目次

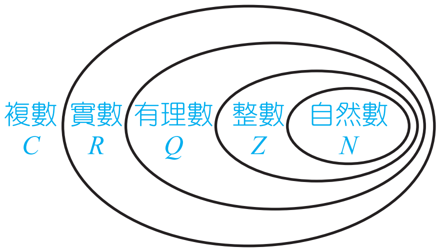
1 數與式

1-1 實數

重點整理

• 數系

- 複數 C
  - 實數 R
    - 有理數 Q
      - 整數 Z
        - 正整數（自然數）N
        - 0
        - 負整數
      - 有限小數
      - 無限循環小數
    - 無理數
  - 虛數



可以在數線上標示出來的數稱為實數，實數包含有理數和無理數。比實數還要大的數域稱為複數，複數的內容在十二年級才會正式介紹。

• 有理數

可以表示成兩個整數的比值的數稱為有理數（分母不為 0）。

1. 給定單位長 1，則任何一個有理數都可以利用尺規作圖在數線上畫出來。以下為利用尺規作圖找出正有理數 $\frac{m}{n}$ 的方法（m、$n \in N$）：
   (1) 找出坐標為 m 的點 A。
   (2) 過原點 O 作一直線 L 不與數線重合。
   (3) 在 L 上取點 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，使得 $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots = \overline{A_{n-1}A_n}$。
   (4) 連接 $\overline{AA_n}$，過 A_1 作直線平行 $\overline{AA_n}$ 交數線於 B，則 B 點坐標即為 $\frac{m}{n}$。

學例 在數線上，已知 $O(0)$、$A(1)$，利用尺規作圖畫出 $B(\frac{1}{3})$ 的位置。

2. 任何一個分數（兩整數的比值），若可經約分或擴分後，使得分母為 10、100、1000、⋯ 等形如 10^n 的數時，則必可將此分數寫成有限小數。

舉例 設 m、n 為整數，且 $\frac{m}{n}$ 是最簡分數，而且可以化成有限小數，則下列哪些數可能為 n 的質因數？______

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 7　(E) 11

3. 分數 $\frac{m}{n}$ 化成小數時，為被除數 m 除以除數 n，當進行直式除法時，每一層的程序中餘數必為小於 n 的非負整數，因此若運算時餘數重複，運算程序就會出現循環。由此可知，有理數若不是有限小數，就一定可以化成循環小數。

總結 有理數必可寫成整數、有限小數或循環小數。

(1) 最簡分數的分母的質因數只有 2 或 5 時，就一定可寫成有限小數。

(2) 最簡分數的分母若有 2、5 以外的質因數，就只能寫成循環小數。

4. 有理數的封閉性：任意兩有理數加、減、乘、除（0 不能當除數）的結果，仍為有理數。

5. 有理數的稠密性：任意兩個相異的有理數之間，必存在至少一個有理數。

• 無理數

在實數中，不是有理數的數皆為無理數，若將無理數化為小數，則必為無限不循環小數。換句話說，無理數都不能寫成兩個整數的比值（$\frac{m}{n}$ 的形式）。例 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{5}$、$\log 2$、π、⋯等都是無理數。

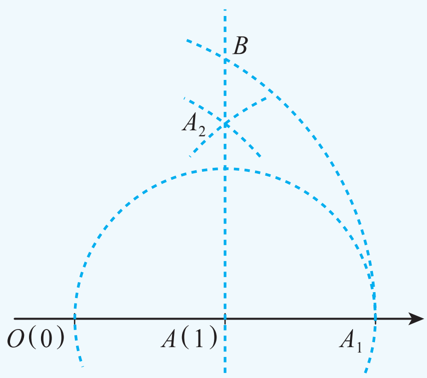
1. 並非所有的無理數都可以用尺規作圖的方法找出在數線上的位置。

2. (1) 若 n 可以表示成兩個整數的平方和，或兩個整數的平方差，則可利用直角三角形的方法畫出 $\sqrt{n}$ 的長度。

舉例 ① 如右圖。在數線上，已知兩點 $O(0)$、$A(1)$，以 A 點為圓心，$\overline{OA}$ 長為半徑畫圓弧，與數線交於點 A_1。試問：A_1 的坐標為 ______。

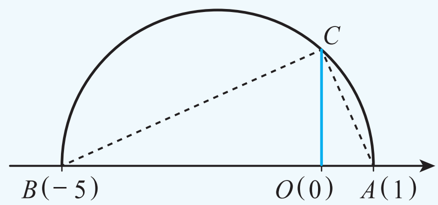
② 再分別以 O 點和 A_1 為圓心，大於 $\overline{OA}$ 長為半徑畫圓弧，兩弧交於點 A_2，作直線 AA_2。試問：直線 AA_2 與數線的關係為何？______

③ 以 O 點為圓心，$\overline{OA_1}$ 長為半徑畫圓弧，與直線 AA_2 交於 B 點。試問：$\overline{AB}$ 長度為 ______。



(2) 若 n 為自然數，則可利用尺規作圖畫出 $\sqrt{n}$ 的長度。

舉例 在數線上，已知兩點 $O(0)$、$A(1)$、$B(-5)$，以 $\overline{AB}$ 長為直徑作一半圓，通過 O 點作 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ 且與半圓交於 C 點。試問：$\overline{OC}$ 長度為 ______。



範例 有理數 I

1. 將 $\frac{31}{13}$ 寫成小數後，小數點後第 100 位數為何？______

2. 下列哪些數可以寫成有限小數？__________

(A) $\frac{52}{25}$　(B) $\frac{521}{250}$　(C) $\frac{59}{225}$　(D) $\frac{215}{512}$　(E) $\frac{121}{196}$

1.檢查是否為最簡分數
2.考慮分母的質因數

3. (1)設 p、q 為互質的正整數，且 $\frac{q}{p}$ 可化為小數點後只有兩位的有限小數，試問下列選項哪些正確？____________

(A) $p \leq 100$
(B) 2 和 5 必為 p 的質因數
(C)若 2 是 q 的因數，則 5 必為 p 的因數
(D) 8 不是 p 的因數
(E) 9 不是 p 的因數

(2)已知 n 為正整數，且 $\frac{1}{n}$ 可化為小數點後只有兩位的有限小數，試寫出所有可能的 n 值。

____

兩位小數必可寫成 $\frac{m}{100}$，其中 m 為二位數，約分為最簡分數後得 $\frac{q}{p}$　$\therefore p$ 是 $100 = 2^2 \times 5^2$ 的因數

類題 :::

1 設 n 為自然數，$x = 1 + \dfrac{2}{3 + \dfrac{4}{5}}$，且 $nx < 100$，則 n 的最大值為 ______ 。

2 下列哪一個數當作 n 值，可使 $\dfrac{7 \times n}{450}$ 的值能化為有限小數？______

(A) 12　(B) 15　(C) 18　(D) 21　(E) 24

3 設 n 為兩位數的正整數，且 $(\sqrt{n} + \sqrt{18})^2$ 為有理數，試寫出所有可能的 n 值。____________

範例 有理數 II

4. 有一個有理數，若以最簡分數表示時，分子和分母的和為 20，其值大於 0.8 且小於 0.9，則此最簡分數為 ______ 。

5. 將下列小數化為最簡分數。

(1) $0.\overline{48} =$ ______　(2) $0.4\overline{8} =$ ______ 。

將循環小數化為分數應為高三選修數學的內容，但為了能完整理解有理數以分數及小數表示互相轉換的方式，故於此簡略介紹計算方式。但完整的觀念與無限和極限有關，在此不多著墨

類題

4 設 m、n 為互質的正整數，且 $m+n=30$，若 $\frac{1}{2}<\frac{n}{m}<\frac{2}{3}$，則 $\frac{n}{m}=$ ______。

5 試問下列選項哪些正確？______

(A) $2\times0.\overline{4}=0.\overline{8}$

(B) $2\times0.\overline{8}=0.\overline{16}$

(C)若 a 是有 2 位循環節的數，則 $2a$ 也是有 2 位循環節的數

(D)若 b 是有限小數，則 $\frac{3}{8}b$ 亦可寫成有限小數

(E)若 c 是有限小數，則 $\frac{8}{3}c$ 亦可寫成有限小數

6 將下列小數化為最簡分數。

(1) $0.375=$ ______　(2) $0.\overline{375}=$ ______　(3) $0.3\overline{75}=$ ______。

7 關於下列各數的大小，請選出正確的選項。______

(A) $0.4\overline{9}<0.5$

(B) $0.\overline{10}+0.\overline{01}=\frac{1}{9}$

(C) $0.\overline{3}\times0.3=0.1$

(D) $0.6\times0.\overline{6}$ 的值可以寫成有限小數

(E) $0.\overline{6}\times0.\overline{6}=0.\overline{4}$

定期綜合測驗

單選題

______ 1. 已知正整數 n 滿足 $n(\sqrt{13}-\sqrt{12})>1$，則 n 的最小值為何？
(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　(E) 9

______ 2. 已知 $x+y=3$，$x^3+y^3=10$，則 xy 的值為何？
(A) 17　(B) 9　(C) 3　(D) $\dfrac{17}{3}$　(E) $\dfrac{17}{9}$

多選題

______ 3. 設 $a=0.\overline{321}-0.\overline{21}$，試問下列選項哪些正確？
(A) a 是有限小數
(B) a 是有理數
(C)在數線上不存在某一個點的坐標為 a
(D) a 在小數點後第 15 位的數字為 0
(E) a 在小數點後第 17 位的數字為 0

______ 4. 小昱解方程式 $x=5+\dfrac{1}{x}$ 時，將等號右式中分母的 x，以 $x=5+\dfrac{1}{x}$ 的式子代換，得到 $x=5+\dfrac{1}{\boxed{5+\dfrac{1}{x}}}$，之後重複迭代，得 $x=5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}$。若將 $x=5+\dfrac{1}{x}$ 移項成 $\dfrac{1}{x}=-5+x$，倒數得 $x=\dfrac{1}{-5+x}$，仿上述的方法，可得 $x=\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}}$。試選出正確的選項。

(A) $x=5+\dfrac{1}{x}$ 恰有兩根 $5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}$ 和 $\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}}$

(B) $x=5+\dfrac{1}{x}$ 所有相異根的和為 5

(C) $5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}$ 是有理數

(D) $5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}<\dfrac{26}{5}$

(E) $\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}}<-\dfrac{1}{5}$

∷ 填充題

5. 已知 $\sqrt{3601+n}$ 為有理數，則最小的正整數 n 為________。

6. 設 a_n 表示 $\dfrac{2}{21}$ 化成小數後，小數點後第 n 位數的數字，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=$________。

7. 設直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，$\overline{CD}$ 為斜邊 $\overline{AB}$ 上的高，已知 $\overline{AD}=1$，$\overline{BD}=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$，則三角形 ABC 的面積為__________。

8. 已知直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，且 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 長為整數，$0<\overline{BC}$ 長 <1，且分別以 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 為邊的正方形面積和為 40，則此三角形的面積為__________。

9. 已知 a、$b>0$，在坐標平面上，設 $O(0,0)$、$A(a,0)$、$B(0,b)$、$C(0,b+6)$、$D(a+2,0)$，已知三角形 OAB 的面積為 24，則四邊形 $ABCD$ 的面積最小為________。

10. 平面上兩點 A、B 之距離為 5，以 A 為圓心作一半徑為 r（$0<r<5$）的圓 Γ，過 B 作圓 Γ 的切線，切點（之一）為 P。當 r 變動時，ΔPAB 的面積最大可能值為________。

24% 答對率 107 年學測

歷屆試題典藏

1. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A、B，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？______
(A) 8 小時　(B) 10 小時　(C) 12 小時　(D) 15 小時　(E) 20 小時
54% 答對率　105 年學測

2. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。______
(A) $|x|+|x-5|=1$　(B) $|x|+|x-5|=6$　(C) $|x|-|x-5|=1$
(D) $|x|-|x-5|=6$　(E) $|x|-|x-5|=-1$
30% 全對率　105 年學測

3. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數（*Fermat Number*）定義為 $F_n=2^{(2^n)}+1$，例如 $F_1=2^{(2^1)}+1=2^2+1=5$，$F_2=2^{(2^2)}+1=2^4+1=17$。試問 $\dfrac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？（$\log 2\approx 0.3010$）______
(A) 120　(B) 240　(C) 600　(D) 900　(E) 1200
56% 答對率　108 年指考甲

4. 已知正整數 a 與正整數 b 的乘積是 11 位數，而 a 除以 b 的商之整數部分是 2 位數，則 a 可能為幾位數？______
(A) 5 位數　(B) 6 位數　(C) 7 位數　(D) 8 位數　(E) 9 位數
39% 全對率　108 年指考乙

5. 試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於 3？______
(A) 1 個　(B) 4 個　(C) 6 個　(D) 8 個　(E) 10 個
68% 答對率　109 年學測

6. 將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times 10^n$，其中 $1\le a<10$，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m，則數對 $(m,n)=$ ______。（$\log 7\approx 0.8451$）
26% 答對率　110 年學測

7. 數線上有原點 O 及三點 $A(-2)$、$B(10)$、$C(x)$，其中 x 為實數。已知線段 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{OB}$ 長度大小關係為 $\overline{BC}<\overline{AC}<\overline{OB}$，則 x 的最大範圍為 ______。
58% 答對率　110 年指考乙

8. 設整數 n 滿足 $|5n-21|\ge 7|n|$。試選出正確的選項。______
(A) $|5n-7n|\ge 21$　(B) $-1\le \dfrac{7n}{5n-21}\le 1$　(C) $7n\le 5n-21$
(D) $(5n-21)^2\ge 49n^2$　(E)滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個
111 年學測 A

9. 試問有多少個整數 x 滿足 $2|x|+x<10$？______
(A) 13 個　(B) 14 個　(C) 15 個　(D) 16 個　(E)無窮多個
111 年學測 B

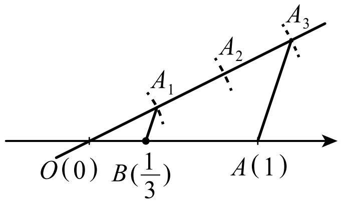
10. 若 x、y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}}y^2=1$ 及 $2\log y=1$，則 $\dfrac{x-y^2}{10}=$ ______。
111 年學測 B

1 數與式

1-1 實數

1 **• 有理數**

1.



2 *2.* (A)(C)

• 無理數

2. 2；直線 $AA_2 \perp$ 數線；$\sqrt{3}$；$\sqrt{5}$

3 **範例** *1.* 6　*2.* (A)(B)(D)

3. (1)(A)(C)(D)(E)　(2) 4, 20, 25, 50, 100

1. $\frac{31}{13} = 2.\overline{384615}$，有 6 位循環節

$100 = 6 \times 16 + 4$

∴小數點後第 100 位數與小數點後第 4 位數相同，其數值為 6

2. 選項中的數都是最簡分數，只需考慮分母，若分母的數其質因數只有 2 或 5，則此分數可寫成有限小數

(A)分母 $25 = 5^2$　(B)分母 $250 = 2 \times 5^3$

(C)分母 $225 = 3^2 \times 5^2$　(D)分母 $512 = 2^9$

(E)分母 $196 = 2^2 \times 7^2$

故選項(A)(B)(D)的分數可寫成有限小數

3. (1)(A) $\frac{q}{p}$ 必可擴分成 $\frac{q'}{100}$ 的形式，才能化為小數點後只有兩位的有限小數　∴ $p \le 100$

(B) p 的質因數只能有 2 或 5，但 2 和 5 不必都是 p 的質因數，例如 $\frac{q}{p} = \frac{1}{4} = 0.25$

(C) ∵ p、q 互質且 2 是 q 的因數

∴ 2 不是 p 的因數，但 p 的質因數只能有 2、5

故 5 必為 p 的因數

(D) p 可寫成 $2^a \times 5^b$，但 a、b 只能是 0 或 1 或 2

⇒　$8 = 2^3$ 不是 p 的因數

(E) p 的質因數只能是 2 或 5，故 $9 = 3^2$ 不是 p 的因數

(2) n 的質因數只能有 2 或 5，且 $n \le 100$

考慮 n 的值可能為 2, 4, 8, 16, 32, 64 ⟵ 2^x

5, 25 ⟵ 5^y

10, 20, 40, 80 ⟵ $2^x \cdot 5$

50, 100 ⟵ $2^x \cdot 5^2$

但其中能使 $\frac{1}{n}$ 為兩位小數的 n 值只有 4, 20, 25, 50, 100

《另解》

$\frac{1}{n} = \frac{x}{100} = \frac{x}{2^2 \times 5^2}$，$x = 2^a \times 5^b$

a	0			1			2		
b	0	1	2	0	1	2	0	1	2
x	1	5	25	2	10	50	4	20	100
n	100	20	4	50	10	2	25	5	1

不合

4 **類題** **1** 65　**2** (C)　**3** 18, 32, 50, 72, 98

1 $x = 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5}} = 1 + \frac{2}{\frac{19}{5}} = 1 + \frac{10}{19} = \frac{29}{19}$

$nx = \frac{29}{19}n < 100$　∴ $n < 100 \times \frac{19}{29} = \frac{1900}{29} = 65.$多

故 n 最大為 65

2 $\frac{7 \times n}{450} = \frac{7 \times n}{2 \times 3^2 \times 5^2}$ 可寫成有限小數

∴ n 必能被 9 整除，即 n 為 9 的倍數

只能選(C)

3 $(\sqrt{n} + \sqrt{18})^2 = n + 18 + 2\sqrt{18n} = n + 18 + 6\sqrt{2n} \in Q$

∴ $2n$ 為完全平方數　⇒　$n = 2m^2$

又 n 為兩位數且 $m \in Z$

∴ n 可能為 $2 \times 3^2 = 18$ 或 $2 \times 4^2 = 32$ 或 $2 \times 5^2 = 50$ 或 $2 \times 6^2 = 72$ 或 $2 \times 7^2 = 98$

範例 *4.* $\frac{9}{11}$　*5.* (1) $\frac{16}{33}$　(2) $\frac{22}{45}$

4. 設此有理數為 $\frac{20-n}{n}$，則 $\frac{8}{10} < \frac{20-n}{n} < \frac{9}{10}$

$\Rightarrow \begin{cases} 8n < 200 - 10n \\ 200 - 10n < 9n \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{19} < n < \frac{100}{9}$

又 n 為正整數　∴ $n = 11$，故此有理數為 $\frac{9}{11}$

5. (1)設 $x = 0.\overline{48} = 0.484848\cdots$ ⋯ ①

則 $100x = 48.\overline{48} = 48.484848\cdots$ ⋯ ②

②−①得 $99x = 48$　∴ $x = \frac{48}{99} = \frac{16}{33}$，即 $0.\overline{48} = \frac{16}{33}$

(2)設 $x = 0.4\overline{8} = 0.488888\cdots$ ⋯ ①

則 $10x = 4.\overline{8} = 4.888888\cdots$ ⋯ ②

②−①得 $9x = 4.4 = \frac{22}{5}$　∴ $x = \frac{22}{45}$，即 $0.4\overline{8} = \frac{22}{45}$

5 **類題** **4** $\frac{11}{19}$　**5** (A)(C)(D)　**6** (1) $\frac{3}{8}$　(2) $\frac{125}{333}$　(3) $\frac{62}{165}$

7 (B)(C)(D)(E)

4 $\frac{1}{2} < \frac{n}{m} = \frac{30-m}{m} < \frac{2}{3}$　⇒　$\begin{cases} m < 60 - 2m \\ 90 - 3m < 2m \end{cases}$

⇒　$18 < m < 20$，又 $m \in N$　∴ $m = 19$，故 $\frac{n}{m} = \frac{11}{19}$

5 (A) $2 \times 0.\overline{4} = 2 \times 0.444\cdots = 0.888\cdots = 0.\overline{8}$

(B) $0.\overline{16} = 0.161616\cdots = 2 \times 0.080808\cdots = 2 \times 0.\overline{08}$

(C)乘以 2 或 5 的冪次不影響循環節

(D) b 為有限小數

∴ b 寫成分數時分母的質因數只有 2 或 5

$\frac{3}{8}b$ 的分母的質因數也只有 2 或 5

$\therefore \frac{3}{8}b$ 為有限小數

(E)不一定。例如 $c=\frac{1}{8}$ 時，$\frac{8}{3}c=\frac{1}{3}=0.\overline{3}$ 為循環小數

6 (1) $0.375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$

(2)設 $x=0.\overline{375}=0.375375375\cdots$ ⋯ ①

則 $1000x=375.\overline{375}=375.375375375\cdots$ ⋯ ②

②－①得 $999x=375 \quad \therefore x=\frac{375}{999}=\frac{125}{333}$

(3)設 $x=0.3\overline{75}=0.3757575\cdots$ ⋯ ①

則 $100x=37.5757575\cdots$ ⋯ ②

②－①得 $99x=37.2=\frac{186}{5} \quad \therefore x=\frac{186}{495}=\frac{62}{165}$

7 (A)設 $x=0.4\overline{9}=0.49999\cdots$ ⋯ ①

則 $10x=4.99999\cdots$ ⋯ ②

②－①得 $9x=4.5=\frac{9}{2} \quad \therefore x=\frac{1}{2}=0.5$

即 $0.4\overline{9}=0.5$

(B) $0.\overline{10}+0.\overline{01}=0.101010\cdots+0.010101\cdots$

$=0.111111\cdots=0.\overline{1}=\frac{1}{9}$

(C) $0.\overline{3}=\frac{1}{3} \quad \therefore 0.\overline{3}\times 0.3=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}=0.1$

(D) $0.\overline{6}=\frac{2}{3} \quad \therefore 0.6\times 0.\overline{6}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}=0.4$ 為有限小數

(E) $0.\overline{6}\times 0.\overline{6}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=0.\overline{4}$

6 範例 6. (A)(B)(E) 7. (A)(B)(D)(E) 8. (B)(C)(E)

6. (A)由有理數的封閉性知「a、$b\in Q \Rightarrow a+b\in Q$ 且 $a\times b\in Q$」

(B)若 $a+c\in Q$，又 $a\in Q$，則由有理數的封閉性知 $c=(a+c)-a\in Q$（矛盾），故 $a+c\notin Q$

若 $a\times c\in Q$，又 $a\in Q$，則由有理數的封閉性知 $c=\frac{a\times c}{a}\in Q$（矛盾），故 $a\times c\notin Q$

(C)不一定。反例：$c=\sqrt{2}+1$，$d=1-\sqrt{2}$ 均為無理數，但 $c+d=2$ 為有理數

(D)不一定。反例：$c=\sqrt{2}$，$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 均為無理數，但 $c\times d=1$ 為有理數

(E)① $\frac{a+b}{2}$ 介於 a、b 之間，為有理數

②若 $c+d$ 為無理數，則 $\frac{c+d}{2}$ 為無理數且介於 c、d 之間；若 $c+d$ 為有理數，則 $\frac{1}{2}(\frac{c+d}{2}+c)$ 為無理數且介於 c、d 之間

7. 設 $a\times b=x\in Q$，$c+d=y\notin Q$

(A)例如 $a=x^2\in Q$，$b=\frac{1}{x}\in Q$

(B)例如 $a=\sqrt{2}x^2$，$b=\frac{1}{\sqrt{2}x}$ 均為無理數

(C)若 $a\in Q$，則由有理數的封閉性知 $b=\frac{a\times b}{a}\in Q$

(D)例如 $c=\frac{y-1}{2}\notin Q$，$d=\frac{y+1}{2}\notin Q$

(E)例如 $c=1\in Q$，$d=y-1\notin Q$

8. (A)不一定。例如 $a=2+3\sqrt{2}$，$b=0$

則 $3a+2b=6+9\sqrt{2}$

(B)若 a、$b\in Q$，則 $a+b\sqrt{2}=2+3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad a-2=(3-b)\sqrt{2} \quad \therefore a=2$，$b=3$

（若 $b\neq 3$，則 $\sqrt{2}=\frac{a-2}{3-b}\in Q$，矛盾）

故 $a-b\sqrt{2}=2-3\sqrt{2}$

(C)若 $a+b\in Q$，$a-b\in Q$

則 $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\in Q$，$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}\in Q$

由(B)的推論知，$a-b\sqrt{2}=2-3\sqrt{2}$

(D)不一定。反例：$a=1$，則 $b=\frac{1+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6+\sqrt{2}}{2}\notin Q$

(E) $b=\frac{2-a+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6+(2-a)\sqrt{2}}{2}$

∵可由尺規作圖描出 a 的位置

∴可描出 $2-a$ 的位置

可以尺規作圖畫出以 $|2-a|$ 為股的等腰直角三角形，其斜邊長即為 $|2-a|\cdot\sqrt{2}$，故可在數線上找到 $(2-a)\sqrt{2}$，再以尺規作圖可找到 6 和 $(2-a)\sqrt{2}$ 的中點，即為 b 的位置

7 類題 **8** (A)(B)(C)(D) **9** (A)(B)(D) **10** $(2,-2)$ **11** (D)(E)

8 (A)圓周長與直徑的比值為圓周率 π，為無理數

(B)若邊長 a 為有理數，則面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 為無理數（矛盾），故邊長 a 為無理數

(C)(D)正確

(E)例如 $\sqrt{2}$ 為無理數，但 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 為有理數

∴無理數運算並無封閉性

9 (A)若 $b\neq 0$，則 $\sqrt{3}=-\frac{a}{b}$，又 a、$b\in Q$

$\therefore \sqrt{3}=-\frac{a}{b}\in Q$（矛盾），故 $b=0$

代回 $a+b\sqrt{3}=0$，可得 $a=0$

(B)設 $\begin{cases} 4a-3b=p\in Q \cdots ① \\ 9a+2b=q\in Q \cdots ② \end{cases}$

可解得 $a=\frac{2p+3q}{35}$，$b=\frac{-9p+4q}{35}$

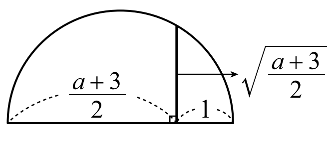
由有理數的封閉性可知，a 和 b 都是有理數

(C)不一定。反例：$a=b=\sqrt{2}\notin Q$

但 $a\times b=2$，$\frac{b}{a}=1$ 均為有理數

(D)∵ a 為有理數

∴可用尺規作圖畫出 a 的位置，也可畫出 $\frac{a+3}{2}$ 的位置，則



定期綜合測驗

1. (D)	2. (E)	3. (B)(E)	4. (A)(B)(D)
5. 120	6. 90	7. $3\sqrt{2}-4$	8. $\dfrac{76-7\sqrt{22}}{18}$
9. 30	10. $\dfrac{25}{4}$		

16 1. $n(\sqrt{13}-\sqrt{12})>1$

$\Rightarrow\quad n>\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{12}}{(\sqrt{13}-\sqrt{12})(\sqrt{13}+\sqrt{12})}$

$=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{12}}{13-12}=\sqrt{13}+\sqrt{12}$

$25+2\times 12<(\sqrt{13}+\sqrt{12})^2=25+2\sqrt{13\times 12}<25+2\times 13$

$\Rightarrow\quad 49<(\sqrt{13}+\sqrt{12})^2<51$

$\therefore\ n>\sqrt{13}+\sqrt{12}=7.$多 $\quad\therefore\ n$ 的最小值為 8

2. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$

$10=3(3^2-3xy)=27-9xy\quad\therefore\ xy=\dfrac{17}{9}$

3. (A) $a=0.\overline{321}-0.\overline{21}=0.\overline{321321}-0.\overline{212121}=0.\overline{109200}$ 為無限循環小數

(B)循環小數為有理數

(C) $a\in R$，故實數線上必存在一點坐標為 a

(D)循環節 6 位，$15=2\times 6+3$，故小數點後第 15 位的值與第 3 位相同，為 9

(E)循環節 6 位，$17=2\times 6+5$，故小數點後第 17 位的值與第 5 位相同，為 0

4. (A) $x=5+\dfrac{1}{x}\quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x-1=0$，判別式 >0，故恰有兩根

(B) $\left(5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}\right)+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}}=5$

(C) $x=5+\dfrac{1}{x}\quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x-1=0\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

故 $5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ 為無理數

(D) $\because\ 5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}>5$

$\therefore\ 5+\cfrac{1}{\left(5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}\right)}<5+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$

(E) $\because\ -5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}<-5$

$\therefore\ \cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}}>\dfrac{1}{-5}$

【說明】$5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}$ 和 $\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cfrac{1}{-5+\cdots}}}$ 稱為連分數或繁分數，有限層的連分數為有理數，但無限層的連分數不一定是有理數

17 5. $\sqrt{3601+n}>\sqrt{3600}=60$，又 $\sqrt{3601+n}\in Q$

$\therefore\ 3601+n$ 為完全平方數

故當 $3601+n=61^2=3721$ 時

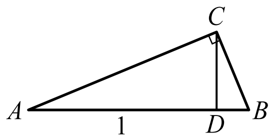
即 $n=120$ 時，$\sqrt{3601+n}=61$

6. $\dfrac{2}{21}=0.0952380952380\cdots=0.\overline{095238}$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$=3\times(0+9+5+2+3+8)+0+9=90$

7. $\overline{BD}=\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$a>b$



$\Rightarrow\quad a+b-2\sqrt{ab}=17-2\sqrt{72}$

$\begin{cases}a+b=17\\ ab=72\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a=9，b=8$

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$

由母子相似性質

$\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}=1\times(3-2\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$，$x>y$

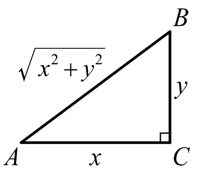
$\Rightarrow\quad x+y-2\sqrt{xy}=3-2\sqrt{2}$

$\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=2，y=1\quad\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{2}-1$

故 ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}(4-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$

$=3\sqrt{2}-4$

8. 設 $\overline{AC}=x$，$\overline{BC}=y$



則 $\overline{AB}=\sqrt{x^2+y^2}$

由題意知，$0<y<1$

且 $y^2+x^2+y^2=40$

$\Rightarrow\quad 38<x^2<40\quad\therefore\ x=6.$多

又 $x+y\in N\quad\therefore\ y=7-x$，代入 $x^2+2y^2=40$

$\Rightarrow\quad x^2+2(7-x)^2=40$

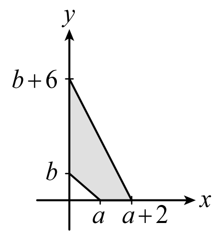
$\Rightarrow\quad x=\dfrac{14\pm\sqrt{22}}{3}$（$\because\ x=6.$多 $\quad\therefore\ \dfrac{14-\sqrt{22}}{3}$ 不合）

$y=7-x=\dfrac{7-\sqrt{22}}{3}$

$\therefore\ \Delta ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{14+\sqrt{22}}{3}\times\dfrac{7-\sqrt{22}}{3}$

$=\dfrac{76-7\sqrt{22}}{18}$

9. ΔOAB 面積 $=\dfrac{1}{2}ab=24$



$\Rightarrow\quad ab=48$

四邊形 $ABCD$ 面積

$=\dfrac{1}{2}(a+2)(b+6)-\dfrac{1}{2}ab$

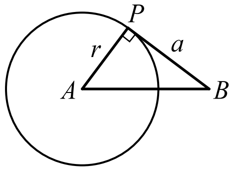
$=3a+b+6$

由算幾不等式知 $\dfrac{3a+b}{2}\geq\sqrt{3ab}=\sqrt{144}=12$

$\Rightarrow\quad 3a+b\geq 24$

$\therefore$ 當 $3a=b=12$ 時，即 $a=4$，$b=12$ 時，$3a+b$ 有最小值 24，故四邊形 $ABCD$ 面積最小為 30

10. 設 $\overline{BP}=a$



$\because$ $\overline{BP}$ 為圓 Γ 的切線

$\therefore$ $\angle APB=90^\circ$

且 $\overline{AB}^2=a^2+r^2=25$

由算幾不等式知

$\dfrac{a^2+r^2}{2}\ge\sqrt{a^2r^2}=|ar|=ar \quad\Rightarrow\quad ar\le\dfrac{25}{2}$

故當 $a^2=r^2=\dfrac{25}{2}$ 時，即 $a=r=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ 時

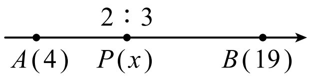
ΔPAB 面積 $=\dfrac{1}{2}ar$ 有最大值 $\dfrac{25}{4}$

1-2 分點公式與絕對值

18 **範例** *1*. 10　*2*. -2 或 -14　*3*. 290

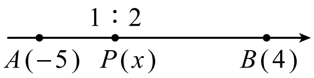
1. 設 $P(x)$　$\because$ $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$ 且 $P\in\overline{AB}$

由分點公式



$x=\dfrac{3\times4+2\times19}{5}=10$

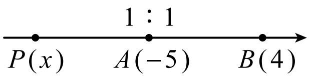
2. 設 $P(x)$，若 $P\in\overline{AB}$



則由分點公式可得

$x=\dfrac{2\times(-5)+1\times4}{3}=-2$

若 $P\notin\overline{AB}$

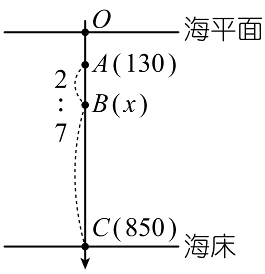


$\because$ $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$

$\therefore$ P 在 A 的左側且 $\overline{PA}:\overline{AB}=1:1$

故 $\dfrac{x+4}{2}=-5 \quad\Rightarrow\quad x=-14$

3. 設魚群在海面下 x 公尺，且潛艇位置為 A，魚群位置為 B，海底位置為 C



則 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:9$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}:\overline{BC}=2:7$

由分點公式知

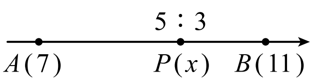
$x=\dfrac{7\times130+2\times850}{9}=290$

故魚群約在海面下 290 公尺

19 **類題** **1** (1) $\dfrac{19}{2}$　(2) 17　**2** 29　**3** $\dfrac{33}{10}$ 或 $\dfrac{51}{4}$

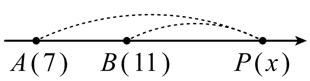
4 (1) 9：31　(2) 10：25

1 (1)設 $P(x)$，由分點公式



$x=\dfrac{3\times7+5\times11}{8}=\dfrac{19}{2}$

(2)設 $P(x)$，$B\in\overline{AP}$ 且



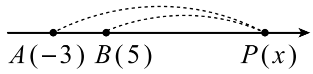
$\overline{PA}:\overline{PB}=5:3$

$\therefore$ $\overline{AB}:\overline{BP}=2:3$

由分點公式，$11=\dfrac{3\times7+2\cdot x}{5} \quad\Rightarrow\quad x=17$

2 $\because$ $B\in\overline{AP}$ 且 $\overline{PA}:\overline{PB}=4:3$

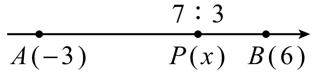
$\therefore$ $\overline{AB}:\overline{BP}=1:3$



由分點公式

$5=\dfrac{3\times(-3)+1\cdot x}{4} \quad\Rightarrow\quad x=29$

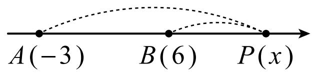
3 設 $P(x)$，若 $P\in\overline{AB}$



則由分點公式可得

$x=\dfrac{3\times(-3)+7\times6}{10}=\dfrac{33}{10}$

若 $P\notin\overline{AB}$



$\because$ $\overline{PA}:\overline{PB}=7:3$

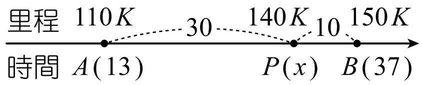
$\therefore$ P 在 B 的右側且 $\overline{AB}:\overline{BP}=4:3$

由分點公式，$6=\dfrac{3\times(-3)+4\cdot x}{7} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{51}{4}$

4 設 9 點整為時間軸上的坐標原點 $O(0)$，1 分鐘為 1 單位長，9：13 為時間軸上的坐標 $A(13)$，9：37 為時間軸上的坐標 $B(37)$

$\because$ 車速為等速行駛，所以由里程位置可判斷時間軸上的間距比

(1)設時間軸上 $P(x)$ 時，通過銅鑼交流道

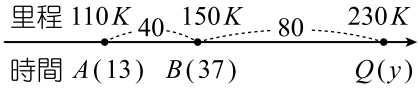


$\overline{AP}:\overline{PB}=140-110:150-140=3:1$

由分點公式知 $x=\dfrac{1\times13+3\times37}{4}=31$

即經過銅鑼交流道的時間為 9：31

(2)設時間軸上 $Q(y)$ 時，抵達西螺交流道



$\overline{AB}:\overline{BQ}=150-110:230-150=1:2$

由分點公式知 $37=\dfrac{2\times13+1\cdot y}{3} \quad\Rightarrow\quad y=85$

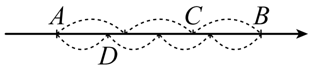
即 9 點整之後 85 分鐘，即 10：25 時抵達西螺交流道

20 **範例** *4*. $\dfrac{a+2b}{3}>\dfrac{3a+b}{4}$　*5*. (A)(B)(C)

4. 在數線上，設 $A(a)$、$B(b)$、$C(\dfrac{a+2b}{3})$、$D(\dfrac{3a+b}{4})$

由分點公式知，C、D 都在 A、B 之間

且 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$，$\overline{AD}:\overline{BD}=1:3$，由圖形判斷



，可知 $\dfrac{a+2b}{3}>\dfrac{3a+b}{4}$

《另解》

兩式相減

$\dfrac{a+2b}{3}-\dfrac{3a+b}{4}=\dfrac{(4a+8b)-(9a+3b)}{12}=\dfrac{-5a+5b}{12}>0$

$(\because\ a<b)$，故 $\dfrac{a+2b}{3}>\dfrac{3a+b}{4}$

5. 設 $A(a)$、$P(\sqrt{17})$、$B(\dfrac{2a+3\sqrt{17}}{5})$、$C(\dfrac{2a+3\sqrt{17}}{4})$

(A)由分點公式知，B 在 A、P 之間，且 $\overline{AB}:\overline{PB}=3:2$

又 $a<\sqrt{17}$　$\therefore a<b<\sqrt{17}$

$\therefore \dfrac{1}{k}-\dfrac{6}{k}=2 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{5}{k}=2 \quad \therefore k=-\dfrac{5}{2}$

10. ⑴ 2000 萬 $\times(1+r)^{20}=2828$ 萬 $\approx 2000\sqrt{2}$ 萬

$\therefore (1+r)^{20}=\sqrt{2}$

⑵ 設議員人數調整至 y 人，且滿足 $y=k\cdot x^{\frac{1}{3}}$

20 年前，$200=k(2000\text{萬})^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad k=\dfrac{200}{(2000\text{萬})^{\frac{1}{3}}}$

今年，$y=k(2828\text{萬})^{\frac{1}{3}}\approx k(2000\sqrt{2}\text{ 萬})^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{200}{(2000\text{萬})^{\frac{1}{3}}}\times(2000\sqrt{2}\text{ 萬})^{\frac{1}{3}}$

$=200\cdot(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=200\cdot 2^{\frac{1}{6}}\approx 200\times 1.122=224.4$

故調整至 224 人較為合理

歷屆試題典藏

1. (A)	2. (B)(C)(E)	3. (E)	4. (B)(C)
5. (C)	6. $(2,56)$	7. $4<x<8$	8. (B)(D)
9. (A)	10. 99		

49 1. 設開始時，A 質量為 a，B 質量為 $\dfrac{1}{2}a$

時間	0	7.5	7.5×2	$\cdots$	7.5×16
A 質量	a	$\dfrac{1}{2}a$	$\dfrac{1}{2^2}\times a$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2^{16}}\times a$

設 B 的半衰期為 t 小時

時間	0	t	$2t$	$3t$	$\cdots$	kt
B 質量	$\dfrac{1}{2}a$	$\dfrac{1}{2^2}a$	$\dfrac{1}{2^3}a$	$\dfrac{1}{2^4}a$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2^{k+1}}a$

若 $kt=120$（小時）

則 $\dfrac{1}{2^{k+1}}a=\dfrac{1}{2^{16}}a \quad \therefore k=15$，即 $15t=120 \quad \Rightarrow \quad t=8$

2. (A)(B) $|x|+|x-5|$ 表示數線上 x 和 0 的距離加上 x 和 5 的距離和，當 $x\in[0,5]$ 時，$|x|+|x-5|=5$

當 $x\in(-\infty,0)\cup(5,\infty)$ 時，$|x|+|x-5|>5$

(C)(D)(E) $|x|-|x-5|$ 表示數線上 x 和 0 的距離減去 x 和 5 的距離之差，$-5\le|x|-|x-5|\le 5$

例如 $x=3$ 時，$|x|-|x-5|=1$

$x=2$ 時，$|x|-|x-5|=-1$

$x=-2$ 時，$|x|-|x-5|=-5$

3. $\dfrac{F_{13}}{F_{12}}\approx\dfrac{2^{(2^{13})}}{2^{(2^{12})}}=2^{(2^{13}-2^{12})}=2^{(2^{12})}=(10^{\log 2})^{(2^{12})}=10^{2^{12}\cdot\log 2}$

$2^{12}\cdot\log 2\approx 4096\times 0.3010=1232.896$

$10^{1232}<\dfrac{F_{13}}{F_{12}}\approx 10^{1232.896}<10^{1233}$

$\therefore \dfrac{F_{13}}{F_{12}}$ 整數部分為 1233 位數

4. $a\times b$ 是 11 位數 $\quad\Rightarrow\quad 10^{10}\le ab<10^{11}$

$\dfrac{a}{b}$ 整數部分是 2 位數 $\quad\Rightarrow\quad 10\le\dfrac{a}{b}<10^2$

$\therefore 10^{10}\times 10\le ab\times\dfrac{a}{b}<10^{11}\times 10^2 \quad\Rightarrow\quad 10^{11}\le a^2<10^{13}$

$\therefore 10^{5.5}\le a<10^{6.5}$，故 a 可能是 6 位數或 7 位數

5. 題意即滿足 $\begin{cases}|x-\sqrt{101}|<5\\|x-\sqrt{38}|>3\end{cases}$ 的整數 x 的個數

$\begin{cases}\sqrt{101}-5<x<\sqrt{101}+5\\x<\sqrt{38}-3\text{ 或 }x>\sqrt{38}+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{38}+3<x<\sqrt{101}+5$

則整數 x 可為 10、11、12、13、14、15，共 6 個

6. $(\sqrt[3]{49})^{100}=(7^{\frac{2}{3}})^{100}=7^{\frac{200}{3}}=(10^{\log 7})^{\frac{200}{3}}\approx 10^{0.8451\times\frac{200}{3}}$

$=10^{56.34}=10^{0.34}\times 10^{56}$

$\because (\sqrt[3]{49})^{100}=a\times 10^n$

$\therefore n=56$，$a\approx 10^{0.34} \quad\Rightarrow\quad \log a\approx 0.34$

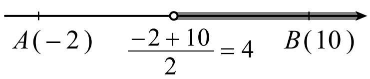
又 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$

$\therefore \log 2<\log a<\log 3 \quad\Rightarrow\quad 2<a<3 \quad\Rightarrow\quad m=2$

7. $\overline{BC}=|x-10|$，$\overline{AC}=|x+2|$，$\overline{OB}=10$

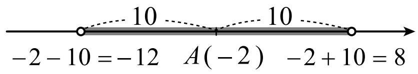
① $\overline{BC}<\overline{AC}$：$C$ 點與 B 點距離較近，與 A 點距離較遠

$\therefore x>4$



② $\overline{AC}<\overline{OB}$：$C$ 點到 $A(-2)$ 的距離 <10

$\therefore -12<x<8$



①②取交集，故 $4<x<8$

8. (A)反例：$n=0$ 時，$|5n-21|=21>7|n|=0$

但 $|5n-7n|=0<21$

(B)同除以 $|5n-21|$ 得 $\dfrac{7|n|}{|5n-21|}\le 1 \quad \therefore -1\le\dfrac{7n}{5n-21}\le 1$

(C)不一定。反例：如 $n=0$ 時，$|5n-21|\ge 7|n|$

但 $7n>5n-21$

(D) $(|5n-21|)^2\ge(7|n|)^2 \quad\Rightarrow\quad (5n-21)^2\ge 49n^2$

(E)由(D)，$25n^2-210n+441\ge 49n^2$

$\Rightarrow \quad 24n^2+210n-441\le 0$

$\Rightarrow \quad 3(4n-7)(2n+21)\le 0$

$\therefore -\dfrac{21}{2}\le n\le\dfrac{7}{4} \quad \therefore n=-10,-9,\cdots,1$，共 12 個

9. 當 $x\ge 0$ 時，$2|x|+x=3x<10 \quad \therefore x=0,1,2,3$

當 $x<0$ 時，$2|x|+x=-2x+x=-x<10 \quad\Rightarrow\quad x>-10$

$\therefore x=-9,-8,-7,\cdots,-2,-1$，共有 $4+9=13$ 個

10. $2\log y=1 \quad\Rightarrow\quad \log y=\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y=10^{\frac{1}{2}}$

$\therefore y^2=(10^{\frac{1}{2}})^2=10$，$x^{\frac{-1}{3}}\cdot y^2=1 \quad\Rightarrow\quad x^{\frac{-1}{3}}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore x=(x^{\frac{-1}{3}})^{-3}=(\dfrac{1}{10})^{-3}=10^3=1000$

$\therefore \dfrac{x-y^2}{10}=\dfrac{1000-10}{10}=\dfrac{990}{10}=99$

核心思考
高中數學

第 1 冊
課後練習本

班級：＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿　座號：＿＿＿＿

1. 將 $\frac{5}{14}$ 寫成小數後，小數點後第 100 位數為何？______

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) 5

2. 下列哪些數可以寫成有限小數？__________

(A) $\frac{13}{128}$　(B) $\frac{49}{150}$　(C) $\frac{9}{1250}$　(D) $\frac{64}{75}$　(E) $\frac{91}{80}$

3. 有一個有理數，若以最簡分數表示時，分子和分母的和為 16，且其值大於 1 且小於 2，試寫出滿足此條件的最簡分數。______

4. 將下列小數化為最簡分數。

(1) $0.\overline{63} =$ ______　(2) $0.5\overline{6} =$ ______　(3) $0.\overline{4} + 0.\overline{6} =$ ______。

5. 滿足 $\frac{4}{11} < \frac{n}{12} < \frac{9}{13}$ 的正整數 n 共有幾個？______

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　(E) 7

6. 試問下列選項哪些正確？________

(A)若 a 為非零的有理數，則 $\sqrt{a}$ 為無理數　(B)若 a 為無理數，則 a^2 為有理數

(C)若 a^2 和 a^3 都是有理數，則 a 為有理數　(D)若 a^2 和 a^4 都是有理數，則 a 為有理數

(E)若 a^3 和 a^5 都是有理數，則 a 為有理數

7. 已知 $a+\sqrt{3}=1+b\sqrt{3}$，試問下列選項哪些正確？______

(A)若 a 為有理數，則 $b=1$　(B)若 b 為有理數，則 $a=1$

(C)若 a 為無理數，則 b 為無理數　(D)若 a 為無理數，則 $b\neq 1$

(E)若 $a\neq 1$，則 b 必為無理數

8. 已知 x 和 y 為有理數，且 $(3-4\sqrt{5})x-3(\sqrt{5}-2)=9-\sqrt{5}y$，則數對 $(x,y)=$ __________ 。

9. 已知 x 和 y 為有理數，且 $\dfrac{x+\sqrt{2}}{y-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，則數對 $(x,y)=$ ____________ 。

10. 已知 a、b 和 $\dfrac{a+\sqrt{2}}{b-\sqrt{2}}$ 都是有理數，則在坐標平面上，點 (a,b) 在下列哪條直線上？______

(A) $x+y=0$　(B) $x-y=0$　(C) $x+2y=0$　(D) $x-2y=0$　(E) $x-\sqrt{2}y=0$

1. 已知 $0 < x < 1$ 且 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$，則 $x - \frac{1}{x} =$ ______ 。

2. 計算 $\sqrt{167\frac{1}{169}} + \sqrt{171\frac{1}{169}} =$ ______ 。

3. 直角三角形 ABC 中，$\angle B = 90^\circ$，$\overline{AB} = \frac{1}{7}$，$\overline{AC} = 7\frac{1}{7}$，則 $\overline{BC}$ 長為多少？______
(A) $\sqrt{47}$　(B) $\sqrt{48}$　(C) 7　(D) $\sqrt{50}$　(E) $\sqrt{51}$

4. 設 $a = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$，$n$ 為自然數，且 $na > 6$，則 n 的最小值為 ______ 。

5. 已知 $5 + 2\sqrt{10}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $a \times b =$ ______ 。

6. 化簡 $\sqrt{3 - \sqrt{5}} =$ ______ 。

課後練習本

第 1 回

1. (A)　2. (A)(C)(E)　3. $\frac{9}{7}$　4. (1) $\frac{7}{11}$　(2) $\frac{17}{30}$　(3) $\frac{10}{9}$
5. (B)　6. (C)(E)　7. (D)　8. $(1,7)$　9. $(-2,1)$
10. (A)

1 1. $\frac{5}{14}=0.3\overline{571428}$，有 6 位循環節
$100=1+6\times16+3$
∴小數點後第 100 位的數值與第 4 位相同，為 1

2. 選項中的數都是最簡分數，考慮分母的質因數
(A) $128=2^7$　(B) $150=2\times3\times5^2$　(C) $1250=2\times5^4$
(D) $75=3\times5^2$　(E) $80=2^4\times5$
其中(A)(C)(E)分母的質因數只有 2 和 5，故可寫成有限小數

3. 設此最簡分數為 $\frac{16-n}{n}$，則 $1<\frac{16-n}{n}<2$
$\Rightarrow \begin{cases} n<16-n \\ 16-n<2n \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{3}<n<8$
故滿足的整數 $n=6$ 或 7
但 $n=6$ 時，$\frac{16-n}{n}=\frac{10}{6}$ 不是最簡分數
∴ $n=7$ 時，最簡分數 $\frac{16-n}{n}=\frac{9}{7}$

4. (1) 設 $x=0.\overline{63}=0.636363\cdots$ ⋯①
$100x=63.\overline{63}=63.636363\cdots$ ⋯②
②−①得 $99x=63$
∴ $x=\frac{63}{99}=\frac{7}{11}$，即 $0.\overline{63}=\frac{7}{11}$
(2) 設 $x=0.5\overline{6}=0.5666\cdots$ ⋯①
$10x=5.\overline{6}=5.6666\cdots$ ⋯②
②−①得 $9x=5.1=\frac{51}{10}$
∴ $x=\frac{51}{90}=\frac{17}{30}$，即 $0.5\overline{6}=\frac{17}{30}$
(3) 設 $x=0.\overline{4}=0.4444\cdots$ ⋯①
$10x=4.\overline{4}=4.4444\cdots$ ⋯②
②−①得 $9x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{9}$
設 $y=0.\overline{6}=0.6666\cdots$ ⋯③
$10y=6.\overline{6}=6.6666\cdots$ ⋯④
④−③得 $9y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
∴ $0.\overline{4}+0.\overline{6}=\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$

5. $\frac{4}{11}<\frac{n}{12}<\frac{9}{13} \Rightarrow \frac{48}{11}<n<\frac{108}{13}$
$\Rightarrow 4\frac{4}{11}<n<8\frac{4}{13}$，又 $n\in N$
∴ n 可能為 5 , 6 , 7 , 8，共 4 種可能

2 6. (A)不一定。若 a 為完全平方數，則 $\sqrt{a}$ 為有理數
例如 $a=4$，$\sqrt{a}=2\in Q$
(B)不一定。例如 $a=\pi$，則 $a^2=\pi^2$ 仍為無理數
(C)由有理數的封閉性知，若 $a^2\in Q$，$a^3\in Q$，則
$a=\frac{a^3}{a^2}\in Q$
(D)不一定。例如 $a=\sqrt{2}\notin Q$，但 $a^2=2$ 和 $a^4=4$ 都是有理數
(E)由有理數的封閉性知，若 $a^3\in Q$，$a^5\in Q$，則
$a^2=\frac{a^5}{a^3}\in Q$，$a=\frac{a^3}{a^2}\in Q$

7. (A)不一定。反例如 $a=2$，則 $b=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
(B)不一定。反例如 $b=2$，則 $a=1+\sqrt{3}$
(C)不一定。反例如 $a=1+\sqrt{3}$，則 $b=2\in Q$
(D) $a=1+(b-1)\sqrt{3}$
故若 a 為無理數，則 $b-1\neq0 \Rightarrow b\neq1$
(E)不一定。如(C)的反例

8. $(3-4\sqrt{5})x-3(\sqrt{5}-2)=9-\sqrt{5}y$
$\Rightarrow 3x+6-9=\sqrt{5}(4x+3-y)$，又 x、$y\in Q$
∴ $\begin{cases} 3x+6-9=0 \\ 4x+3-y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,7)$

9. $\frac{x+\sqrt{2}}{y-\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Rightarrow x+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot y-2$
$\Rightarrow (x+2)=\sqrt{2}(y-1)$，又 x、$y\in Q$
∴ $\begin{cases} x+2=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-2,1)$

10. 設 $\frac{a+\sqrt{2}}{b-\sqrt{2}}=k\in Q \Rightarrow a+\sqrt{2}=b\cdot k-k\sqrt{2}$
$\Rightarrow a-bk=(-k-1)\sqrt{2}$，又 a、b、k 均為有理數
∴ $\begin{cases} a-bk=0 \\ -k-1=0 \end{cases} \Rightarrow k=-1$　∴ $a+b=0$
故 (a,b) 滿足方程式 $x+y=0$

第 2 回

1. -4　2. 26　3. (E)　4. 8　5. $-66+22\sqrt{10}$
6. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

3 1. $(x-\frac{1}{x})^2=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-2=18-2=16$
又 $0<x<1$　∴ $x<\frac{1}{x}$，故 $x-\frac{1}{x}=-4$

2. $\sqrt{167\frac{1}{169}}=\sqrt{169-2+\frac{1}{169}}=\sqrt{13^2-2\times13\times\frac{1}{13}+\frac{1}{13^2}}$
$=\sqrt{(13-\frac{1}{13})^2}=13-\frac{1}{13}$
$\sqrt{171\frac{1}{169}}=\sqrt{169+2+\frac{1}{169}}=\sqrt{13^2+2\times13\times\frac{1}{13}+\frac{1}{13^2}}$
$=\sqrt{(13+\frac{1}{13})^2}=13+\frac{1}{13}$
∴ $\sqrt{167\frac{1}{169}}+\sqrt{171\frac{1}{169}}=(13-\frac{1}{13})+(13+\frac{1}{13})=26$

3. 由商高定理知
$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{(7\frac{1}{7})^2-(\frac{1}{7})^2}$
$=\sqrt{(7\frac{1}{7}+\frac{1}{7})(7\frac{1}{7}-\frac{1}{7})}=\sqrt{\frac{51}{7}\times7}=\sqrt{51}$

4. 設$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ $\Rightarrow$ $x+y-2\sqrt{xy}=7-2\sqrt{10}$

$\begin{cases}x+y=7\\xy=10\end{cases}$，$x$、$y$ 為正整數且 $x>y$，得 $(x,y)=(5,2)$

$\therefore$ $a=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$na=n\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})>6$ $\Rightarrow$ $n>\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

$28+8\times3<(2\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2=28+8\sqrt{10}<28+8\times4$

$\Rightarrow$ $52<n^2<60$

$\therefore$ $n>7.$多 $\therefore$ n 的最小值為 8

5. $\because$ $6<2\sqrt{10}=\sqrt{40}<7$

$\therefore$ $11<5+2\sqrt{10}<12$，故 $a=11$

$b=5+2\sqrt{10}-a=-6+2\sqrt{10}$

$\therefore$ $a\times b=-66+22\sqrt{10}$

6. $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}$，設 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\Rightarrow$ $a+b-2\sqrt{ab}=6-2\sqrt{5}$

$\begin{cases}a+b=6\\a\times b=5\end{cases}$，$a$、$b$ 為正整數且 $a>b$，得 $(a,b)=(5,1)$

$\therefore$ $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

$\therefore$ $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

第 3 回

1. $(\frac{9}{2},12)$；54　2. $(4,6)$；10　3. $(-1,\frac{8}{3})$；$\frac{2}{3}$

4. 72　5. 196

4 1. 由算幾不等式知 $\dfrac{8a+3b}{2}\geq\sqrt{8a\cdot3b}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{72}{2}\geq\sqrt{24ab}$

$\therefore$ $24ab\leq36^2$ $\Rightarrow$ $ab\leq\dfrac{36^2}{24}=54$

當 $8a=3b=36$ 時，即 $a=\dfrac{9}{2}$，$b=12$ 時

$a\times b$ 有最大值 54

2. 由算幾不等式知

$\dfrac{(a-1)+(b-3)}{2}\geq\sqrt{(a-1)(b-3)}=\sqrt{9}=3$

$\Rightarrow$ $a+b\geq10$

當 $a-1=b-3=3$ 時，即 $(a,b)=(4,6)$ 時

$a+b$ 有最小值 10

3. 由算幾不等式知

$\dfrac{6(a+2)+(3b-2)}{2}\geq\sqrt{6(a+2)(3b-2)}=\sqrt{6\times6}=6$

$\Rightarrow$ $\dfrac{6a+3b+10}{2}\geq6$ $\Rightarrow$ $2a+b\geq\dfrac{2}{3}$

當 $6(a+2)=3b-2=6$ 時，即 $(a,b)=(-1,\frac{8}{3})$ 時

$2a+b$ 有最小值 $\dfrac{2}{3}$

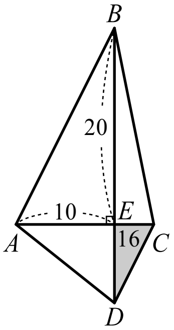
4. 設長寬分別為 x 和 y

則對角線 $=\sqrt{x^2+y^2}=12$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2=144$

由算幾不等式知 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}=|xy|=xy$

$\therefore$ $xy\leq\dfrac{144}{2}=72$，當 $x^2=y^2=72$ 時，即 $x=y=6\sqrt{2}$ 時，矩形面積最大為 72

5. 設 $\overline{CE}=x$，$\overline{DE}=y$



ΔCDE 面積 $=\dfrac{1}{2}xy=16$ $\Rightarrow$ $xy=32$

四邊形 $ABCD$ 面積

$=\Delta ABE$ 面積 $+\Delta BCE$ 面積

$+\Delta ADE$ 面積 $+\Delta CDE$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times10\times20+\dfrac{1}{2}\times x\times20+\dfrac{1}{2}\times y\times10+16$

$=10x+5y+116$

由算幾不等式知

$\dfrac{10x+5y}{2}\geq\sqrt{10x\cdot5y}=\sqrt{50xy}=40$ $\Rightarrow$ $10x+5y\geq80$

當 $10x=5y=40$ 時，即 $x=4$，$y=8$ 時，四邊形 $ABCD$ 面積最小為 $80+116=196$

第 4 回

1. 26　2. -2 或 -62　3. 32　4. (B)(E)

5. $\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{12}<\dfrac{6\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{11}$　6. (A)(C)(D)

5 1. 設 $P(x)$ $\because$ P 在 A、B 之間，且 $5\overline{PA}=2\overline{PB}$

$\Rightarrow$ $\overline{PA}:\overline{PB}=2:5$

由分點公式，$x=\dfrac{5\times32+2\times11}{7}=26$

2. 若 P 在 A、B 之間，由分點公式

$x=\dfrac{3\times(-12)+2\times13}{5}=-2$

若 P 不在 A、B 之間，由 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$ 知，A 在 P、B 之間且 $\overline{PA}:\overline{AB}=2:1$

由分點公式，$-12=\dfrac{1\cdot x+2\times13}{3}$ $\Rightarrow$ $x=-62$

3. 母子年齡差距：父母年齡差距 $=7:2$

設媽媽今年 x 歲，由分點公式知

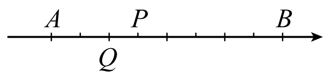
$x=\dfrac{2\times4+7\times40}{9}=32$（歲）

4. 由分點公式知，P、Q 都在 A、B 之間

且 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:5$，$\overline{QA}:\overline{QB}=1:3$

由圖形知，$y<x$

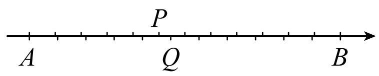
故可選(B)(E)



5. 在數線上，設 $A(\sqrt{5})$、$B(\sqrt{7})$、$P(\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{12})$、$Q(\dfrac{6\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{11})$，由分點公式知

$\overline{PA}:\overline{PB}=5:7$

$\overline{QA}:\overline{QB}=5:6$



由圖形可知 $\dfrac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{12}<\dfrac{6\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{11}$

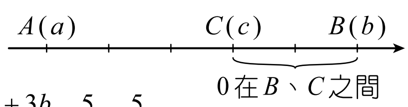
6. 在數線上，設 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$

由分點公式知，C 在 A、B 之間且 $\overline{CA}:\overline{CB}=3:2$

(A) $\because$ $c<0$ 且 $\overline{CA}:\overline{CB}=3:2$

由圖形知

$|a|>|b|$



(B) $d=\dfrac{2a+3b}{6}=\dfrac{2a+3b}{5}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{6}c$

$\therefore$ $|d|=\dfrac{5}{6}|c|<|c|$