超越巔峯

數學考科

歷屆學科能力測驗試題

更多另解請掃描，下載免費電子書觀看

110學年度學科能力測驗數學考科試題分析 1

1 110學年度學科能力測驗 4

2 109學年度學科能力測驗 7

3 108學年度學科能力測驗 10

4 107學年度學科能力測驗 13

5 106學年度學科能力測驗 16

6 105學年度學科能力測驗 19

7 104學年度學科能力測驗 22

8 103學年度學科能力測驗 25

歷屆學測數學考科參考公式 28

110-103學年度試題詳解 29

【編註】第1～7回詳解由李善文老師撰寫，第8回詳解由任維勇老師撰寫

110 學年度學科能力測驗數學考科試題分析

東山高中 數學科教師／李善文

壹、試題分析

一、各題學習內容

	108 課綱學習內容條目	110	109	108	107	106	105	104	103
第一冊	實數、絕對值	A.	5.		6.	1.	7.		4.、8.
	指數、常用對數	2.、E.	11.	3.		2.	4.	2.	
	式的運算、除法原理	5.		12.	9.				
	一次與二次函數				E.		1.		B.、7.
	三次函數圖形的特徵		7.						
	坐標圖形的對稱性								
	多項不等式								
	直線方程式	8.		1.	A.		E.		
	圓方程式	8.		1.		9.			7.
	直線與圓	3.	9.、C.	1.	C.、D.	G.	3.		3.
第二冊	數列、級數與遞迴關係	2.	8.、11.	7.	5.	A.		1.、2.	11.
	有系統的計數	2.		4.、D.	8.	7.、12.	A.、8.	10.	5.、F.
	複合事件的古典機率	7.、12.、C.	6.、B.	9.	3.	F.			
	數據分析	9.	12.	6.	8.	5.	11.	5.	12.
	廣義角和極坐標						2.	9.	
	三角比	3.	1.、G.	10.	10.、B.			A.、J.	A.、C.
	三角比的性質	10.、11.	13.、D.	E.	E.、G.	11.	12.	I.	H.
第三冊	弧度量			C.		6.			
	三角的和差公式				5.				
	三角函數的圖形								
	正餘弦的疊合								
	對數律	2.、E.		5.	4.				1.
	指數與對數函數	D.、E.	A.				11.	7.、F.	7.
	平面向量的運算	4.、8.、F.	3.、9.	8.、G.	7.、10.	B.	B.、G.	9.、E.	9.、E.
	三角不等式								
第四冊	空間概念、空間坐標系	G.	13.	F.	1.、H.			H.、I.	2.
	空間向量的運算		2.			4.、13.			D.
	三階行列式								
	空間中的直線方程式	B.	E.		11.	10.	5.、9.		
	平面方程式	B.		13.	11.		5.、9.		

	108 課綱學習內容條目	110	109	108	107	106	105	104	103
第四冊	矩陣的運算與應用	1.	4.	A.	F.		A.、D.		G.
	三元一次聯立方程式					D.		D.	
	主觀機率與客觀機率	7.							
	條件機率與貝氏定理	12.		11.	2.		13.、F.	3.、B.	6.
不屬於 108 課綱學測範圍		6.、13.	10.、F.	2.、B.	12.	3.、8.、C.、E.	6.、10.、C.	4.、6.、8.、C.、G.	10.

二、各冊占分

冊別	第一冊	第二冊	第三冊	第四冊
配分	20 分	15 分	35 分	30 分

今年學測試題之分布，若以四冊來論，較偏重第三、四冊。因為學測試題總共只有二十題，即使跨單元結合不同概念來命題也不可能涵蓋所有章節，但每年都有一些近年較沒有考的課綱內容之試題出現，如條件機率與貝氏定理、對數的應用（首數與尾數）。今年跟去年一樣，和角公式、三角測量及轉移矩陣、反方陣等矩陣的應用皆沒有命題。

三、難易度分析

難易度	題號	題數	占分	比例
中偏易	單選 1.、2.、3.、多選 9.、選填 A.	5	25	25%
中	單選 4.、6.、多選 7.、11.、選填 B.、C.、E.	7	35	35%
中偏難	單選 5.、多選 8.、10.、12.、選填 D.、F.、G.	7	35	35%
難	多選 13.	1	5	5%

筆者認為今年學測試題沒有簡易的題目，也沒有非常難的試題，只有一題算是難的試題，難度適中，中偏易的試題占了六成，中偏難的試題約有三成五。試題內容雖然沒有繁雜的計算，但多為幾種概念之結合，對低程度的同學相當不利，中等程度及中高程度的同學若一時慌了，也未必能發揮平時的水準，高程度的同學也有可能認為試題簡單而大意，以致看錯題目或粗心而做錯，必須耐心看懂題意，會分析及推理並拆解包裝才能解題。今年試題中的多選題之答案都是兩個或三個選項，同學不易完全答對，應可區別平常在校成績中上但觀念不是非常清晰的同學與觀念清晰的同學，程度好的同學應可拿 90 分以上，所以應頗具鑑別度，筆者認為今年滿級分應考 85 分，頂標約為 11 級分，前標 9 或 10 級分，均標 6 或 7 級分，後標及底標應與去年差不多。

貳、特殊試題分析

一、【單選 5.】此題為多項式除法原理的應用，要會代入適當值解題才較易答對。

二、【多選 9.】此題為情境題，只要耐心看完試題，有簡易判斷能力就能答對。

三、【多選 10.】此題為由所給條件，判斷是否決定唯一三角形，是早期基本考題，同學們應都學過，只是不見得會綜合判斷。

四、【多選 13.】此題為綜合評量的考題，是一般學生認為較難的一題，題目所考觀念（實係數多項式方程式之虛根成對定理、勘根定理），108 課綱已經放置數甲選修課程。另外只要知道多項函數 $f(x)$ 之 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序成等差數列，必需 $f(x)$ 為線性函數，就可知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 之 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 不可能依序成等差數列，而三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 之 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 只要給定公比，就可由三元一次聯立方程組有解知道其依序可成等比數列。

五、【選填 *A.*】日常生活中可能遇到的情境題，完全不需要深入的數學知識，只要耐心看完試題，有簡易判斷能力就能答對，可鑑別學生的耐性與閱讀能力。

六、【選填 *C.*】此題為考古題之類似題，只是將取相異兩數改為取相異三數，同學們很多都粗心以為所問是取到三數乘積是立方數的機率，再者列取不完全而做錯。

參、其他分析與應考對策

今年考題多了一些素養題（情境題），如多選 *7.* 、*9.*、選填 *A.*。這類型的試題是 108 課綱所強調的，不需要深入的數學知識，著重閱讀與理解題目的能力，必須耐心看懂題意，只要有簡易判斷能力就能答對，可鑑別學生的耐性與閱讀能力。大多數試題必須要具有綜合各概念之連結與推理能力才能答對，對中下程度的學生而言有一定難度，對中等程度及中上等程度但平常沒有確實理解只靠記憶而觀念不是非常清楚的同學，不容易考得應有的水準，高程度的同學只要不粗心就能拿高分，所以此份試題是蠻有鑑別度的。

近年來大考中心非常用心，著重觀念及連結與推理，今年的試題出得很好，可導正老師的教學方法及學生正確學習的態度。希望同學能體認只要仔細研讀課本，選擇一本適當的參考書，自己整理概念，將平常做錯的試題確實訂正並理解，在考試中獲得佳績應不是難事。

下面仍提供一些針對不同程度的同學之老生常談但確實有效的應考策略：

一、對於程度較差的同學

1. 以課本為主，了解各章節的觀念、定理，配合上述的分類，將同系列的這些定理的敘述、使用時機確實掌握清楚，多做幾次相關的課本範例、隨堂練習與習題。

2. 務必捨棄冷門的、繁雜的、特殊技巧的題型，坊間一般的總複習講義多半收納較多的題型，對程度差的同學毫無助益。

3. 想要進步，在數學上該花的時間是不能少的，數學程度之所以差，就是因為之前沒有深入理解且練習太少所導致，把應該還給數學的練習時間還了，數學才可能有起色。

二、對於程度中等的同學，應把學測目標定在前標甚至頂標

1. 先把課本的公式、定理弄清楚並記牢使用條件，至於證明則量力而為。

2. 除了坊間新版的參考書之外，也可以配合近五年的學測及指考數乙試題做練習，刪除不在 108 課綱的部分，剩下的題目對於自身程度的增長仍頗有助益。

3. 每章節複習完要做模擬試題檢驗複習成效，較理想的進度是一章花一週半複習，四冊共十四章，複習完一輪大約五個月，最後一個月做總複習衝刺。

4. 所有考卷錯誤都要詳細檢討、訂正，**最好能準備一本筆記專門整理以往做錯的題目，考前短短幾十分鐘看這最有效**。

三、對於程度優等的同學，基本都有前標水準，應保持水準並往頂標甚至滿級分邁進

1. 總複習時請把課本中的證明自行演算一次，不單是為了學測，也是為了往後大學的學習方式做準備。

2. 觀念弄清之後，可收集近十年的大學學測及指考數甲試題做練習，對於做不出來的題目，請多花心思去想相關定理，而非直接翻閱解答，這是最差的學習方式。

3. 每週要安排模擬試題做檢測，程度優秀的同學應該有能力做到一週複習一章，大約三到四個月可以複習完一輪。

4. 做大範圍的模擬試題或考古題作為最後衝刺。因為範圍大，所以不是重點的部分就不會出現。做愈多的考題（注意：自己做而不是看解答做）就是幫自己複習愈多次，關鍵時刻才不會忘記。

另外因應 108 課綱強調之素養題，收集各版本每冊各章之素養題練習，坊間也有專攻素養題的參考書，買一本練習也可，但主要還是要強化語文及閱讀能力，才能輕鬆應對所謂有情境之素養。

1 110學年度學科能力測驗

頂標（11級）100 ～60.4分
前標（ 9級）60.3～48.3分
均標（ 6級）48.2～30.2分
後標（ 4級）30.1～18.1分
底標（ 3級）18.0～12.1分

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

______ 1. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$。若 $A^4=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？

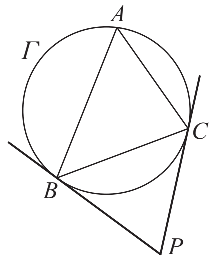
(A) 158 (B) 162 (C) 166 (D) 170 (E) 174 84%

______ 2. 五項實數數列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1=\log_{10}36$，則 a_5 有多少種可能的值？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8 30%

______ 3. 如右圖，ΔABC 為銳角三角形，P 為 ΔABC 外接圓 Γ 外的一點，且 $\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 都與圓 Γ 相切。設 $\angle BPC=\theta$，試問 $\cos A$ 的值為下列哪一個選項？

(A) $\sin 2\theta$ (B) $\dfrac{\sin\theta}{2}$ (C) $\sin\dfrac{\theta}{2}$ (D) $\dfrac{\cos\theta}{2}$ (E) $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 50%



______ 4. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？

(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13.5 (E) 16 31%

______ 5. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$。若 $f(0)=4$，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？

(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 18 (E) 20 41%

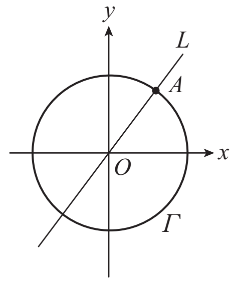
二、多選題（占 35 分）

______ 7. 心理學家找了 1000 位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識 6、8、9 三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如右表。例如：實際數字 6 被看成 6、8、9 的機率分別為 0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是 0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

看成數字 / 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

(A)如果實際數字是 8，則至少有一半的可能性會被看成是 8
(B)如果實際數字是 6，則有六成的可能性會被看成不是 6
(C)在 6、8、9 三數字中，被誤認的可能性以 9 最低
(D)如果被看成的數字是 6，則實際上就是 6 的可能性不到一半
(E)如果被看成的數字是 9，則實際上就是 9 的可能性超過 $\dfrac{2}{3}$ 68%

______ 8. 如右圖，L 為坐標平面上通過原點 O 的直線，Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 $A(3,4)$。已知 B、C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$。試選出正確的選項。



(A) L 與 Γ 的另一個交點為 $(-4,-3)$　(B)直線 BC 的斜率為 $\frac{3}{4}$

(C) $\angle AOC=60^\circ$　(D) ΔABC 的面積為 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

(E) B 與 C 在同一象限內　18%

______ 9. 某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如右表（廢票不列入計算）。假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為 x 與 y（其中 $x>0$，$y>0$），且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

(A)當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，就可決定當選人

(B)當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可決定當選人

(C)當 $x>y$ 時，就可決定當選人

(D)當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人

(E)當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人　14%

______ 10. 在 ΔABC 中，已經知道 $\overline{AB}=4$ 和 $\overline{AC}=6$，此時尚不足以確定 ΔABC 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道 $\overline{BC}$ 的長度），就可以確定 ΔABC 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。

(A)如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(B)如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(C)如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(D)如果再知道 ΔABC 的面積，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(E)如果再知道 ΔABC 的外接圓半徑，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小　3%

______ 11. 平面上有一梯形 $ABCD$，其上底 $\overline{AB}=10$，下底 $\overline{CD}=15$，且腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$。試選出正確的選項。

(A) $\angle A>\angle B$　(B) $\angle B+\angle D<180^\circ$　(C) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$

(D) $\overline{BC}$ 的長可能是 2　(E) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}<30$　9%

______ 12. 設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X\mid Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

(A) $P(A)>P(B)$　(B) $P(C)=\frac{2}{7}$　(C) $2P(C\mid A)+5P(C\mid B)<2$

(D) $P(C\mid A)>0.2$　(E) $P(C\mid B)>0.3$　6%

第貳部分：選填題（占 35 分）

A. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後__⑭⑮__秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。 70%

B. 坐標空間中有兩條直線 L_1、L_2 與一平面 E，其中直線 L_1：$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-5}$，而 L_2 的參數式為 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases}$（$t$ 為實數）。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程式為 $x-$__⑯__$y+$__⑰__$z=$__⑱__。 38%

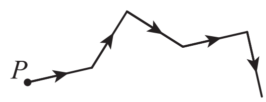
【A 版範圍】

C. 從 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為 $\dfrac{⑲}{⑳㉑}$。（化成最簡分數） 13%

D. 在坐標平面上，Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1,1)$，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y=a\times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為__㉒㉓__$\le a\le$__㉔__。 22%

E. 將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times 10^n$，其中 $1\le a<10$，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m，則數對 $(m,n)=($__㉕__, __㉖㉗__$)$。 26%

F. 如右圖，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45°；朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90°，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為__㉘ + ㉙$\sqrt{㉚}$__平方公尺。（化成最簡根式） 38%



G. 在四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$，$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，且 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，則點 D 到平面 ABC 的距離為__㉛$\sqrt{㉜}$__。（化成最簡根式） 21%

1 110學年度學科能力測驗

1.(B) 2.(A) 3.(C) 4.(E) 5.(D) 7.(B)(C)(D) 8.(C)(E)
9.(B)(C)(D) 10.(A)(B) 11.(A)(B)(E) 12.(B)(E)

A. ⑭ 3 ⑮ 7　　B. ⑯ 6 ⑰ 4 ⑱ 0
C. ⑲ 1 ⑳ 1 ㉑ 4　　D. ㉒ − ㉓ 2 ㉔ 6
E. ㉕ 2 ㉖ 5 ㉗ 6　　F. ㉘ 8 ㉙ 4 ㉚ 2
G. ㉛ 4 ㉜ 2

第壹部分：選擇題

1.因為 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=A^4=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$

所以 $a=1$，$b=80$，$c=0$，$d=81$

得 $a+b+c+d=1+80+0+81=162$

2.由題意得 $a_1=\log_{10}36$，$a_2=\frac{1}{2}a_1$ 或 $a_2=2a_1$

$\because a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\log_{10}36=\log_{10}6<1$（不合）

$\therefore a_2=2a_1=2\log_{10}36=4\log_{10}6$

$\Rightarrow$ $a_3=\frac{1}{2}a_2=2\log_{10}6$ 或 $a_3=2a_2=8\log_{10}6$

(1)當 $a_3=2\log_{10}6$ 時，$a_4=2a_3=4\log_{10}6$，則 $a_5=\frac{1}{2}a_4=\underline{2\log_{10}6}$

或 $a_5=2a_4=\underline{8\log_{10}6}$

(2)當 $a_3=8\log_{10}6$ 時，$a_4=\frac{1}{2}a_3=4\log_{10}6$ 或 $a_4=2a_3=16\log_{10}6$

① $a_4=\frac{1}{2}a_3=4\log_{10}6$ 時，則 $a_5=\frac{1}{2}a_4=\underline{2\log_{10}6}$

或 $a_5=2a_4=\underline{8\log_{10}6}$

② $a_4=2a_3=16\log_{10}6$ 時，則 $a_5=\frac{1}{2}a_4=\underline{8\log_{10}6}$

或 $a_5=2a_4=\underline{32\log_{10}6}$

所以 a_5 的可能值為 $2\log_{10}6$ 或 $8\log_{10}6$ 或 $32\log_{10}6$，共 3 種

3.令 Γ 的圓心為 O，因為 $\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 都與 Γ 相切

所以 $\angle OBP=\angle OCP=90^\circ$，且 $\overline{OB}=\overline{OC}$，得 $\Delta OPB\cong\Delta OPC$

又 $\angle BPC=\theta$，$\angle OPC=\angle OPB=\frac{\theta}{2}$

所以 $\angle BOP=\angle COP=90^\circ-\frac{\theta}{2}$

而 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC$（對同弧之圓周角是圓心角的一半）

所以 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=90^\circ-\frac{\theta}{2}$，故 $\cos A=\cos(90^\circ-\frac{\theta}{2})=\sin\frac{\theta}{2}$

4.令 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成之三角形的面積為 A

則 $2\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+2\vec{b}$ 所張成之三角形的面積為 $\left|\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\right|\cdot A=3A$

已知 $2\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+2\vec{b}$ 所張成之三角形的面積為 6，所以 $3A=6$

得 $A=2$，故 $3\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+3\vec{b}$ 所張成之三角形的面積為

$\left|\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}\right|\cdot A=8A=16$

5.因為 $f(x)$ 為三次多項式，由已知及多項式除法原理

可令 $(x+1)f(x)=(x^3+2)(ax+b)+x+2$

將 $x=0$ 代入，得 $(0+1)f(0)=(0+2)(0+b)+0+2$

又已知 $f(0)=4$，所以 $4=2b+2$，得 $b=1$

將 $x=-1$ 代入，得 $0=(-1+2)(-a+1)-1+2$，得 $a=2$

將 $x=2$ 代入，得 $3f(2)=(8+2)\cdot(4+1)+2+2$，得 $3f(2)=54$

所以 $f(2)=18$

7.(A)×；如果實際數字是 8，由表格的資料得知有四成（0.4）的可能性會被看成 8

(B)○；如果實際數字是 6，由表格的資料得知有六成（$0.3+0.2+0.1=0.6$）的可能性會被看成不是 6

(C)○；在 6、8、9 三個數字中，由表格的資料得知被誤認的可能性分別為 0.6、0.6、0.5，所以被誤認的可能性以 9 最低

(D)○；如果被看成的數字是 6，則實際上就是 6 的機率為

$\frac{0.4}{0.4+0.3+0.2}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$

(E)×；如果被看成的數字是 9，則實際上就是 9 的機率為

$\frac{0.5}{0.2+0.2+0.5}=\frac{5}{9}<\frac{2}{3}$

8.由已知得 $L=\overleftrightarrow{OA}$ ： $y=\frac{4}{3}x$，Γ：$x^2+y^2=25$

令 $B(x_0,y_0)$，因為 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=(3,4)$，所以 $C(x_0+3,y_0+4)$

(A)×；L 與 Γ 的另一交點應為 $(-3,-4)$

(B)×；直線 BC 的斜率與直線 L 的斜率相同，應為 $\frac{4}{3}$

(C)○；因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5$，由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$ 得 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}$

所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$，得 $\overline{AC}=\overline{OB}=5$

所以 ΔAOC 為正三角形，得 $\angle AOC=60^\circ$

(D)×；ΔABC 的面積 $=\Delta AOC$ 的面積

$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\sin60^\circ=\frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}$

(E)○；因為 B、C 都在圓 Γ：$x^2+y^2=25$ 上

所以 ${x_0}^2+{y_0}^2=25$，且 $(x_0+3)^2+(y_0+4)^2=25$

得 ${x_0}^2+{y_0}^2=25$，且 $6x_0+8y_0+25=0$

得 $B(\frac{-3\pm4\sqrt{3}}{2},\frac{-4\mp3\sqrt{3}}{2})$，$C(\frac{3\pm4\sqrt{3}}{2},\frac{4\mp3\sqrt{3}}{2})$

所以 B、C 都在第二象限或都在第四象限

9.由已知得甲候選人總得票數為 $0.4x+0.55y$，乙候選人總得票數為 $0.6x+0.45y$

(A)×；當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，$0.4x+0.55y$ 與 $0.6x+0.45y$ 無法決定大小，所以無法決定當選人

(B)○；$0.4x+0.55y>0.6x+0.45y$ $\Leftrightarrow$ $0.2x<0.1y$ $\Leftrightarrow$ $x<\frac{1}{2}y$

所以當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，甲候選人當選

(C)○；$0.4x+0.55y<0.6x+0.45y$ $\Leftrightarrow$ $0.2x>0.1y$ $\Leftrightarrow$ $x>\frac{1}{2}y$

所以當 $x>y$ 時，乙候選人當選

(D)○；當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，則 $0.4x>0.55y$ $\Rightarrow$ $x>\frac{11}{8}y$

所以 $x>y$，由(C)可知乙候選人當選

(E)×；當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，則 $0.45y>0.6x$ $\Rightarrow$ $x<\frac{3}{4}y$

此時不能確定 $x<\frac{1}{2}y$，還是 $x>\frac{1}{2}y$，所以無法決定當選人

10.已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$

(A)○；如果再知道 $\cos A$ 的值，則 $\angle A$ 確定，由 SAS 全等三角形性質就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

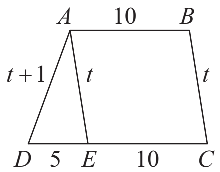
(B)○；如果再知道 $\cos B$ 的值，則 $\angle B$ 確定，由餘弦定理：$6^2=4^2+a^2-2\cdot 4\cdot a\cdot\cos B$，則 $a^2-(8\cos B)a-20=0$ 得 $a=4\cos B+\sqrt{16\cos^2 B+20}$（$a=4\cos B-\sqrt{16\cos^2 B+20}$ 不合），所以可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(C)×；如果再知道 $\cos C$ 的值，則 $\angle C$ 確定，由餘弦定理：$4^2=6^2+a^2-2\cdot 6\cdot a\cdot\cos C$，則 $a^2-(12\cos C)a+20=0$ 得 $a=6\cos C\pm\sqrt{36\cos^2 C-20}$，有兩解，所以不能確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(D)×；如果再知道 ΔABC 的面積，由 SAS 面積公式可得 $\sin A$ 的值，除非 $\sin A=1$（此時 $\angle A=90^\circ$），否則 $\angle A$ 可能是銳角也可能是鈍角，所以不能確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(E)×；如果再知道 ΔABC 的外接圓半徑，由正弦定理知 $\sin B=\dfrac{6}{2R}=\dfrac{3}{R}$，$\sin C=\dfrac{4}{2R}=\dfrac{2}{R}$，$\Delta ABC$ 的大角對大邊，小角對小邊，所以 $\angle C$ 必為銳角，但 $\angle B$ 可能是銳角也可能是鈍角，所以不能確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

11.已知梯形 $ABCD$ 中，上底 $\overline{AB}=10$，下底 $\overline{CD}=15$，腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$，過 A 作 $\overline{BC}$ 的平行線交 $\overline{CD}$ 於 E 點，則 $ABCE$ 為平行四邊形，令 $\overline{BC}=t$，則 $\overline{AE}=t$，$\overline{AD}=t+1$，$\overline{CE}=10$，$\overline{DE}=5$



(A)○；令 $\angle ADE=\alpha$，$\angle AED=\beta$，ΔADE 的大角對大邊，小角對小邊，所以 $\beta>\alpha$，因為 $\angle A=180^\circ-\alpha$，$\angle B=\angle AEC=180^\circ-\beta$，得 $\angle A=180^\circ-\alpha>180^\circ-\beta=\angle B$

(B)○；$\angle B+\angle D=180^\circ-\beta+\alpha=180^\circ-(\beta-\alpha)<180^\circ$

(C)×；$\cos B=\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta$

$$=-\frac{t^2+5^2-(t+1)^2}{2\cdot t\cdot 5}=-\frac{24-2t}{10t}=\frac{t-12}{5t}$$

當 $t=12$ 時，$\angle B$ 為直角，當 $t>12$ 時，$\angle B$ 為銳角

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 不一定小於 0

(D)×；ΔADE 之兩邊和大於第三邊，所以 $(t+1)+t>5$，得 $t>2$，所以 $\overline{BC}$ 的長不可能是 2

(E)○；因為 $\angle C=\angle AED=\beta$，而 $\cos\beta=\dfrac{12-t}{5t}$，且 $t>2$，所以

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=t\cdot 15\cdot\cos\beta=15t\cdot\frac{12-t}{5t}=36-3t<36-6=30$$

12.將 7 顆球視為不一樣的球，記為 B_1、B_2、W_1、W_2、R_1、R_2、R_3

(A)×；兩顆黑球 B_1、B_2 綁在一起當為一球，再跟其他 5 球共 6 球排成一列，$p(A)=\dfrac{2!\cdot 6!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

$p(B)=1-p(A)=1-\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$，所以 $p(A)<p(B)$

(B)○；先排 B_1、B_2、W_1、W_2，再將 R_1、R_2、R_3 三球分開插入

$$p(C)=\frac{4!\cdot P_3^5}{7!}=\frac{24\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7!}=\frac{2}{7}$$

(C)×；因為 $\dfrac{2}{7}=p(C)=p((A\cup B)\cap C)$

$$=P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap C)+P(B\cap C)$$

$$=P(A)\cdot P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{2}{7}P(C|A)+\frac{5}{7}P(C|B)$$

所以 $2P(C|A)+5P(C|B)=2$

(D)×；$P(C|A)=\dfrac{2!\cdot 3!\cdot P_3^4}{2!\cdot 6!}=\dfrac{6\cdot 24}{720}=\dfrac{1}{5}=0.2$

(E)○；$P(C|B)=\dfrac{4!\cdot P_3^5-2!\cdot 3!\cdot P_3^4}{5!\cdot P_2^6}$

$$=\frac{24\cdot 60-2\cdot 6\cdot 24}{5!\cdot 30}=\frac{48}{150}=0.32>0.3$$

或由(C)與(D)之結果 $2P(C|A)+5P(C|B)=2$ 及 $P(C|A)=0.2$

得 $P(C|B)=\dfrac{2-2P(C|A)}{5}=\dfrac{2-2\cdot 0.2}{5}=\dfrac{1.6}{5}=0.32>0.3$

第貳部分：選填題

A.每一週期，機器貓朝數線的正向移動 24 單位長，而 $116=24\times 4+20$，所以機器貓在開始移動後，經過四個週期（$8\times 4=32$ 秒）移動至數線上坐標為 96 的位置，還需 5 秒（$20\div 4=5$），才會抵達數線上坐標為 116 的位置，總共移動時間為 37 秒

B.因為 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$ 之方向向量為 $(2,-3,-5)$

L_2：$\begin{cases}x=1\\y=1+2t\\z=1+3t\end{cases}$（$t\in R$）之方向向量為 $(0,2,3)$

由題意知所求平面 E 之法向量 $\vec{n}\perp(2,-3,-5)$

且 $\vec{n}\perp(0,2,3)$，所以 $\vec{n}\,/\!/\,(2,-3,-5)\times(0,2,3)=(1,-6,4)$

又 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$ 上的點 $(0,0,0)$ 在平面 E 上

由點法式知平面 E 的方程式為 $1\cdot(x-0)-6\cdot(y-0)+4\cdot(z-0)$

即 $x-6y+4z=0$

C.從 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 這 9 個數字中任取三個相異的數，三數乘積為完全平方數的情形有下列 6 種：

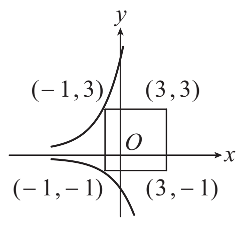
$1\times 2\times 8=16=4^2$，$1\times 4\times 9=36=6^2=2\times 3\times 6$

$2\times 4\times 8=64=8^2$，$2\times 8\times 9=144=12^2=3\times 6\times 8$

所求機率為 $\dfrac{6}{C_3^9}=\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$

D.因為 Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心在點 $(1,1)$，且各邊與坐標軸平行

所以 Γ 如右圖所示



函數 $y=a\times 2^x$ 與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 $-1\le a\times 2^{-1}\le 3$

故知 a 的最大可能範圍為 $-2\le a\le 6$

E.$(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號為 $(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times 10^n$，$1\le a<10$ 且 $n\in N$，兩邊取對數

得 $n+\log a=100\log\sqrt[3]{49}=100\log 7^{\frac{2}{3}}=\dfrac{200}{3}\log 7\approx 56.34$

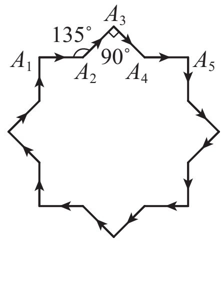
$=56+0.34$

所以 $n=56$，$\log a\approx 0.34$，得 $2<a<3$

所以 a 的整數部分 $m=2$

故數對 $(m,n)=(2,56)$

F.依照題意機器人移動的路徑會形成一個 16 邊形封閉區域，如右圖所示



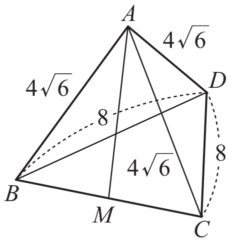
其面積 $=(2+\sqrt{2})^2+4\cdot(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1)$

$=4+4\sqrt{2}+2+2=8+4\sqrt{2}$

$G.$因為四面體 $ABCD$ 中

$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$，$\overline{BD}=\overline{CD}=8$

且 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，由餘弦定理得



$\overline{BC}^2=(4\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2$

$-2\cdot(4\sqrt{6})\cdot(4\sqrt{6})\cdot\cos\angle BAC$

$=96+96-2\cdot96\cdot\frac{1}{3}=128$

所以 $\overline{BC}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$，令 $\overline{BC}$ 的中點為 M

因為 ΔABC 及 ΔDBC 皆為等腰三角形，所以 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$

且 $\overline{DM}\perp\overline{BC}$，得 $\overline{AM}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{64}=8$

$\overline{DM}=\sqrt{8^2-(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

於是得 $\overline{AD}^2=96=64+32=\overline{AM}^2+\overline{DM}^2$，所以 $\angle AMD=90^\circ$

得知 $\overline{DM}\perp\overline{AM}$，所以 $\overline{DM}$ 垂直平面 ABC 於 M

故知 D 到平面 ABC 的距離為 $\overline{DM}=4\sqrt{2}$

2 109 學年度學科能力測驗

1.(B) 2.(A) 3.(B) 4.(E) 5.(C) 6.(D) 7.(D) 8.(A)(B)
9.(D)(E) 11.(C)(E) 12.(A)(C) 13.(B)(D)
A. ⑭ 3 ⑮ 0 ⑯ 0 B. ⑰ 1 ⑱ 9
C. ⑲ − ⑳ 5 D. ㉑ 2 ㉒ 1 ㉓ 0 ㉔ 5
E. ㉕ − ㉖ 3 ㉗ − ㉘ 1 ㉙ − ㉚ 2
G. ㉞ 1 ㉟ 6 ㊱ 3

第壹部分：選擇題

1.由已知及銳角三角函數的定義得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$

又 $\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，而 $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}>\frac{5}{13}$，所以 $\sin\alpha>\sin30^\circ>\sin\beta$

2.因為 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，由內積的性質知

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

3.直接向量的加法與係數積作圖

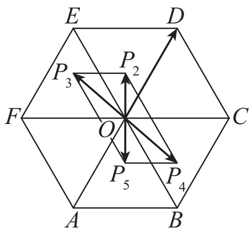
(A) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\ \Rightarrow\ P=D$

(B) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}\ \Rightarrow\ P=P_2$

(C) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}\ \Rightarrow\ P=P_3$

(D) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}\ \Rightarrow\ P=P_4$

(E) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}\ \Rightarrow\ P=P_5$



只有點 P_2 落在 ΔODE 內部（不含邊界）

4.因為 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ A^2=\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\15&19\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}$，又 $B=I+A+A^{-1}$

所以由矩陣乘法的性質得

$BA=(I+A+A^{-1})A=A+A^2+I$

$=\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&5\\15&19\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\18&24\end{bmatrix}$

5.設數線上整數點 x 滿足已知條件，則 $-5<x-\sqrt{101}<5$ 且

$x-\sqrt{38}>3$ 或 $x-\sqrt{38}<-3$，而 $10<\sqrt{101}\approx10.1$

$6<\sqrt{38}<6.2$，所以 $\sqrt{38}+3<x<\sqrt{101}+5$ 且 x 為整數

得 $x=10$ 或 11 或 12 或 13 或 14 或 15，所以此種整數點 x 共有 6 個

6.因為 a、$b\in\{1,2,3,4,5,6\}$

可得 $\log(a^2)+\log b>1\ \Leftrightarrow\ a^2b>10$

所以當 $a=2$ 時，$b=3$ 或 4 或 5 或 6

當 $a=3$ 時，$b=2$ 或 3 或 4 或 5 或 6

當 $a=4$ 或 5 或 6 時，$b=1$ 或 2 或 3 或 4 或 5 或 6

得知數對 (a,b) 有 $4+5+6\times3=27$ 組

所以所求機率為 $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

7.因為 $y=-\sqrt{3}x^3$ 的圖形對稱原點，又已知其圖形上有兩點 P、Q 到原點的距離皆為 1，且點 P 之坐標為 $(\cos\theta,\sin\theta)$，所以 Q 為 P 關於原點的對稱點，得 Q 之坐標為 $(-\cos\theta,-\sin\theta)$，亦即 $(-\cos\theta,\sin(-\theta))$

8.擲三顆公正骰子，今已知有兩顆骰子的點數分別為 1、3，且所得獎金為 100 元，由遊戲規則得知只能滿足條件 (A)：三個點數皆為奇數或者皆為偶數，或 (B)：三個點數由小排到大為等差數列，兩個條件之一

當未知的第三顆骰子出現的點數為 4 或 6 時，(A) 與 (B) 兩條件均不滿足

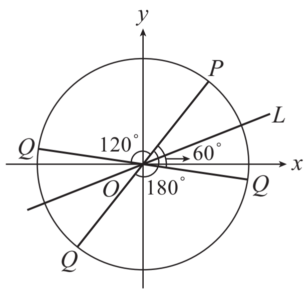
當未知的第三顆骰子出現的點數為 5 時，(A) 與 (B) 兩條件均滿足

當未知的第三顆骰子出現的點數為 1 或 3 時，滿足條件 (A) 但不滿足條件 (B)

當未知的第三顆骰子出現的點數為 2 時，滿足條件 (B) 但不滿足條件 (A)

所以未知的第三顆骰子出現的點數為 1 或 2 或 3

9.因為 L 為過原點的直線而 Γ 為以原點為圓心且半徑為 2 的圓，又 P、Q 為圓 Γ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 與 L 所夾的銳角皆為 30°，當 P 取定時，Q 有三種可能，如右圖所示，得 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 的夾角為 60° 或 120° 或 180°



所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之值為 $2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2$

或 $2\cdot2\cdot\cos120^\circ=-2$

或 $2\cdot2\cdot\cos180^\circ=-4$

11.$\log a=1.1$、$\log b=2.2$、$\log c=3.3$

得 $0<10^{1.1}=a<10^{2.2}=b<10^{3.3}=c$

(A)×；因為 $a+c=10^{1.1}+10^{3.3}=10^{2.2}\,(10^{-1.1}+10^{1.1})>b\cdot(0+10)$

$=10b>2b$，所以 $a+c>2b$

(B)×；因為 $\log10=1<\log a=1.1$，所以 $a>10$

(C)○；因為 $\log1000=3<\log c=3.3<3+0.3010$

$\approx3+\log2=\log2000$

所以 $1000<c<2000$

(D)×；因為 $b=10^{2.2}=10^{1.1}\times10^{1.1}>10^1\times a=10a>2a$

所以 $b\neq2a$

(E)○；因為 $\log b^2=2\log b=2\times2.2=4.4=1.1+3.3$

$=\log a+\log c=\log ac$

所以 $b^2=ac$，即 a、b、c 成等比數列