

$1+2+3+\cdots+25=\dfrac{25\times(25+1)}{2}=325$ 個積木

⑵ 由⑴可知第 k 層共堆了

$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k\times(k+1)}{2}$ 個積木

故從第 1 層到第 25 層所使用的積木個數是

$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+25)$

$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}+\dfrac{2\times(2+1)}{2}+\dfrac{3\times(3+1)}{2}+\cdots+\dfrac{25\times(25+1)}{2}$

$=\dfrac{1^2+1}{2}+\dfrac{2^2+2}{2}+\dfrac{3^2+3}{2}+\cdots+\dfrac{25^2+25}{2}$

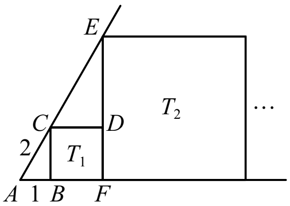
$=\dfrac{1}{2}\times[(1^2+2^2+3^2+\cdots+25^2)+(1+2+3+\cdots+25)]$

$=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{25\times26\times51}{6}+\dfrac{25\times26}{2})=\dfrac{1}{2}(5525+325)$

$=2925$ 個

7. ⑴ 右圖中，因為 T_1、T_2 都是正方形

所以 ΔABC 和 ΔCDE 為兩相似三角形（AA 相似）



且 T_1 的邊長 $\overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

可推得 $\overline{DE}=\sqrt{3}\,\overline{CD}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$

T_2 的邊長 $\overline{EF}=3+\sqrt{3}=\sqrt{3}\times(1+\sqrt{3})$

$\therefore$ 正方形 T_1、T_2、T_3、…的周長為

$4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}\times(1+\sqrt{3})$, $4\sqrt{3}\times(1+\sqrt{3})^2$, …的等比數列，故前 4 個正方形的周長總和為

$\dfrac{4\sqrt{3}\times[1-(1+\sqrt{3})^4]}{1-(1+\sqrt{3})}=\dfrac{4\sqrt{3}\times[1-(28+16\sqrt{3})]}{-\sqrt{3}}$

$=108+64\sqrt{3}$

⑵ T_1 的邊長 $\overline{BC}=\sqrt{3}$，面積為 3

T_2 的邊長 $\sqrt{3}\times(1+\sqrt{3})$，面積為 $3\times(1+\sqrt{3})^2$

可推得正方形 T_1、T_2、T_3、…的面積為

3, $3\times(1+\sqrt{3})^2$, $3\times(1+\sqrt{3})^4$, …的等比數列

故前 4 個正方形的面積總和為

$\dfrac{3\times\{1-[(1+\sqrt{3})^2]^4\}}{1-(1+\sqrt{3})^2}=\dfrac{3\times[1-(1552+896\sqrt{3})]}{-3-2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3\times(1551+896\sqrt{3})\times(3-2\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})\times(3-2\sqrt{3})}=\dfrac{3\times(723+414\sqrt{3})}{3}$

$=723+414\sqrt{3}$

8. 年利率 1.8% 相當於月利率 $1.8\%\div12=0.15\%$

每月存 5000 元，24 個月的本利和為

$5000(1+0.15\%)^{24}+5000(1+0.15\%)^{23}+\cdots+5000(1+0.15\%)$

$=5000\times\dfrac{1.0015\times(1.0015^{24}-1)}{1.0015-1}\approx5000\times\dfrac{1.0015\times(1.037-1)}{1.0015-1}$

≈123518

故 24 個月的本利和為 123518 元

9. 3 有 1 個，5 有 2 個，7 有 3 個，…，$2k+1$ 有 k 個，…，21 有 10 個

$1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+10\times21$

$=1\times(2\times1+1)+2\times(2\times2+1)+3\times(2\times3+1)+\cdots+10\times(2\times10+1)$

$=2\times(1^2+2^2+\cdots+10^2)+(1+2+\cdots+10)$

$=2\times\dfrac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}+\dfrac{10\times(10+1)}{2}$

$=770+55=825$

10. ⑴ $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2=\dfrac{10\times11\times21}{6}=385$

⑵ 原式 $=3^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)=9\times\dfrac{10\times11\times21}{6}=3465$

⑶ 原式 $=(3\times1+2)^2+(3\times2+2)^2+(3\times3+2)^2+\cdots+(3\times k+2)^2+\cdots+(3\times10+2)^2$

$=9\times(1^2+2^2+\cdots+10^2)+12\times(1+2+\cdots+10)+4\times10$

$=9\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+12\times\dfrac{10\times11}{2}+40$

$=3465+660+40=4165$

11. ① 當 $n=1$ 時，左式 $=1$，右式 $=\dfrac{1\times(1+1)\times(1+2)}{6}=1$，原式成立

② 設當 $n=k$ 時

$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+k)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$，原式成立

則當 $n=k+1$ 時

左式 $=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+k)+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}=$ 右式，成立

故由數學歸納法原理得知，對於所有的正整數 n，

$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 恆成立

::: 歷屆試題典藏

1. (A)(C)	2. (D)	3. 25	4. (A)(D)
5. 300	6. (B)(D)(E)	7. (A)	8. 37
9. (C)	10. (C)		

32 1. (A) $\because\langle a_n\rangle$ 公比為 -0.8

$\therefore a_9\times a_{10}=a_9\times a_9\times(-0.8)=-0.8a_9^2<0$

(B) 不一定，反例：$\langle b_n\rangle$ 公差為 -2

則 $b_9=-6$，$b_{10}=-8$，但若取 $a_9=-5>b_9$

則 $a_{10}=(-5)\times(-0.8)=4>b_{10}$，但 $b_{10}<0$

(C) $\because\langle a_n\rangle$ 公比 <0

$\therefore a_9$ 和 a_{10} 一正一負，又 $a_9>b_9$，$a_{10}>b_{10}$

$\therefore b_9$、b_{10} 至少有一數小於 0，又 $b_1=10$

$\therefore\langle b_n\rangle$ 公差為負，故 $b_9>b_{10}$

(D)不一定，若 $\langle a_n\rangle$ 首項為負，則 $a_9<0$，$a_{10}>0$

(E)不一定，若取 $a_8=-\frac{25}{4}$，$a_9=5$，$a_{10}=-4$

$\langle b_n\rangle$ 公差為 -2，則 $b_8=-4$，$b_9=-6$，$b_{10}=-8$

則 $a_8<b_8$，$a_9>b_9$，$a_{10}>b_{10}$

2. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=80$

又 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=120$

$\therefore\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=-40$

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=r\times(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$\Rightarrow\quad r=\dfrac{a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}}{a_1+a_3+a_5+a_7+a_9}=\dfrac{-40}{120}=\dfrac{-1}{3}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\dfrac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=\dfrac{a_1[1-(\frac{-1}{3})^{10}]}{1-(\frac{-1}{3})}=80$

$\Rightarrow\quad a_1=80\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{1-(\frac{-1}{3})^{10}}\approx 80\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{320}{3}$

故 $100\le a_1<110$

3. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$

則 $a_4=a_3+f(2)\quad\Rightarrow\quad 12=5+4a+2b+c$

$\Rightarrow\quad 4a+2b+c=7\cdots$①

$a_3=a_2+f(1)\quad\Rightarrow\quad 5=2+a+b+c$

$\Rightarrow\quad a+b+c=3\cdots$②

$a_2=a_1+f(0)\quad\Rightarrow\quad 2=1+c$

$\Rightarrow\quad c=1\cdots$③

③代入①②得 $\begin{cases}4a+2b=6\\a+b=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a=1$，$b=1$

故 $f(x)=x^2+x+1$

$a_5=a_4+f(3)=12+3^2+3+1=25$

4. (A) $\langle a_n\rangle$ 的公差為正，故 $\langle a_n\rangle$ 遞增

又 b_n 為 a_n 的相反數，故 $\langle b_n\rangle$ 遞減

(B)反例，若 $a_1=-2$，$a_2=-1$，則 $c_1=4$，$c_2=1$

(C) $d_{n+1}-d_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$

$=(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})=2\alpha$

(D) $e_{n+1}-e_n=(a_{n+1}+n+1)-(a_n+n)$

$=(a_{n+1}-a_n)+1=\alpha+1$

(E) $f_{n+1}-f_n=\dfrac{(n+1)(2a_1+n\alpha)}{2}-\dfrac{n[2a_1+(n-1)\alpha]}{2}=a_1+n\alpha$

5. 原售價為 $200\times5=1000$

利潤為 $1000-200=800$ 元

調降三次後利潤為 $800\times(\frac{1}{2})^3=100$ 元

故最後售價為 $200+100=300$ 元

6. (A)反例：$2^a=3$、$2^b=2$、$2^c=1$，成等差數列

但 $a=\log_2 3$、$b=1$、$c=0$，不是等比數列

(B)$\because\ 2^a$、2^b、2^c，成等差 $\quad\therefore$公差 $=2^c-2^b=2^b-2^a$

故 $2^{c+100}-2^{b+100}=2^{100}(2^c-2^b)=2^{100}(2^b-2^a)$

$=2^{b+100}-2^{a+100}$

$\therefore\ 2^{a+100}$、2^{b+100}、2^{c+100}，成等差數列

(C)如(A)反例，若 $2^a=3$、$2^b=2$、$2^c=1$

則 $4^a=(2^a)^2=9$、$4^b=(2^b)^2=4$、$4^c=(2^c)^2=1$

不是等差數列

(D)$\because\ 2^c-2^b=2^b-2^a$

$\therefore\ 2^a=2\cdot2^b-2^c=2^{b+1}-2^c<2^{b+1}$

故 $a<b+1$

(E) 2^b 為 2^a 和 2^c 的等差中項 $\quad\therefore\ \dfrac{2^a+2^c}{2}=2^b$

又由算幾不等式知

$\dfrac{2^a+2^c}{2}=2^b\ge\sqrt{2^a\cdot2^c}=2^{\frac{a+c}{2}}$

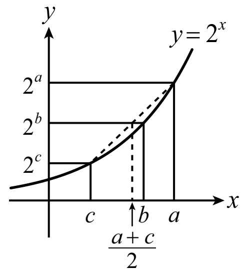
故 $2^b\ge2^{\frac{a+c}{2}}\quad\Rightarrow\quad b\ge\dfrac{a+c}{2}$

《另解》

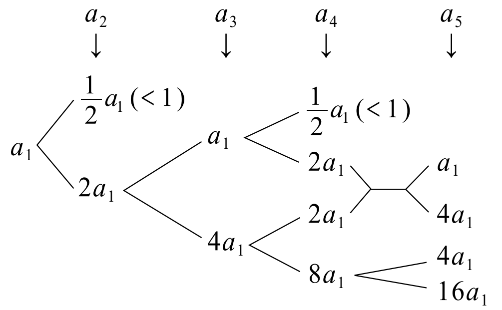
利用 $y=2^x$ 的圖形判斷

（第 3 冊指對數函數單元）

如右圖，可知 $b\ge\dfrac{a+c}{2}$



33 7. $1=\log_{10}10<a_1=\log_{10}36<\log_{10}100=2$



故 a_5 有 3 種可能 $(a_1,4a_1,16a_1)$

8. 每個週期移動 24 個單位

$24\times4=96<116<120=24\times5$

即第 4 個週期結束時在 96 的位置

$\dfrac{116-96}{4}=5\quad\therefore$在 $8\times4+5=37$ 秒時抵達 116

9. 所求公差 $=\log a_3-\log a_1=\log a_6-\log a_3$

$\Rightarrow\quad\log\dfrac{a_3}{a_1}=\log\dfrac{a_6}{a_3}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{a_6}{a_3}\quad\Rightarrow\quad a_3^{\,2}=a_1\times a_6$

$\Rightarrow\quad(a_1+2d)^2=a_1(a_1+5d)$

$\Rightarrow\quad\cancel{a_1^2}+4a_1d+4d^2=\cancel{a_1^2}+5a_1d\quad\Rightarrow\quad4d^2-a_1d=0$

$\Rightarrow\quad d(4d-a_1)=0\quad\therefore\ d=\dfrac{1}{4}a_1$ 或 0（不合）

故所求公差 $=\log a_3-\log a_1=\log(a_1+2\cdot\frac{1}{4}a_1)-\log a_1$

$=\log\dfrac{\frac{3}{2}a_1}{a_1}=\log\dfrac{3}{2}$

10. 每一循環時間為 $\underset{\text{藍}}{5}+\underset{\text{白}}{2}+\underset{\text{紅}}{6}+\underset{\text{白}}{2}=15$ 秒

$15d<99\quad\Rightarrow\quad d=6$，$15d=90$

故第 7 循環：①第 91 ～ 95 秒 $\Rightarrow$ 藍光

②第 96 ～ 97 秒 $\Rightarrow$ 白光

③第 98 ～ 103 秒 $\Rightarrow$ 紅光

④第 104 ～ 105 秒 $\Rightarrow$ 白光

核心思考
高中數學

第 2 冊
課後練習本

第 1 回　1-1 等差數列與等比數列

第 2 回　1-1 遞迴數列

第 3 回　1-1 數學歸納法

第 4 回　1-2 級 數

第 5 回　1-2 單利與複利、定期定額存款

第 6 回　1-2 常用級數求和公式

第 7 回　2-1 代表數據的數

第 8 回　2-1 代表離散程度的數

第 9 回　2-1 合併數據的標準差、標準化

第10回　2-2 散布圖、相關係數 I

第11回　2-2 相關係數 II

第12回　2-2 最適直線

第13回　3-1 簡單邏輯與集合

第14回　3-1 計數原理

第15回　3-1 取捨原理

第16回　3-1 分類討論

第17回　3-2 直線排列

第18回　3-2 排首排尾

第19回　3-2 有相同物之排列

第20回　3-2 相鄰、不相鄰排列

第21回　3-2 重複排列

第22回　3-3 組合的基本概念

第23回　3-3 組合的應用

第24回　3-3 分組、分堆

第25回　3-3 二項式定理

第26回　3-4 樣本空間、古典機率 I

第27回　3-4 古典機率 II

第28回　3-4 數學期望值

第29回　4-1 三角比

第30回　4-1 三角比的基本關係式、三角測量

第31回　4-2 廣義角的應用

第32回　4-2 廣義角三角比

第33回　4-2 廣義角三角比的基本關係與換算

第34回　4-2 直角坐標與極坐標的轉換

第35回　4-3 三角形的面積公式

第36回　4-3 正弦定理

第37回　4-3 餘弦定理

班級：________　姓名：________　座號：________

第 4 回　1-2 級數

1. 已知 $\langle a_n \rangle$ 是一個等差數列，首項為 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$，前 9 項和為 18，試求：

⑴數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差 $d=$ ______　⑵數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 17 項和為 ______。

2. 已知一等差數列的前 6 項和為 24，後 6 項和為 324，且所有項的和為 1160，則此數列共有 ______ 項。

3. 已知一等差級數的首項為 110，公差為 -6，若前 k 項之和 S_k 為最大，則 $k=$ ______。

4. 已知一等差級數的第 5 項為 13，且 $S_3=S_{12}$，試求：

⑴此數列第 8 項為 ______　⑵ $S_{13}=$ ______。

5. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，若其前 6 項的和 $S_6=36$，前 12 項的和 $S_{12}=324$，則：

⑴此數列的公比為 ______　⑵此數列前 18 項的和為 ______。

6. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且滿足前 6 項的和為前 3 項和的 28 倍，則此數列的公比為 ______。

1. 小名每年年初於銀行存入 x 元，且銀行採取複利計算，「每年」計息一次，年利率為 1.2%，若 10 年後的本利和超過一百萬，則 $x=$ ＿＿＿＿＿ 元。（請利用計算機運算，並無條件進位到整數）

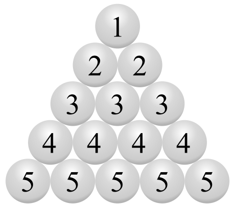
2. 有房斯有財的觀念是國人常見的想法，因此購買新屋時，除了自備款外，仍會再向銀行貸款，而貸款部分銀行多以每月為一期，按複利計算。（請利用計算機運算，並無條件進位到整數）
⑴總價 300 萬的套房，在零自備的情況下，向銀行貸款 300 萬，月利率為 0.6% 的條件下，希望在 5 年內（60 個月）全數清還銀行貸款，則每月須支付之費用為 ＿＿＿＿＿ 元。
⑵總價 300 萬的套房，手邊自備 100 萬後，向銀行貸款 200 萬，月利率為 0.6% 的條件下，希望在 5 年內（60 個月）全數清還銀行貸款，則每月須支付之費用為 ＿＿＿＿＿ 元。

3. 在八零年代國小的學校教育中，希望學生養成儲蓄的好習慣，都會開一個兒童儲金戶頭，固定每學期（半年）存錢一次，當時為了讓學生了解利息，所以採用單利計算，且在當時的時空背景，年利率約莫 8%。
⑴若學校採「半年」計息一次，8% 年利率，單利計算下，小祥每學期初皆存入銀行 100 元，則在國小就讀六年後，畢業時結清存款，共可領出 ＿＿＿＿＿ 元。
⑵若依相同的利率條件，但校方改「每年」計息一次，小祥改每學年的上學期開始時存入 200 元，則在國小就讀六年後，畢業時結清存款，共可領出 ＿＿＿＿＿ 元。

第 6 回　1-2 常用級數求和公式

1. 試求 $2^3+4^3+6^3+\cdots+50^3=$ ＿＿＿＿＿ 。

2. 若依照右圖的規則把數字球作排列到第 10 列後，則：
⑴共有 ＿＿＿ 顆球。
⑵所有球上的數字和為 ＿＿＿＿ 。
⑶若將每顆球數字皆平方後，此時所有球上的數字和為 ＿＿＿＿ 。



3. 試推導：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 對所有自然數 n 都成立。

4. 水果攤老闆擺設攤上的橘子，欲將橘子擺放成長方形垛的樣子，即底層的橘子排成長邊 20 顆，短邊 12 顆（20×12）的長方形，且每往上一層，長、寬的橘子都分別比下層少一顆，試問：
⑴依此方式，共堆疊 4 層，則攤上共有 ＿＿＿＿ 顆橘子。
⑵依此方式，共堆疊 10 層，則攤上共有 ＿＿＿＿ 顆橘子。

4. (1) 觀察前後兩圖火柴棒數量的差，可知數列 $\langle b_n\rangle$ 的前五項為 8, 11, 14, 17, 20

(2) $\langle b_n\rangle$ 為一等差數列，公差為 3，首項為 8

因為 $b_n = a_{n+1} - a_n$，所以 $a_{n+1} = a_n + b_n$

可推得 $a_{n+1} = a_n + 8 + 3(n-1) = a_n + 3n + 5$

故可知 $a_{n+1} = a_n + 3n + 5$

$\Rightarrow\ a_n = a_{n-1} + 3(n-1) + 5 = a_{n-1} + 3n + 2$

遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 3n + 2，n \geq 2 \end{cases}$

(3)
$$\begin{array}{rrl} & a_2 = a_1 + 3 \times & 2 \quad + 2 \\ & a_3 = a_2 + 3 \times & 3 \quad + 2 \\ & \vdots & \\ +) & a_n = a_{n-1} + 3 \times & n \quad + 2 \\ \hline & a_n = a_1 + 3 \times & (2 + 3 + \cdots + n) + 2 \times (n-1) \\ & = 5 + 3 \times & \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 2n - 2 \\ & = & \frac{3n^2 + 7n}{2} \end{array}$$

第 3 回

1. (1) $\frac{3}{8}$；$\frac{4}{11}$；$\frac{5}{14}$ (2) $\frac{n+1}{3n+2}$ (3)見詳解 2. 見詳解
3. (1) 4 (2)見詳解 4. 見詳解

4

1. (1) 依序代入可得 $a_2 = \frac{3}{8}$，$a_3 = \frac{4}{11}$，$a_4 = \frac{5}{14}$

(2) 依序觀察分子為 2, 3, 4, 5，公差為 1；分母為 5, 8, 11, 14，公差為 3，故猜測 $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

(3) ① 當 $n = 1$ 時，$a_1 = \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3 \times 1 + 2}$，成立

② 設 $n = k$ 時，$a_k = \frac{k+1}{3k+2}$，成立

當 $n = k+1$ 時

$$a_{k+1} = \frac{4a_k - 1}{9a_k - 2} = \frac{4 \times \frac{k+1}{3k+2} - 1}{9 \times \frac{k+1}{3k+2} - 2} = \frac{4(k+1) - (3k+2)}{9(k+1) - 2(3k+2)}$$

$$= \frac{k+2}{3k+5} = \frac{(k+1)+1}{3 \times (k+1) + 2} = \text{右式，成立}$$

∴由數學歸納法知 $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$ 成立

2. ① 當 $n = 1$ 時

$$a_1 = 1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1，\text{成立}$$

② 設 $n = k$ 時，$a_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，成立

當 $n = k+1$ 時

$$a_{k+1} = a_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1) \times \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = (k+1) \times \frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \text{右式，成立}$$

∴由數學歸納法知上述成立

3. (1) $n = 1$，$11^1 + 15^2 = 11 + 225 = 236$

$n = 2$，$11^2 + 15^3 = 121 + 3375 = 3496$

$(236, 3496) = 4$ ∴ p 最大值為 4

(2) ① 當 $n = 1$ 時，$11^1 + 15^2 = 236 = 4 \times 59$，成立

② 設 $n = k$ 時，$11^k + 15^{k+1} = 4 \times t$，$t \in Z$

當 $n = k+1$ 時

$$\begin{aligned} 11^{k+1} + 15^{k+2} &= 11 \times 11^k + 15 \times 15^{k+1} \\ &= 11 \times (11^k + 15^{k+1}) + 4 \times 15^{k+1} \\ &= 11 \times 4t + 4 \times 15^{k+1} \\ &= 4 \times (11t + 15^{k+1}) \text{ 為 4 的倍數} \end{aligned}$$

∴由數學歸納法知上述成立

4. ① 當 $n = 1$ 時，$1 \times 2 = 2 = \frac{1 \times (1+1) \times (1+2)}{3}$，成立

② 設 $n = k$ 時

$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$，成立

當 $n = k+1$ 時

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \text{右式}$$

∴由數學歸納法知上述成立

第 4 回

1. (1) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2}{4}$ (2) $17\sqrt{3} - 17\sqrt{2} + 68$ 2. 40
3. 19 4. (1) 0 (2) $\frac{169}{3}$ 5. (1) $\pm\sqrt{2}$ (2) 2628
6. 3

5

1. (1) 利用等差級數的和公式，得 $S_9 = 9 \times a_5 = 18$

$\Rightarrow\ a_5 = 2$，且 $a_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

可由 $a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} + 4d$

$\Rightarrow\ d = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2}{4}$

(2)
$$S_{17} = \frac{17 \times [2 \times (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (17-1) \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2}{4}]}{2}$$

$$= \frac{17 \times (2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 8)}{2} = 17\sqrt{3} - 17\sqrt{2} + 68$$

2. 設公差為 d，由等差中項的性質可知

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} \\ &= a_5 + a_{n-4} = a_6 + a_{n-5} = \frac{24 + 324}{6} = 58 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1) \times d = 58$

又 $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1) \times d]}{2} = 1160$

$\Rightarrow\ \frac{58n}{2} = 1160 \Rightarrow n = 40$

3. 因為前 k 項之和 S_k 為最大

故 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 皆為正數且 a_{k+1} 為負數

$a_k = a_1 + (k-1)d = 110 + (-6) \times (k-1) > 0$

$\Rightarrow\ k < \frac{110}{6} + 1 \approx 19.33$

$a_{k+1} = a_1 + kd = 110 + (-6) \times k < 0$

$\Rightarrow\ k > \frac{110}{6} \approx 18.33$

所以 $k = 19$

4. 因為 $S_3=S_{12}$，所以 $a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{12}=0$

可知 $a_4+a_{12}=a_5+a_{11}=a_6+a_{10}=a_7+a_9=2a_8=0$

$a_8=0$ 且 $a_5=13 \quad \Rightarrow \quad a_8=a_5+3d \quad \Rightarrow \quad 0=13+3d$

$\Rightarrow$ 公差 $d=\dfrac{-13}{3}$

首項 $a_1=a_5-4d=13-4\times(\dfrac{-13}{3})=\dfrac{91}{3}$

$$S_{13}=\frac{13\times[2\times\frac{91}{3}+12\times(\frac{-13}{3})]}{2}=\frac{169}{3}$$

5. 設此等比數列 $\langle a_n\rangle$ 公比為 r

(1) 由等比級數知 $S_6,(S_{12}-S_6),(S_{18}-S_{12})$ 三數亦成等比數列，此時公比為 r^6，即 $36,(324-36),(S_{18}-324)$

$\Rightarrow \quad 36,288,S_{18}-324$ 成等比數列

$r^6=\dfrac{288}{36}=8 \quad \Rightarrow \quad r=\pm\sqrt{2}$

(2) $S_{18}-324=288\times r^6=288\times 8=2304$

$\Rightarrow \quad S_{18}=2304+324=2628$

6. 設此等比數列 $\langle a_n\rangle$ 公比為 r

由等比級數公式得知 $S_6=\dfrac{a_1\times(1-r^6)}{1-r}$，$S_3=\dfrac{a_1\times(1-r^3)}{1-r}$

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{1-r^6}{1-r^3}=\frac{(1-r^3)(1+r^3)}{1-r^3}=1+r^3=28$$

$\Rightarrow \quad r^3=27 \quad \Rightarrow \quad r=3$

第 5 回

1. 93595 2. (1) 59688 (2) 39792
3. (1) 1512 (2) 1536

6 1. $x\cdot(1+1.2\%)^{10}+x\cdot(1+1.2\%)^9+\cdots+x\cdot(1+1.2\%)^1$

$=\dfrac{x\cdot 1.012\cdot(1.012^{10}-1)}{1.012-1}>1000000$

$\Rightarrow \quad 0.128212x>12000$

$\Rightarrow \quad x>\dfrac{12000}{0.128212}\approx 93594.9\approx 93595$

2. 設每月還 x 元，60 個月歸還之本利和需等於所借金額本利和

(1) $x\cdot(1+0.6\%)^{59}+x\cdot(1+0.6\%)^{58}+\cdots+x$

$=3000000\times(1+0.6\%)^{60}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x\cdot(1.006^{60}-1)}{1.006-1}=3000000\times 1.006^{60}$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{3000000\times 1.006^{60}\times 0.006}{1.006^{60}-1}$

$=\dfrac{3000000\times 1.431788\times 0.006}{1.431788-1}$

$\approx 59687.12\approx 59688$ 元

(2) $x\cdot(1+0.6\%)^{59}+x\cdot(1+0.6\%)^{58}+\cdots+x$

$=2000000\times(1+0.6\%)^{60}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x\cdot(1.006^{60}-1)}{1.006-1}=2000000\times 1.006^{60}$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{2000000\times 1.006^{60}\times 0.006}{1.006^{60}-1}$

$=\dfrac{2000000\times 1.431788\times 0.006}{1.431788-1}$

$\approx 39791.41\approx 39792$ 元

3. (1) $8\%\div 2=4\%$，$100\times 4\%=4$

$(100+4\times 12)+(100+4\times 11)+\cdots+(100+4\times 1)$

$=100\times 12+4\times(1+2+\cdots+12)$

$=1200+4\times\dfrac{12\times 13}{2}=1512$ 元

(2) $8\%\times 200=16$

$(200+16\times 6)+(200+16\times 5)+(200+16\times 4)+\cdots+(200+16\times 1)$

$=200\times 6+16\times(1+2+\cdots+6)$

$=1200+16\times\dfrac{6\times 7}{2}=1536$ 元

第 6 回

1. 845000 2. (1) 55 (2) 385 (3) 3025 3. 見詳解
4. (1) 782 (2) 1245

7 1. $2^3+4^3+6^3+\cdots+50^3=2^3\times(1^3+2^3+3^3+\cdots+25^3)$

$=8\times\left[\dfrac{25\times(1+25)}{2}\right]^2=845000$

2. (1) $1+2+\cdots+10=\dfrac{10\times(10+1)}{2}=55$ 顆

(2) $1\times 1+2\times 2+3\times 3+\cdots+10\times 10$

$=1^2+2^2+\cdots+10^2$

$=\dfrac{10\times(10+1)+(2\times 10+1)}{6}=385$

(3) $1\times 1^2+2\times 2^2+3\times 3^2+\cdots+10\times 10^2$

$=1^3+2^3+\cdots+10^3=\left[\dfrac{10\times(10+1)}{2}\right]^2=3025$

3. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)$

$=1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)+\cdots+k\times(k+1)+\cdots+n\times(n+1)$

$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$

$=\dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}+\dfrac{n\times(n+1)}{2}$

$=n\times(n+1)[\dfrac{(2n+1)}{6}+\dfrac{1}{2}]$

$=n\times(n+1)\times\dfrac{(2n+4)}{6}=\dfrac{n\times(n+1)\times(n+2)}{3}$

4. (1) 依照題意，橘子數量為

$20\times 12+19\times 11+18\times 10+17\times 9$

$=240+209+180+153=782$ 顆

(2) 依照題意，橘子數量為

$20\times 12+19\times 11+18\times 10+\cdots+11\times 3$

$=(21-1)\times(13-1)+(21-2)\times(13-2)+\cdots+(21-10)\times(13-10)$

$=(21\times 13-1\times 13-1\times 21+1^2)+(21\times 13-2\times 13-2\times 21+2^2)+\cdots+(21\times 13-10\times 13-10\times 21+10^2)$

$=10\times 21\times 13-(1+2+\cdots+10)\times 13-(1+2+\cdots+10)\times 21+(1^2+2^2+\cdots+10^2)$

$=2730-\dfrac{10\times 11}{2}\times(13+21)+\dfrac{10\times 11\times 21}{6}$

$=2730-1870+385=1245$ 顆