

目次

1 - 1

基礎商業數學	2
--------	---

1 - 2

平面圖形的比例與設計	12
------------	----

詳解	20
----	----

1-1 基礎商業數學

本單元是針對 109 課綱中平均成長率、金融與理財、連續複利的條目所編寫，這些都是財經領域中的重要基礎概念，鼓勵日後有志於商管學群同學努力學習。

範例研習特區

1 幾何平均數與平均成長率

1. 幾何平均數：正數 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的幾何平均數為 $\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$ 。

2. 成長率：由正數 a 增長到正數 b 的成長率為 $\frac{b-a}{a} \times 100\%$ 。

例 500 變成 600 的成長率為 $\frac{600-500}{500} \times 100\% = 20\%$ 。

3. 多次的成長率：正數 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ， $1 \leq k < n$ ，可計算「第 k 次的成長率 $r_k\%$ 」為 $r_k\% = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k} \times 100\%$ 。移項可得 $a_{k+1} = a_k \times (1 + r_k\%)$

例 由 100 變成 120 再變成 150，是先成長 20% 再成長 25%。

注意 首項為 k ，經過「先 $a\%$ 再 $b\%$ 」的成長，與經過「先 $b\%$ 再 $a\%$ 」的成長，結果相同，都是 $k(1+a\%)(1+b\%)$ 。

4. 平均成長率：首項為 a ，經過 k 次成長變成末項 p ，則可設平均成長率為 $x\%$ ，得 $a(1+x\%)^k = p$ ，所以 $x\% = (\sqrt[k]{\frac{p}{a}} - 1) \times 100\%$ 。若這 k 次的成長率為 $r_1\%, r_2\%, \dots, r_k\%$ ，則 $a(1+x\%)^k = a(1+r_1\%)(1+r_2\%) \times \dots \times (1+r_k\%) = p$ ，所以 $1+x\% = \sqrt[k]{(1+r_1\%)(1+r_2\%) \times \dots \times (1+r_k\%)}$ ，就是 $1+r_1\%, 1+r_2\%, \dots, 1+r_k\%$ 的幾何平均數。

注意 以上的結果不用背，只要確實理解就能列式計算。

注意 平均成長率的計算需開高次根號，常利用對數或計算機來輔助。

詳答參見詳解本 P.20

範例 1 幾何平均數

以前學過「算幾不等式」， $\sqrt{ab}$ 就是 a, b 的幾何平均。



1. 求 2、8、16、64 的幾何平均數為_____。

解

再講清楚

幾何平均數就是「 n 個正數相乘開 n 次根號」

2. 等比數列 $\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}, \dots$ ，共有 n 項，若此 n 個正數的幾何平均數為 4，求 $n =$ _____。

解

複習一下

1. 等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的公比為 r ，

則 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

2. $a > 0$ ，則 $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$

類題 1 求 3、4、6、9、12 的幾何平均數為 _____。

類題 2 (1) 等比數列 3、9、27、81 的幾何平均數為 _____。

(2) 等比數列 3、9、27、81、243 的幾何平均數為 _____。

(3) 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的各項均為正數，且公比不是 1，若前 n 項的幾何平均數恰等於 a_{10} ，求 $n =$ _____。

類題 3 等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的 $a_{45} = 2$ ， $a_{47} = 4$ ，且各項均為正數，求前 99 項的幾何平均數為 _____。

類題 4 若連續整數 $1, 2, 3, \dots, n$ 的幾何平均數介於 3 與 4 之間，利用下表求 $n =$ _____。

n	5	6	7	8	9	10
3^n	243	729	2187	6561	19683	59049
4^n	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
$n!$	120	720	5040	40320	362880	3628800

這題常考

範例 2 成長率的計算

國家或公司的財務報表，都離不開成長率的計算。



1. 某公司在民國 109 年的營收為 13.6 億元，稅後淨利為 800 百萬元，民國 110 年的營收為 16.32 億元，稅後淨利為 760 百萬元。請問由民國 109 年到 110 年的營收成長率為 _____ %，稅後淨利的成長率為 _____ %。

解

再講清楚

從公司財報的損益表中，可以看到毛利率、營益率與淨利率，請同學 google 一下，了解這些重要的名詞

2. 有甲、乙、丙三家公司在同時間創立，第一年的營收均為 1000 萬元，之後三年的逐年營收成長率如附表，請問：

	第 1 年到第 2 年	第 2 年到第 3 年	第 3 年到第 4 年
甲公司	10%	10%	20%
乙公司	10%	20%	10%
丙公司	20%	10%	10%

- (1) 三家公司的第 4 年營收是否相同？ _____
 (2) 計算各家公司在 4 年期間的營收總和，哪一家最高？ _____ 哪一家最低？ _____

解

類題 5 8、10、12、21、16.8 為某公司創立前 5 年的逐年營收（單位：億元），這 5 年共經歷四次逐年的成長，請問這四次年成長率依序為 _____。

類題 6 某公司民國 85 年營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%。87、88、89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元。則該公司 89 年的成長率為 _____ %。

類題 7 設 $a > b > c > 0$ ，某公司第一年的業績是 100 萬元，老闆為接下來的三年業績擬定了六個成長方案如右表，分別以 $a\%$ 、 $b\%$ 、 $c\%$ 的六種排列方式來規劃安排。請問：

方案	第 1 年到第 2 年	第 2 年到第 3 年	第 3 年到第 4 年
甲	$a\%$	$b\%$	$c\%$
乙	$a\%$	$c\%$	$b\%$
丙	$b\%$	$a\%$	$c\%$
丁	$b\%$	$c\%$	$a\%$
戊	$c\%$	$a\%$	$b\%$
己	$c\%$	$b\%$	$a\%$

- (1) 哪幾個方案使第三年的業績最高？_____
- (2) 哪幾個方案使第四年的業績最高？_____
- (3) 哪一個方案使這四年下來的業績總和最高？_____

這題必考

範例 3 平均成長率

是幾何平均數的應用，和算術平均的性質不一樣。



1. 某公司的股價漲跌劇烈，去年底收盤的價格為 20 元，到今年一月底飆漲了 60%，然後經過一個月又下跌了 60%，請問經過這兩個月的漲跌，股價變成_____元，這兩個月的平均月成長率為_____ %。

解

歸納心得

先成長 $p\%$ 再衰退 $p\%$ ，其平均成長率是負的

2. 某生技公司研發出植物萃取的新技術，產品上市的第一年創下獲利一仟萬元的佳績，爾後兩年的獲利更創下 260% 與 60% 的高度成長，但因競爭對手迅即推出效果更佳的产品，所以該生技公司隨後三年的獲利均為負成長，年成長率依序為 -10% 、 -20% 、 -40% ，請問該公司第一年到第六年的獲利平均成長率為_____ %。

解

3. 某工廠在 105 年到 110 年間的員工人數如右表，請利用下列對數值求 105 年到 110 年的員工人數平均年成長率約為 _____ %。
($\log 1.39 \approx 0.1430$, $\log 1.068 \approx 0.0286$)

年	105	106	107	108	109	110
人數	200	317	290	281	260	278

解

再講清楚

平均成長率只考慮頭尾，
與中間數字的高低無關

類題 8 一家公司成立的第一年營收 1000 萬元，之後四年的營收年成長率依序為 20%、-30%、-20%、30%，則第五年的營收為 _____ 萬元，平均年成長率為 _____ %。
($\sqrt[4]{0.8736} \approx 0.9668$)

類題 9 公司業務小王四年來的業績年成長率為 20%、10%、10%、20%，求平均年成長率約為 _____ %。
($\sqrt[4]{132} \approx 11.49$)

類題 10 新成立的某店家，每年結算其稅後純益依次為 242 萬元、286 萬元、317 萬元、306 萬元，則每年的平均成長率約為 _____ %。
($\log 1.21 \approx 0.0828$, $\log 1.53 \approx 0.1847$, $\log 1.082 \approx 0.0340$)

2 連續複利與自然常數 e

1. **複利本利和（複習）**：最初借貸的金額稱為**本金**，每經過時間 T 就要生出 $r\%$ 的利息，稱 T 為**一期**， $r\%$ 為**期利率**。

(1) **單利**：若一期之後仍持續借貸，約定之前衍生的利息不再生出利息，就稱為單利，每經一期所生的利息是固定的，本利和隨期數呈**線型函數**的關係。

(2) **複利**：若一期之後仍持續借貸，約定之前衍生的利息會滾入本金，繼續以 $r\%$ 的期利率增長，就稱為「複利」，每經一期本利和會乘上 $(1 + r\%)$ 倍，隨期數呈現**指數函數**的關係。

結論 ① 單利本利和 = 本金 + 利息 = 本金 + (本金 × 期利率 × 期數)

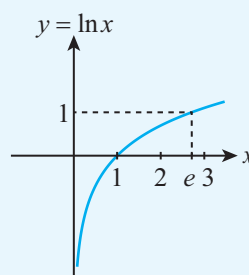
② 複利本利和 = 本金 × $(1 + \text{期利率})^{\text{期數}}$

2. 連續複利：複利一期的時間為 T ，期利率為 $r\%$ ，期數為 k 的本利和為「本金 $\times (1 + r\%)^k$ 」。進一步把每期的時間切為 n 等分，共 nk 期，期利率變成 $\frac{r}{n}\%$ ，則本利和變成「本金 $\times (1 + \frac{r}{n}\%)^{nk}$ 」。操作計算機可知 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 在 n 很大時會趨近於定數 $2.71828\cdots$ ，將此定數記為 e ，稱為**自然常數**，其地位與圓周率 π 類似。所以當每期的時間切得很細時，本利和會趨近於「本金 $\times e^{kr\%}$ 」，稱為**連續複利**。

注意 把計息每期的時間切割細分，可使本利和變大，但有**上限**，不會無限制增加。

3. 自然對數：以自然常數 $e \approx 2.71828$ 為底數的對數，稱為「自然對數」，記為 $\ln$ ，即 $\log_e a = \ln a$ 。可利用「換底公式」換成以 10 為底，為 $\ln a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} e}$ ，其中 $\log_{10} e \approx \log 2.71828 \approx 0.4343$ 。

4. 自然對數函數：為以 e 為底數的對數函數，即 $y = f(x) = \ln x$ ， $x > 0$ 。為遞增且以 y 軸為漸近線，如右圖。



範例 4 複利的計算

心中有數字，把錢算清楚，這樣才能累積財富。



阿明向錢莊借了十萬元應急，只約定年利率為 18%，借期為兩年，但沒有說清楚多久時間為一期，請針對以下四種方案來計算兩年後應還的本利和：

甲方案：以一年為一期，本利和為_____元。

乙方案：以半年為一期，本利和為_____元。

丙方案：以四個月為一期，本利和為_____元。

丁方案：以兩個月為一期，本利和為_____元。

以甲、乙、丙、丁代表四個方案的本利和，請比較甲、乙、丙、丁的大小。_____

(利用 $(1.18)^2 = 1.3924$ ， $(1.09)^4 \approx 1.41158$ ， $(1.06)^6 \approx 1.41852$ ， $(1.03)^{12} \approx 1.42576$)

解

類題 11 甲向乙借了 10000 元，年利率為 12%，若：

(1) 以半年為一期，則一年後的本利和為_____元。

(2) 以四個月為一期，則一年後的本利和為_____元。

(3) 以三個月為一期，則一年後的本利和為_____元。

(4) 以兩個月為一期，則一年後的本利和為_____元。

(5) 以一個月為一期，則一年後的本利和為_____元。

(已知 $(1.06)^2 = 1.1236$ ， $(1.04)^3 \approx 1.1249$ ， $(1.03)^4 \approx 1.1255$ ， $(1.02)^6 \approx 1.1262$ ， $(1.01)^{12} \approx 1.1268$)

這題常考

範例 5 認識自然常數 e

這個數字比較抽象，必須憑感覺來體會。



由 $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$ ， $(1 + \frac{1}{10})^{10} \approx 2.594$ ， $(1 + \frac{1}{100})^{100} \approx 2.7048$ ，看出 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 的值隨 n 遞增趨於定值，此定值記為 e ，約為 2.718。試根據以上訊息，求出 n 很大時 $(1 + \frac{3}{n})^n$ 所趨近的定數約為_____。（求近似值至小數點後第二位）

解

類題 12 請利用計算機，在 n 很大時，判斷下列哪些選項的值會靠近 2.71828？_____

- (A) $(1 + n)^n$ (B) $(1 + n)^{\frac{1}{n}}$ (C) $(1 + \frac{1}{n})^n$ (D) $(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ (E) $(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}$

類題 13 設 $a_n = (1 + \frac{2}{n})^n$ ，在 n 很大時， a_n 的值會在相鄰整數 k 與 $k+1$ 之間，求 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這題必考

範例 6 連續複利

其實就算錢莊老闆把計息期間切細，也賺得很有限。



甲向乙借 10000 元，約定一年後還清，年利率為 20%，甲希望以一年為一期，一年後應還本利和 a 元。但乙希望用連續複利，一年後應還本利和 b 元，請利用下表求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b \approx \underline{\hspace{2cm}}$ 。

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
e^x	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487	1.8221

解

類題 14 某人向錢莊借 10000 元，借期為一年，年利率為 50%，若採連續複利，則一年期滿的本利和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元。（ $\sqrt{e} \approx 1.6487$ ）

類題 15 甲向乙借 10000 元，借期為三年，年利率為 10%，若採連續複利，則三年期滿應還 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元。（已知 $e^{0.3} \approx 1.35$ ）

這題常考

範例 7 自然對數

以 e 為底數的指、對數是大學微積分的重點。



1. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log e \approx 0.4343$ ，試求：

(1) $\ln 2 \approx$ _____ (2) $\ln 18 \approx$ _____。

解

複習一下

分合： $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$
次係： $\log_a (x^n) = n \log_a x$

2. 設 $\ln x = 7$ ， $\ln y = 5$ ，求：(1) $\ln (x^2 y) =$ _____ (2) $\ln \sqrt{\frac{x}{y}} =$ _____。

解

類題 16 已知 $\log 7 \approx 0.8451$ ， $\log e \approx 0.4343$ ，試求 $\ln 7 \approx$ _____， $\ln \frac{1}{49} \approx$ _____。

類題 17 已知 $\log e \approx 0.4343$ ，試問 $\ln 100$ 在哪兩個連續整數之間？ _____
(A) 1 與 2 (B) 2 與 3 (C) 3 與 4 (D) 4 與 5 (E) 5 與 6

類題 18 設 $\ln a = 2.1$ ， $\ln b = 3.7$ ， $\ln c = 5.6$ ，求：

(1) $\ln (abc) =$ _____ (2) $\ln \frac{a^2 b^3}{\sqrt{c}} =$ _____。

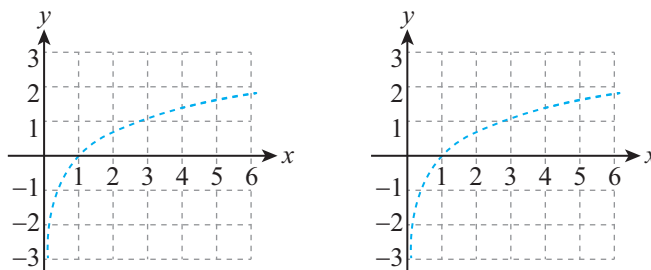
這題必考

範例 8 自然對數函數

認識以 e 為底的對數函數，就是 $y = \ln x$ 。1. 方格紙中的虛線為 $y = \ln x$ 的圖形，試利用該圖形作出：

- (1)
- $y = \ln \frac{1}{x}$
- (2)
- $y = \ln(ex)$
- 的圖形。

解

2. $y = f(x) = \ln x$ 的圖形上有兩點 $A(\frac{1}{2}, p)$ 、 $B(12, q)$ ，則 $\overline{AB}$ 的斜率 m 在下列哪一個選項的範圍內？_____ ($\ln 2 \approx 0.6931$ ， $\ln 3 \approx 1.0986$)

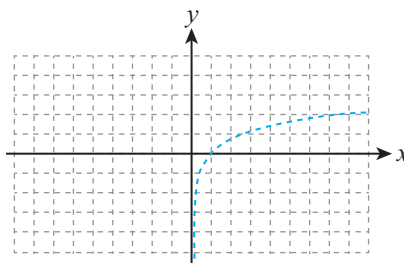
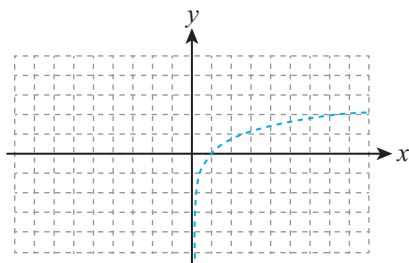
- (A) $0 < m < 0.1$ (B) $0.1 < m < 0.2$ (C) $0.2 < m < 0.3$
 (D) $0.3 < m < 0.4$ (E) $0.4 < m < 0.5$

解

類題 19 圖中的虛線為 $y = \ln x$ 的圖形，請作出：

(1) $y = \ln(-x)$ ， $x < 0$

(2) $y = \ln x^2$ ， $x \in R$ 的圖形

類題 20 在 $y = \ln x$ 的圖形上有兩點 $A(1, 0)$ 、 $B(8, \ln 8)$ ，求 $\overline{AB}$ 的斜率近似值為 _____。
 ($\ln 2 \approx 0.693$ ，求到小數點後第一位，第二位四捨五入)

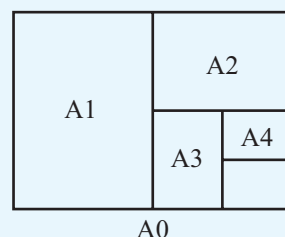
1-2 平面圖形的比例與設計

在工程、機械、建築設計各領域都會用到製圖的各項技巧，以往的高中數學都只強調學理的推導與計算，到新課綱才正式地簡短介紹這個部分，相信未來大考的命題絕對是精彩可期！

範例研習特區

1 影印紙的長寬比例

1. A 系列影印紙的長寬比例：A0 紙張為面積是 1 平方公尺的長方形，且長與寬的比例為 $\sqrt{2} : 1$ ，將 A0 紙張折半平分後稱為 A1，將 A1 紙張折半平分後稱為 A2，…，依此類推，所得 A1、A2、… 的長、寬比例均仍維持 $\sqrt{2} : 1$ ，即 A0、A1、A2、… 的面積呈等比數列，公比為 $\frac{1}{2}$ ，且形狀均相似。



2. B 系列影印紙的長寬比例：B0 紙張為面積是 $\sqrt{2}$ 平方公尺的長方形，長與寬的比例也是 $\sqrt{2} : 1$ ，如此也可使得對半裁切後均能維持 $\sqrt{2} : 1$ 的長寬比例。

3. 求得 A0、A1、A2、…，及 B0、B1、B2、… 的各邊長度之後，即可求出其中兩者相互縮放的影印倍率。

詳答參見詳解本 P.22

這題必考

範例 1 影印紙的邊長

只要記住 A0、B0 的面積，即可推出各種影印紙的尺寸大小。



1. 已知一張 A0 影印紙的面積是 1 平方公尺，不斷取半依序可得 A1、A2、A3、A4、… 的影印紙。請問 A4 紙張的長為_____公分，寬為_____公分。（均求近似值至小數點後第一位， $\sqrt{2} \approx 1.4142$ ， $\sqrt[4]{2} \approx 1.1892$ ）

解

2. 坊間一包 500 張 70 磅的 A4 影印紙售價均為 90 元左右，請問需要_____張 A0 尺寸的影印原紙，才足夠切得一包 A4 影印紙。（無條件進位至整數）

解

再想一想

請問需要_____張 B0 的影印原紙，才足夠切得一包 500 張的 B4 影印紙

類題 1 已知一張 B0 影印紙的面積是 $\sqrt{2}$ 平方公尺，不斷取半依序可得 B1、B2、B3、B4、… 的影印紙。請問 B4 紙張的長為_____公分，寬為_____公分。（若為近似值，請求至小數點後第一位）

類題 2 若 500 張 A4 普通影印紙的售價為 90 元，試推算 500 張 B4 普通影印紙的售價應為_____元才合理。（即單位面積的價錢相等，整數以下四捨五入）

這題必考

範例 2 影印機的縮放倍率

由各種影印紙張的邊長，來推算縮放的倍數。



請問由 A4 原稿要放大印成 A3 的紙張輸出，應在影印機的縮放倍率按下_____ %。
（整數以下四捨五入）

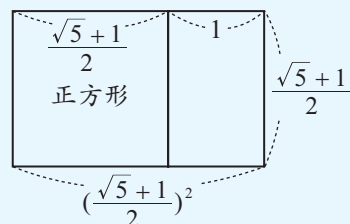
解

類題 3 原稿尺寸的 A3 大小，若想印成 A4 的大小，應在影印機的縮放倍率按下_____ %。
（整數以下四捨五入）

類題 4 請問若想把 A4 的原稿印成 B4 大小的紙張輸出，則在影印機應輸入的縮放倍率為_____ %。（整數以下四捨五入，相關數值請參考範例 1）

2 黃金比例

1. **黃金矩形**：長與寬的比例為 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$ 的長方形（比值約為 1.618），稱為黃金矩形，切去正方形後，所剩的長方形仍維持 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$ 的長、寬比例。



2. **線段的黃金分割點**：點 P 在 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP} > \overline{BP}$ ，若「 $\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{BP} = k$ 」，稱 P 為 $\overline{AB}$ 的**黃金分割點**，可求得比值 $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，稱為**黃金比例**。

注意 在大自然及古建築中，線段的分點比例及矩形的長寬比例經常出現接近黃金分割比 1.618 的情形，所以黃金比例在美術設計中占有重要地位。

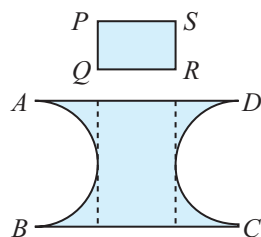
這題必考

範例 3 黃金矩形

記住 1.618，是黃金矩形的長、寬比值。



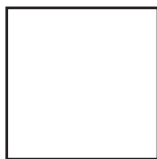
英文字母「i」在 3C 世代下給人時尚的感覺，有設計師接案要為某科技公司設計 logo 商標，希望賦予「i」人文思創的意義，他的想法是利用寬為 2 單位的黃金矩形 $ABCD$ ，左右各截去半徑為 1 的半圓代表「i」的主幹，也象徵人的四肢，然後在上方再放置一個黃金矩形 $PQRS$ ， $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{RS}$ 恰與兩半圓相切，如右圖。請計算整個圖案的面積是 $a + b\sqrt{5} + c\pi$ 平方單位，其中 a 、 b 、 c 為有理數，試求序組 $(a, b, c) =$ _____。



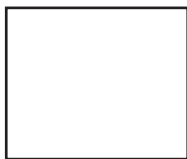
解

類題 5 請利用直尺，判斷：(1)哪一個選項的圖形最接近黃金矩形？_____
(2)哪一個選項的圖形最接近影印紙的形狀？_____

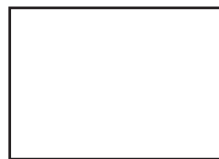
(A)



(B)



(C)



(D)



(E)



類題 6 一張 A4 影印紙的長為 29.7 公分，寬為 21 公分，請問應如何裁切，可以獲得黃金矩形？_____

- (A) 長度不變，將寬度減少 1.1 公分 (B) 長度不變，將寬度減少 1.6 公分
(C) 長度不變，將寬度減少 2.1 公分 (D) 長度不變，將寬度減少 2.6 公分
(E) 長度不變，將寬度減少 3.1 公分

這題必考

範例 4 線段的黃金分割點

記住「全：長 = 長：短」就可以找到黃金分割點。



1. 線段 $\overline{AB}$ 的長度為 10，靠近 A 的黃金分割點為 P ，請問 $\overline{AP} =$ _____，若取近似值到小數點後第一位得 $\overline{AP} \approx$ _____。（ $\sqrt{5} \approx 2.236$ ）

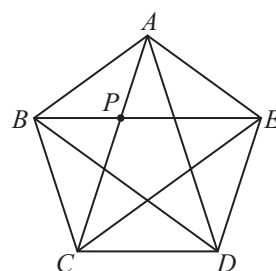
解

公式解

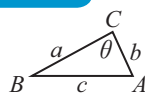
$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ 若 } b^2 - 4ac > 0, \\ \text{則有相異實根，為} \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 正五邊形 $ABCDE$ 的五條對角線連成五角星， P 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BE}$ 的交點，試證： P 為 $\overline{AC}$ 的黃金分割點。（ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ， $\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ）

解



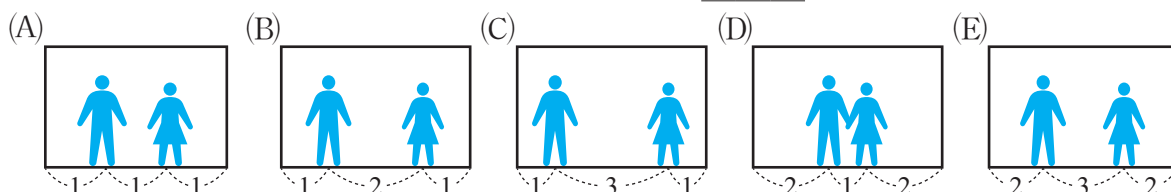
複習一下

1. 餘弦定理：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

2. $a \geq b \geq 0$
則 $\sqrt{a+b} \pm 2\sqrt{ab} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

類題 7 下列五個選項是五對情侶的照片，若希望兩人站立的位置最接近照片左右的兩個黃金分割點，請問應選哪一張照片最合適？_____



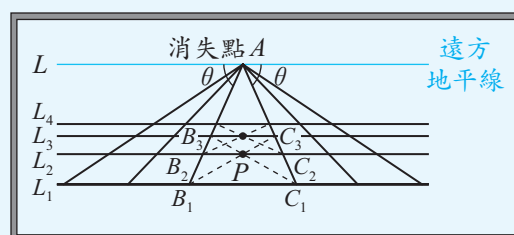
類題 8 我們稱頂角為 36° 的等腰三角形為「黃金三角」，如正五角星就是由正五邊形伸出五個黃金三角所構成。試證明黃金三角的腰長與底邊的比值恰為黃金比例

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}。(\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4})$$

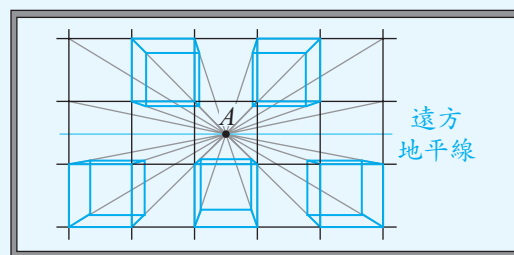
3 單點透視

1. **單點透視**：是一種符合視覺比例，可營造立體感的繪畫技巧，所畫出的圖形與照相機拍出的照片相近。

2. **地面方格的單點透視**：把地面鋪滿等間隔的方格紙，眼睛離地面的高度為 h ，所遠望的地平線 L 正中為消失點 A ，格線 $\overline{AB_1}$ 與 $\overline{AC_1}$ 與地平線的夾角為 θ ， $L_1 \sim L_4$ 為相鄰格線且均與 L 平行， B_1, C_1 在 L_1 上， B_2, C_2 在 L_2 上， $\dots$ ，且 $\overline{B_1C_3}$ 與 $\overline{B_3C_1}$ 的交點 P 會落在 L_2 上，依此類推，如右圖。



3. **立體方格的單點透視**：把空間鋪滿同大小的正立方體，所有前後方向的格線會集中在水平線正中的消失點 A ，如右圖。



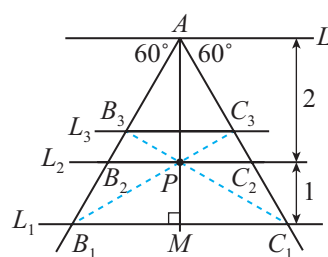
這題常考

範例 5 單點透視求格線間距

這樣做出的立體圖比較接近實際視覺的感受。



右圖是用「單點透視」所畫出的地面方格， L 為遠方地平線，正中 A 點為消失點， $\overrightarrow{AB_1}$ 與 $\overrightarrow{AC_1}$ 為地面平行兩直線，視覺上延伸交會於 A 點，與 L 的夾角均為 60° ，且點 B_1, C_1 在左右延伸的格線 L_1 上， $\overline{AB_1}$ 、 $\overline{AC_1}$ 分別交 L_3 於 B_3, C_3 ， M 為 $\overline{B_1C_1}$ 中點且 $\overline{AM} \perp L_1$ ， P 為 L_2 與 $\overline{AM}$ 的交點，也是 $\overline{B_3C_1}$ 與 $\overline{B_1C_3}$ 的交點。用直尺測得 L_1 與 L_2 的間距為 1， L_2 與 L 的間距為 2，試求 L_2 與 L_3 的間距為 _____。

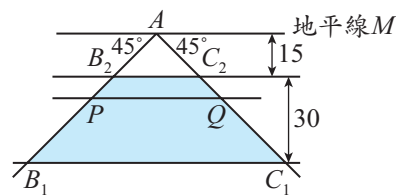


解

再講清楚

如果梯形 $B_1C_1C_2B_2$ 與 $B_2C_2C_3B_3$ 相似，則 x 應該是 $\frac{2}{3}$ ，與答案不符，所以圖形不是等比例縮小，不能用等比數列來求

類題 9 右圖是用「單點透視法」畫出的圖形， $B_1C_1C_2B_2$ 是置放於地面的長方形， $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ 與 $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ 交會於遠方的消失點 A ，與遠方地平線 M 的夾角均為 45° ，圖中 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2C_2}$ 平行且間距為 30， $\overleftrightarrow{B_2C_2}$ 與 M 平行且間距為 15，若 P 、 Q 依序在 $\overline{AB_1}$ 、 $\overline{AC_1}$ 上而且是地面上 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{C_1C_2}$ 的中點，求在圖中 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 的間距為 _____。

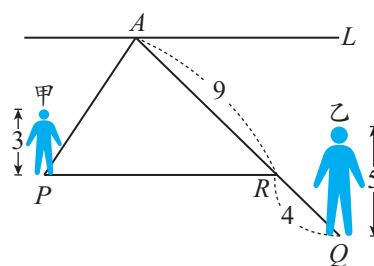


這題必考

範例 6 單點透視求視覺的高度 相同的高度，愈遠看起來會愈小。

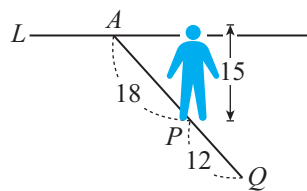


用單點透視法作畫如右，遠方地平線為 L ，消失點為 A ，甲站在 P 點且圖中的身長為 3，乙站在 Q 點且圖中的身長為 5，過 P 作 L 的平行線交 $\overline{AQ}$ 於 R ，已知 $\overline{AR} = 9$ ， $\overline{QR} = 4$ ，試問甲、乙二人誰的身高較高？_____。若甲的實際身高為 156 公分，則乙的身高為_____公分。

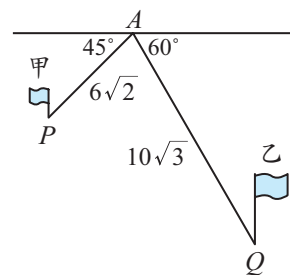


解

類題 10 右圖是用「單點透視法」畫出的立體圖形， L 是遠方地平線， A 為消失點，某人的身長在圖中為 15 公分，站立在距 A 為 18 公分的 P 點位置，若此人沿 $\overrightarrow{AP}$ 的方向走到 Q ，圖中 $\overline{PQ}$ 為 12 公分，則在 Q 處的身長在圖中應畫_____公分才合宜。

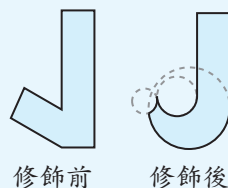


類題 11 以「單點透視法」畫出兩根等長的旗竿甲、乙， A 為消失點，甲立於畫中的 P 點， $\overline{AP} = 6\sqrt{2}$ 與遠方地平線 L 的夾角為 45° ，乙立於畫中的 Q 點， $\overline{AQ} = 10\sqrt{3}$ 與遠方地平線的夾角為 60° 。畫中甲旗竿的長度為 2，則乙旗竿的畫中長度為_____。

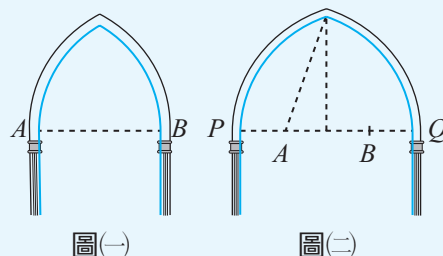


4 圓角與拱門的設計

1. **圓角修飾**：在設計文字時，常用大小不一的圓弧來修飾角度，以達到美工的效果。如右圖。



2. **拱門的設計**：在力學結構上，圓拱的耐重力量比平臺大得多，而且挑高的拱門在視覺上也更加美觀莊嚴，在許多經典建築都常看到。如圖(一)的拱門是以 A 、 B 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑所作兩道 60° 圓弧組成。圖(二)的拱門是取 $\overline{PQ}$ 的兩個四等分點 A 、 B 為圓心， $\frac{3}{4}\overline{PQ}$ 為半徑所作兩道圓弧組成，稱為「四分之一拱」，形狀比圖(一)更加圓潤。



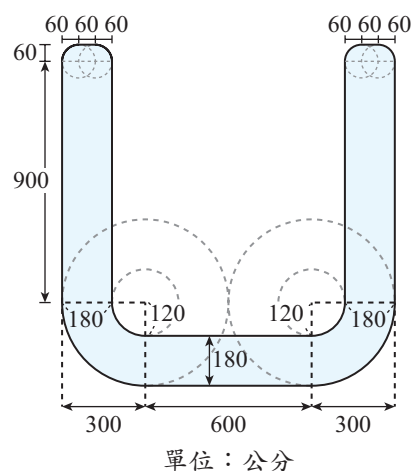
範例 7 文字的圓角設計

文字圖形的每道筆劃都需要美術設計，馬虎不得

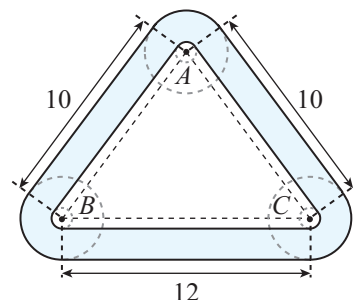


聯合科技公司是跨國大型企業，以「U」做為公司的識別象徵，計畫在新完工的總部大樓高處懸掛鋪貼金箔的「U」字圖騰。建築師的設計草圖如右，為控制預算必須精準求出所需金箔的數量，請問「U」字的面積為 _____ 平方公分。（ $\pi \approx 3.1416$ ，整數以下四捨五入）

解



類題 12 三角文創公司的註冊商標是一個經過圓角修飾的等腰三角形，如圖所示的陰影部分，已知圖中三個小圓的半徑為 1 單位，三個大圓的半徑為 4 單位，分別以 A 、 B 、 C 三點為圓心，等腰三角形的底邊為 12，腰長為 10，請問此圖案的陰影部分面積為 _____ 平方單位。



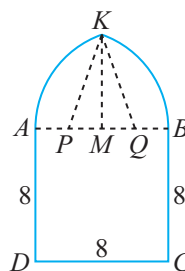
這題常考

範例 8 拱門的設計

用圓弧做成的拱門又稱「哥德拱」，宗教建築很常見到。



設正方形 $ABCD$ 的邊長為 8 公尺，想以 $\overline{AB}$ 為底邊向上設計一座拱門，先把 $\overline{AB}$ 四等分，等分點為 P 、 M 、 Q ，分別以 P 、 Q 為圓心，半徑為 6 公尺作圓弧交於 K 點，如右圖，稱此為「四分之一拱」，試求：



(1) 圓弧長 $\widehat{AK} =$ _____。

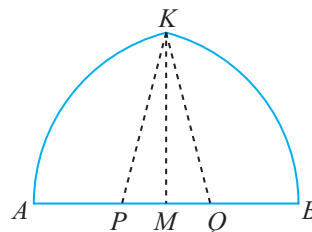
(2) 拱門凸出部分 $\triangle ABK$ 區域的面積為 _____ 平方公尺。

(均求近似值至小數點後第二位，請利用計算機或利用下列數值：

$$\pi \approx 3.142, \cos^{-1} \frac{1}{3} \approx 70.53^\circ, \sqrt{2} \approx 1.414)$$

解

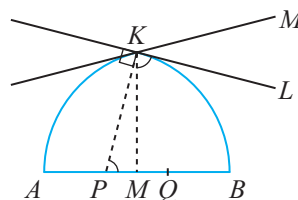
類題 13 線段 $\overline{AB} = 6$ ， P 、 Q 為 $\overline{AB}$ 的三等分點，分別以 P 、 Q 為圓心，半徑為 4 作圓弧交於 K 點，稱所得圖形為「三分之一拱」，令 $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{4}$ 弧度，試以 θ 表示：



(1) 弧長 $\widehat{AK} + \widehat{BK} =$ _____。

(2) 拱形 ABK 的面積 = _____。

類題 14 三分之一拱 ABK 如右圖， P 、 Q 為 $\overline{AB}$ 的三等分點，也是左、右兩道圓弧的圓心，兩圓弧交於 K ，在 K 作兩圓弧的切線 L 、 M ，稱兩切線的鈍夾角為拱形的「頂角」，試求頂角的大小為 _____ (求近似值至小數點後第二位， $\cos^{-1} \frac{1}{4} \approx 75.52^\circ$)



類題

8 873.6 ; -3.32 9 14.9 10 8.2

8 ① 第五年營收 = $1000 \times 1.2 \times 0.7 \times 0.8 \times 1.3 = 873.6$ 萬元② 設平均年成長率為 $x\%$

$$1000 \cdot (1+x\%)^4 = 1000 \times 1.2 \times 0.7 \times 0.8 \times 1.3 = 873.6$$

$$\Rightarrow 1+x\% = \sqrt[4]{1.2 \times 0.7 \times 0.8 \times 1.3} = \sqrt[4]{0.8736} \approx 0.9668$$

$$\therefore x\% \approx -3.32\%$$

9 設所求為 $x\%$ ，則 $(1+x\%)^4 = 1.2 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.2$

$$\therefore 1+x\% = \sqrt[4]{1.1^2 \times 1.2^2} = \sqrt{1.1 \times 1.2} = \sqrt{1.32} \approx 1.149$$

$$\therefore x\% \approx 0.149 = 14.9\%$$

10 由 242 萬元到 306 萬元共經過 3 年

$$\therefore (1+x\%)^3 = \frac{306}{242} = \frac{153}{121}, \text{ 即 } 1+x\% = \sqrt[3]{\frac{153}{121}}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \log \sqrt[3]{\frac{153}{121}} &= \frac{1}{3} \log \frac{1.53}{1.21} = \frac{1}{3} (\log 1.53 - \log 1.21) \\ &\approx \frac{1}{3} (0.1847 - 0.0828) \approx 0.0340 \approx \log 1.082 \end{aligned}$$

$$\therefore 1+x\% \approx 1.082, \text{ 故得 } x\% \approx 0.082 = 8.2\%$$

範例 4

$$\text{甲} = 100000 \times (1+18\%)^2 = 100000 \times 1.3924 = 139240$$

$$\text{乙} = 100000 \times (1+9\%)^4 \approx 100000 \times 1.41158 = 141158$$

$$\text{丙} = 100000 \times (1+6\%)^6 \approx 100000 \times 1.41852 = 141852$$

$$\text{丁} = 100000 \times (1+3\%)^{12} \approx 100000 \times 1.42576 = 142576$$

$$\therefore \text{甲} < \text{乙} < \text{丙} < \text{丁}$$

類題

11 (1) 11236 (2) 11249 (3) 11255 (4) 11262 (5) 11268

11 (1) 所求 = $10000 \times (1+6\%)^2 = 11236$

(2) 所求 = $10000 \times (1+4\%)^3 \approx 11249$

(3) 所求 = $10000 \times (1+3\%)^4 \approx 11255$

(4) 所求 = $10000 \times (1+2\%)^6 \approx 11262$

(5) 所求 = $10000 \times (1+1\%)^{12} \approx 11268$

範例 5

$$(1+\frac{3}{n})^n = (1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3} \times 3} = [(1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}}]^3$$

$$n \text{ 很大時會趨近於 } e^3 \approx 2.718^3 = 20.079 \cdots \approx 20.08$$

類題

12 (C)(E) 13 7

12 (A) 到無限大 (B)(D) 會靠近 1 (C) 與 (E) 合，故選 (C)(E)

$$13 a_n = (1+\frac{2}{n})^n = (1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2} \times 2} = [(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2$$

$$n \text{ 很大時會靠近 } e^2 \approx 2.718^2 = 7.3 \cdots \therefore k = 7$$

範例 6

$$a = 10000 \times (1+20\%) = 12000$$

將一年切成 n 等分，期利率為 $\frac{20\%}{n}$ ，共 n 期

$$\text{本利和為 } 10000(1+\frac{20\%}{n})^n = 10000[(1+\frac{1}{5n})^{5n}]^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{所以 } b = 10000 \times e^{\frac{1}{5}} \approx 10000 \times 1.2214 = 12214$$

類題

14 16487 15 13500

14 把一年切成 n 等分，期利率為 $\frac{50\%}{n}$ ，共 n 期

$$\text{本利和為 } 10000 \times (1+\frac{50\%}{n})^n = 10000 \times [(1+\frac{1}{2n})^{2n}]^{\frac{1}{2}}$$

$$n \text{ 很大時靠近 } 10000 \times e^{\frac{1}{2}} \approx 10000 \times 1.6487 = 16487$$

15 把一年切成 n 等分，三年共 $3n$ 期，期利率為 $\frac{10\%}{n}$

$$\text{三年的本利和為 } 10000 \times (1+\frac{10\%}{n})^{3n} = 10000[(1+\frac{1}{10n})^{10n}]^{\frac{3}{10}}$$

$$n \text{ 很大時靠近 } 10000 \times e^{0.3} \approx 10000 \times 1.35 = 13500$$

範例 7

$$1. (1) \ln 2 = \log_e 2 = \frac{\log 2}{\log e} \approx \frac{0.3010}{0.4343} \approx 0.6931$$

$$\begin{aligned} (2) \ln 18 &= \log_e 18 = \frac{\log 18}{\log e} = \frac{\log 2 + 2 \log 3}{\log e} \\ &\approx \frac{0.3010 + 2 \times 0.4771}{0.4343} \approx 2.8902 \end{aligned}$$

(按計算機是 2.8904)

$$2. (1) \ln(x^2 y) = 2 \ln x + \ln y = 2 \times 7 + 5 = 19$$

$$(2) \ln \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2} (\ln x - \ln y) = \frac{1}{2} (7 - 5) = 1$$

類題

16 1.9459 ; -3.8918 17 (D) 18 (1) 11.4 (2) 12.5

$$16 \ln 7 = \frac{\log 7}{\log e} \approx \frac{0.8451}{0.4343} \approx 1.9459$$

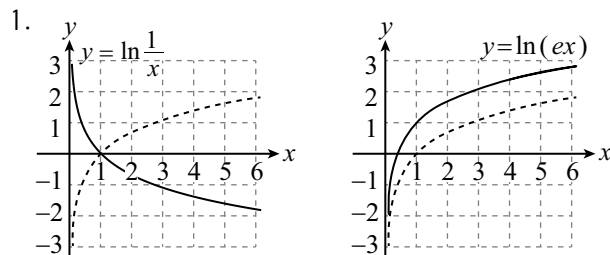
$$\ln \frac{1}{49} = -2 \ln 7 \approx -2 \times 1.9459 = -3.8918$$

$$17 \ln 100 = \frac{\log 100}{\log e} \approx \frac{2}{0.4343} \approx 4.6051, \text{ 故選 (D)}$$

$$18 (1) \ln(abc) = \ln a + \ln b + \ln c = 2.1 + 3.7 + 5.6 = 11.4$$

$$\begin{aligned} (2) \ln \frac{a^2 b^3}{\sqrt{c}} &= 2 \ln a + 3 \ln b - \frac{1}{2} \ln c \\ &= 2 \times 2.1 + 3 \times 3.7 - \frac{1}{2} \times 5.6 = 12.5 \end{aligned}$$

範例 8



$$(1) y = \ln \frac{1}{x} = -\ln x, \text{ 為 } y = \ln x \text{ 對 } x \text{ 軸上下顛倒}$$

$$(2) y = \ln(ex) = \ln e + \ln x = \ln x + 1$$

為 $y = \ln x$ 向上平移 1 單位

$$2. p = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2, q = \ln 12 = 2 \ln 2 + \ln 3$$

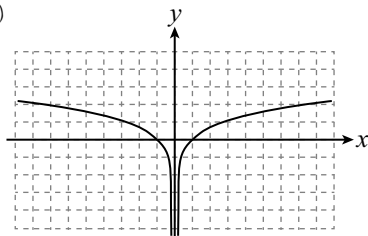
$$m = \frac{q-p}{12-\frac{1}{2}} = \frac{(2\ln 2 + \ln 3) - (-\ln 2)}{\frac{23}{2}} \\ = \frac{2}{23}(3\ln 2 + \ln 3) \approx \frac{2}{23}(3 \times 0.6931 + 1.0986) \approx 0.2763$$

在 0.2 與 0.3 之間，選(C)

類題

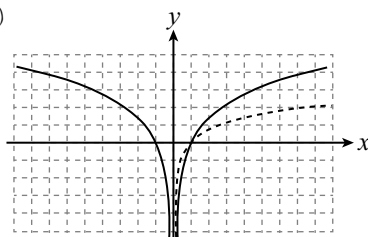
19 見詳解 20 0.3

19 (1)



$y = \ln(-x), x < 0$ ，為 $y = \ln x$ 對 y 軸左右顛倒

(2)



$y = \ln(x^2) = 2 \ln|x|$ ，為 $y = \ln x$ 的圖形對 y 軸左右對稱之後，再以 x 軸為基準上下拉長為 2 倍

$$20 \overline{AB} \text{ 斜率} = \frac{\ln 8 - 0}{8 - 1} = \frac{3 \ln 2}{7} \approx \frac{3 \times 0.693}{7} = \frac{2.079}{7} \\ = 0.297 \approx 0.3$$

1-2 平面圖形的比例與設計

範例研習特區 試題參見講義 P.12

範例 1

1. 設 A0 的長度為 $\sqrt{2}k$ ，寬為 k

則面積為 $\sqrt{2}k \times k = 1$

$$\text{即 } k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 所以 } k = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx \frac{1}{1.1892}$$

$$\text{A4 的長度為 } \sqrt{2}k \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}k$$

$$\approx \frac{1.4142}{4} \times \frac{1}{1.1892} \approx 0.2973 \text{ 公尺}$$

即 29.7 公分

$$\text{A4 的寬度為 } k \times \frac{1}{4} = \frac{k}{4} \approx \frac{1}{4} \times \frac{1}{1.1892} \approx 0.2102 \text{ 公尺}$$

即 21.0 公分

2.【再想一想】32

A0 紙一張可切得 2 張 A1，再切得 4 張 A2，再切得 8 張

A3，最後切得 16 張 A4，而 $\frac{500}{16} = 31.25$ ，所以需要 32 張

類題

1 35.4；25 2 127

1 容易看出 B0 紙的長度為 $\sqrt{2}$ 公尺，寬為 1 公尺

$$\text{B4 的長為 } \sqrt{2} \times \frac{1}{4} \approx \frac{1.4142}{4} = 0.35355$$

公尺，約為 35.4 公分

$$\text{B4 的寬為 } 1 \times \frac{1}{4} = 0.25 \text{ 公尺}$$

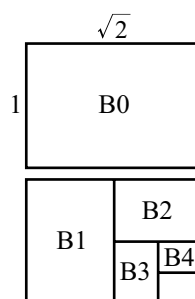
即為 25 公分

2 一張 B0 紙的面積是 A0 紙的 $\sqrt{2}$ 倍

所以 B4 紙的面積也是 A4 紙的 $\sqrt{2}$ 倍

均為 500 張一包，所以 B4 一包的合理售價應為

$$90 \times \sqrt{2} \approx 90 \times 1.414 = 127.26 \approx 127$$



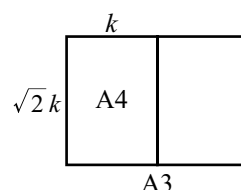
範例 2

若 A4 的寬為 k 公分

則長為 $\sqrt{2}k$ 公分，即為 A3 的寬

所以邊長由 k 變成 $\sqrt{2}k$

放大的倍率為 $\sqrt{2} \approx 1.414 \approx 141\%$



類題

3 71 4 119

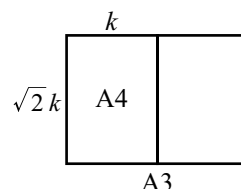
3 設 A4 的寬為 k 公分

則長度為 $\sqrt{2}k$ 公分

即為 A3 的寬

所以邊長由 $\sqrt{2}k$ 縮小為 k

$$\text{縮小的倍率為 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707 \approx 71\%$$



4 由範例 1 知 A4 的寬為 $\frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \times 100 \approx \frac{25}{1.1892}$ 公分

由類題 1 知 B4 的寬為 25 公分

所以邊長由 $\frac{25}{1.1892}$ 變成 25

放大的倍率為 $1.1892 \approx 119\%$

範例 3

$$\overline{AD} = \overline{AB} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{5}+1$$

$$\text{則 } \overline{PS} = (\sqrt{5}+1) - 2 = \sqrt{5}-1$$

$$\overline{PQ} = \overline{PS} \div \frac{\sqrt{5}+1}{2} = (\sqrt{5}-1) \times \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 3-\sqrt{5}$$

$$\text{所求} = \underbrace{(\sqrt{5}+1)}_{\overline{AD}} \times 2 - \underbrace{\pi \times 1^2}_{\overline{AB} \text{ 兩個半圓}} + \underbrace{(\sqrt{5}-1)}_{\overline{PS}} \times \underbrace{(3-\sqrt{5})}_{\overline{PQ}}$$

$$= 2 + 2\sqrt{5} - \pi + (4\sqrt{5} - 8) = -6 + 6\sqrt{5} - \pi$$

$$\therefore (a, b, c) = (-6, 6, -1)$$

類題

5 (1)(D) (2)(C) 6 (D)

5 (C)長：寬約為 1.4，符合影印紙的尺寸

(D)長：寬約為 1.6，接近黃金比例

6 $29.7 \div 1.618 \approx 18.4$ ，所以寬度減少 $21 - 18.4 = 2.6$ 公分即可，選(D)

範例 4

1. 設 $\overline{AP} = x$ ，則 $\overline{BP} = 10 - x$ 且 $\overline{AP} < \overline{BP}$

由 $\overline{AB} : \overline{BP} = \overline{BP} : \overline{AP}$ ，得 $\frac{10}{10-x} = \frac{10-x}{x}$

$$\therefore 10x = (10-x)^2 \quad \therefore 0 = x^2 - 30x + 100$$

用公式解得 $x = \frac{30 \pm \sqrt{900-400}}{2}$ (取負) $= 15 - 5\sqrt{5}$

近似值為 $15 - 5 \times 2.236 = 15 - 11.18 = 3.82 \approx 3.8$

2. 設邊長 $\overline{AB} = 1$

則 $\overline{PC} = 1$ ， $\angle ABC = (5-2) \times 180^\circ \times \frac{1}{5} = 108^\circ$
內角形

由餘弦定理 $\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 108^\circ$

$$= 2 + 2 \cos 72^\circ = 2 + 2 \sin 18^\circ$$

$$= 2 + 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

則 $\overline{AC} : \overline{CP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 為黃金比例

所以 P 為黃金分割點

類題

7(D) 8 見詳解

7 應為 $\frac{1}{0.618} \approx 1.618$ ，即 $\frac{1}{1.236} \approx 0.809$ ，故選(D)最接近

8 設底邊 $\overline{BC}$ 為 1，腰長 $\overline{AB} = \overline{AC} = x$

$$\text{則 } 1^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 36^\circ$$

$$\text{即 } 1 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = x^2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{則 } x = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}，\text{得證}$$

範例 5

設 $A(0,0)$ ， $\overrightarrow{AB_1}$ 為 $y = \sqrt{3}x \cdots ①$

C_1 為 $(\sqrt{3}, -3)$ ， P 為 $(0, -2)$

$\overline{PC_1}$ 的斜率為 $\frac{(-3)-(-2)}{\sqrt{3}-0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{PC_1}$ 的點斜式為 $y+2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-0)$

即 $x + \sqrt{3}y = -2\sqrt{3} \cdots ②$

解①②得 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $y = -\frac{3}{2}$ ，得 B_3 為 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$

$\therefore L_2$ 與 L_3 的間距為 $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

類題

9 $\frac{45}{2}$

9 令 $A(0,0)$ ， $B_2(-15, -15)$ ， $C_1(45, -45)$

$\overrightarrow{B_2C_1}$ 的斜率 $\frac{(-15)-(-45)}{(-15)-45} = \frac{30}{-60} = -\frac{1}{2}$

方程式為 $y+15 = -\frac{1}{2}(x+15)$ ，即 $x+2y = -45$

令 $x=0$ 代入，得 $y = -\frac{45}{2}$ ，所求 $= (15+30) - \frac{45}{2} = \frac{45}{2}$

範例 6

① 設甲站在 Q 的圖中身長為 x

則 $\frac{9}{9+4} = \frac{3}{x}$ ，得 $x = \frac{39}{9} < 5$ ，所以乙較高

② 若乙的實際身高為 k 公分，則 $\frac{39}{9} : 156 = 5 : k$

$$\therefore k = 156 \times 5 \div \frac{39}{9} = 156 \times 5 \times \frac{9}{39} = 180$$

類題

10 25 11 5

10 設所求為 x 公分，則由相似形知 $\frac{18}{18+12} = \frac{15}{x}$

得 $x = 25$

11 過 P 作 L 的平行線交 $\overline{AQ}$ 於 R

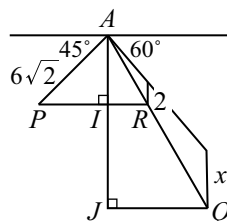
A 投影到 $\overline{PR}$ 為 I

Q 投影到 $\overline{AI}$ 為 J

則 $\overline{AI} = 6$ ， $\overline{AR} = 4\sqrt{3}$

設乙旗竿立於 Q 的畫中長度為 x

$$\text{則 } \frac{4\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{2}{x} \quad \therefore x = 5$$



範例 7

此圖共包含五個長方形，四個半徑為 60 的四分之一圓及兩個四分之一環

① 五個長方形面積

$$= \frac{60 \times 60 \times 2}{\text{上方}} + \frac{180 \times 900 \times 2}{\text{左右}} + \frac{600 \times 180}{\text{下方}} = 7200 + 324000 + 108000 = 439200$$

② 上方四個四分之一圓的面積 $= (\pi \times 60^2 \times \frac{1}{4}) \times 4 = 3600\pi$

③ 下方兩個四分之一環的面積

$$= (\pi \times 300^2 - \pi \times 120^2) \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{90000\pi - 14400\pi}{2} = 37800\pi$$

所求 $= 439200 + 3600\pi + 37800\pi$

$$\approx 439200 + 41400 \times 3.1416 \approx 569262 \text{ 平方公分}$$

類題

12 $96 + 15\pi$

12 此圖可重新拼貼成三個長方形及一個環形

$$\text{所求} = (10 \times 3 + 10 \times 3 + 12 \times 3) + (\pi \times 4^2 - \pi \times 1^2)$$



$$= 96 + 15\pi$$

範例 8

$$(1) \text{ 因 } \cos \angle KPB = \frac{\overline{PM}}{\overline{PK}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \angle KPB = \cos^{-1} \frac{1}{3} \approx 70.53^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \widehat{AK} = \widehat{BK} &\approx 2\pi \times 6 \times \frac{70.53^\circ}{360^\circ} = \frac{7053\pi}{3000} \\ &\approx 2.351 \times 3.142 = 7.386842 \approx 7.39 \end{aligned}$$

$$(2) \overline{KM} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{得 } \triangle ABK = 8 \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 16\sqrt{2}$$

$$\text{弓形 } \widehat{BK} \approx \pi \times 6^2 \times \frac{70.53^\circ}{360^\circ} - 6 \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 7.053\pi - 12\sqrt{2}$$

.....
扇形 PBK
.....
△PBK

$$\begin{aligned} \text{所求} &\approx 16\sqrt{2} + (7.053\pi - 12\sqrt{2}) \times 2 = 14.106\pi - 8\sqrt{2} \\ &\approx 14.106 \times 3.142 - 8 \times 1.414 \\ &= 44.321052 - 11.312 \approx 33.01 \end{aligned}$$

類題

$$\text{13 (1) } 8\theta \quad (2) 16\theta - \sqrt{15} \quad \text{14 } 151.04^\circ$$

$$\text{13 令 } \overline{AB} \text{ 中點為 } M, \text{ 則 } \overline{PM} = 1, \overline{PK} = 4, \overline{KM} = \sqrt{15}$$

$$\therefore \cos \angle BPK = \frac{\overline{PM}}{\overline{PK}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{得 } \angle BPK = \cos^{-1} \frac{1}{4} = \theta \text{ (約為 } 1.318 \text{ 弧度, 即 } 75.52^\circ \text{)}$$

$$(1) \text{ 弧長 } \widehat{AK} + \widehat{BK} = \widehat{AK} \times 2 = (2\pi \cdot 4 \cdot \frac{\theta}{2\pi}) \times 2 = 8\theta$$

$$(2) \triangle ABK = 6 \times \sqrt{15} \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{15}$$

$$\text{弓形 } \widehat{AK} = \text{弓形 } \widehat{BK}$$

$$= (\pi \cdot 4^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi}) - 4 \times \sqrt{15} \times \frac{1}{2} = 8\theta - 2\sqrt{15}$$

.....
扇形 PBK
.....
△PBK

$$\therefore \text{拱形 } ABK \text{ 面積} = 3\sqrt{15} + (8\theta - 2\sqrt{15}) \times 2 = 16\theta - \sqrt{15}$$

$$\text{14 因 } \cos \angle BPK = \frac{\overline{PM}}{\overline{PK}} = \frac{1}{4} \quad \therefore \angle BPK = \cos^{-1} \frac{1}{4} \approx 75.52^\circ$$

則切線 L 與 $\overline{KM}$ 的銳夾角也是 75.52°

所以 L 、 M 的鈍夾角為 $75.52^\circ \times 2 = 151.04^\circ$ ，即所求