目次

123日的淬鍊

8 三角函數

POINT!
學測命題重點

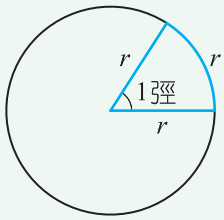
- 正弦與餘弦的和差角及倍角公式
- 正餘弦的疊合

實事求是

概念 1 弧度量的定義

學測 106

在圓周上截取與半徑等長之弧，則此弧所對的圓心角稱為 1 弳（或 1 弧度）。



註 (1) $180^\circ=\pi$ 弳，$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弳 ≈ 0.0175 弳

1 弳 $=(\dfrac{180}{\pi})^\circ\approx 57.2958^\circ$。

(2)若一個角以弳（或弧度）為單位，則通常省略不寫。例 $\theta=90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$。

練習 1 基本

試將下列角度換為弳，或將弳換為角度。

(1) 45°　(2) 60°　(3) 120°　(4) $\dfrac{\pi}{12}$　(5) $\dfrac{\pi}{8}$　(6) $\dfrac{\pi}{6}$　(7) $\dfrac{-4\pi}{3}$。

解

練習 2 基本

當 3 點 10 分時，鐘面上時針與分針的銳夾角為多少弳？

解

練習 3 進階

試求下列各題：

(1)有多少個實數 x 滿足 $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 且 $\tan x<\sin x^\circ$？

(A) 0 個　(B) 1 個　(C) 2 個　(D)無限多個

(2)若 $t=\sin(\pi^2)$，則下列何者正確？

(A) $-1<t<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<t<0$　(C) $t=0$　(D) $0<t<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解

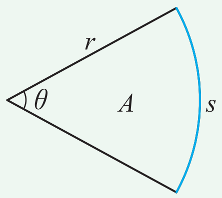
概念2 扇形的弧長與面積

學測 109

設扇形的半徑為 r，且其圓心角為 θ 弳，則：

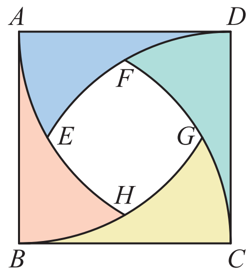
1. 扇形的弧長 $s=r\theta$。
2. 扇形的面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rs$。

註 扇形的周長為 $s+2r$。



練習4 基本

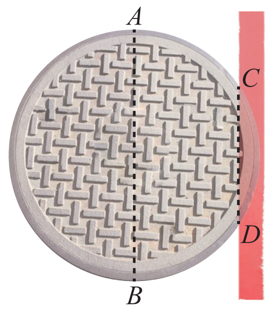
就讀美術班的瓊芝，利用暑假時間參加「用藝術改變社區」的活動，負責在老舊社區的牆壁進行藝術彩繪。右圖為瓊芝的其中一個作品。此圖為一個邊長 1 公尺的正方形 $ABCD$，並以 A、B、C、D 四個頂點為圓心，半徑為 1 公尺所畫成的，將原先的正方形分割成五個區塊，其中外圍的四個區塊大小相同且分別塗上四種不同顏色，而中間區塊則不上色。求圖中不上色的區塊周長（即弧 $\overset{\frown}{EF}$、弧 $\overset{\frown}{FG}$、弧 $\overset{\frown}{GH}$、弧 $\overset{\frown}{HE}$ 四個弧的弧長總和）。



解

練習5 基本

如右圖，有一直徑為 80 公分的圓形人孔蓋（即 $\overline{AB}=80$），其中有一弓形區域被路邊劃設的禁停紅線所遮蔽。若 $\overline{CD}\,/\!/\,\overline{AB}$ 且此兩平行線的距離為 $20\sqrt{3}$ 公分，求該圓形人孔蓋未被禁停紅線所遮蔽的區域面積。

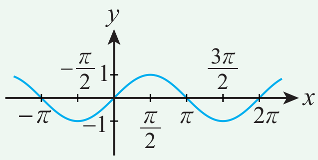
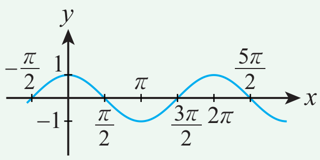
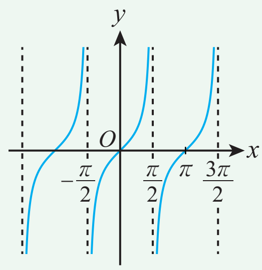


解

概念3 三角函數的圖形

1. **週期函數**：若存在正數 p，使得 $f(x+p)=f(x)$ 恆成立，則稱函數 $f(x)$ 為週期函數，而滿足此條件的最小正數 p 即稱為此函數的週期。

2. 三角函數

函　數	正弦函數 $y=\sin x$	餘弦函數 $y=\cos x$	正切函數 $y=\tan x$
圖　形			
定義域	$\{x \mid x\in R\}$	$\{x \mid x\in R\}$	$\{x \mid x\in R$ 且 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in Z\}$
值　域	$\{y \mid -1\leq y\leq 1\}$	$\{y \mid -1\leq y\leq 1\}$	$\{y \mid y\in R\}$
週　期	2π	2π	π
振　幅	1	1	
漸近線			$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in Z$
對稱軸	通過最高點或最低點的鉛直線	通過最高點或最低點的鉛直線	
對稱中心	圖形與 x 軸的交點	圖形與 x 軸的交點	圖形或漸近線與 x 軸的交點

註 (1)因為 $\sin(-x)=-\sin x$，所以 $y=\sin x$ 的圖形對稱於原點。

(2)因為 $\cos(-x)=\cos x$，所以 $y=\cos x$ 的圖形對稱於 y 軸。

(3)因為 $\tan(-x)=-\tan x$，所以 $y=\tan x$ 的圖形對稱於原點。

練習 6 基本

下列敘述正確請畫「○」，錯誤請畫「×」。

______(A)由 $\tan(x+2\pi)=\tan x$ 可知 $y=\tan x$ 的週期為 2π

______(B) $y=\sin x$ 與 $y=x^2$ 的定義域相同

______(C) $y=\tan x$ 與 $y=x^2$ 的定義域相同

______(D) $y=\tan x$ 與 $y=x^2$ 的值域相同

______(E) $y=\tan x$ 與 $y=x^3$ 的值域相同

______(F) $y=\sin x$ 的圖形對稱於 y 軸

______(G) $y=\cos x$ 的圖形對稱於點 $(\frac{3\pi}{2},0)$

______(H) $y=\tan x$ 與 $y=2021$ 的圖形不相交

解

練習 7 基本

試求下列各題：

(1)當 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$ 時，求方程式 $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ 的解。

(2)當 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時，求不等式 $\sin x > \cos x$ 的解。

解

練習 8 基本

試比較 $a = \tan 1$、$b = \tan 2$、$c = \tan 3$、$d = \tan 4$ 的大小關係。

解

練習 9 進階

試求下列各題：

(1)求方程式 $6\cos x - x = 0$ 解的個數。

(2)當 $0 \leq x \leq 4\pi$ 時，求方程式 $\cos x = \frac{-1}{4}$ 的所有實根總和。

解

概念4 三角函數圖形的平移與伸縮

1. $y=f(x)$ 的圖形平移：設 $k>0$

(1)向右平移 k 單位可得 $y=f(x-k)$，向左平移 k 單位可得 $y=f(x+k)$。

(2)向上平移 k 單位可得 $y=f(x)+k$，向下平移 k 單位可得 $y=f(x)-k$。

2. $y=f(x)$ 的圖形伸縮：設 $k>0$

(1)水平伸縮為原來的 k 倍可得 $y=f(\frac{x}{k})$。

(2)鉛直伸縮為原來的 k 倍可得 $y=kf(x)$。

3. 正弦函數圖形的平移與伸縮：設 a、b、c、d 均為正數

$y=\sin x$ 的圖形 $\xrightarrow[\text{為原來的 } a \text{ 倍}]{\text{鉛直伸縮}}$ $y=a\sin x$ 的圖形 $\xrightarrow[\text{為原來的 } \frac{1}{b} \text{ 倍}]{\text{水平伸縮}}$ $y=a\sin bx$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{c}{b} \text{ 單位}]{\text{向右平移}}$ $y=a\sin b(x-\frac{c}{b})=a\sin(bx-c)$ 的圖形 $\xrightarrow[d \text{ 單位}]{\text{向上平移}}$ $y=a\sin(bx-c)+d$ 的圖形。

註 (1)鉛直伸縮會改變圖形的振幅，振幅變為 a。

(2)水平伸縮會改變圖形的週期，週期變為 $\frac{2\pi}{b}$。

(3)餘弦函數圖形的平移與伸縮的概念與正弦函數相同。

(4)因為 $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，所以將 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位可得 $y=\cos x$ 的圖形。

練習10 基本

試問將 $y=\sin 2x$ 的圖形作適當平移，可得下列哪些函數圖形？

(A) $y=\sin x$　(B) $y=2\sin x$　(C) $y=\sin(2x-\frac{\pi}{5})$

(D) $y=\cos x+1$　(E) $y=\cos 2x-3$

解

獨家祕方

餘弦函數圖形可由正弦函數圖形經由平移產生

練習11 基本

若函數 $y=4\cos(\frac{x}{2}-k)$ 的圖形對稱於點 $(\frac{4\pi}{3},0)$，求最小正數 k。

解

精熟 1 三角函數圖形的應用 ▶▶▶ 閱讀理解題型

概念 3　概念 4　概念 7

試問在 $\frac{\pi}{2} < x \le 2\pi$ 的範圍中，$y = -\cos x$ 與 $y = 4\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個

解

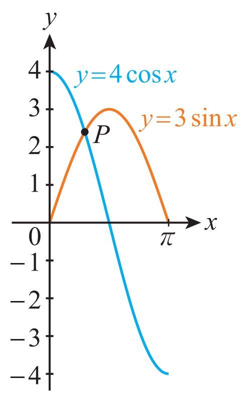
獨家祕方

$y=\cos x$ 與 $y=-\cos x$ 的圖形對稱於 x 軸

類題 1A 基本

如右圖，在 $0 \le x \le \pi$ 的範圍中，$y = 3\sin x$ 與 $y = 4\cos x$ 的函數圖形恰有一交點 P，求 P 點與 x 軸的距離。

解



類題 1B 基本

設 $a=\sin 1$，$b=\sin 2$，$c=\sin 3$，$d=\sin 4$，試比較 a、b、c、d 四數的大小關係。

解

獨家祕方

利用 $y=\sin x$ 的圖形或 1 弳 $\approx 57^\circ$ 來比較其大小關係

精熟 2 和差角與倍角公式的應用 ▶▶▶ 批判思考題型

概念 6 概念 7

若 α、β 為不等於 $\frac{\pi}{2}$ 的正實數，且 $0<\alpha+\beta<\pi$，試選出正確的選項。

(A) $\sin\alpha+\sin\beta>0$　(B) $\sin\alpha\cos\beta>0$　(C) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}>0$

(D) $\tan\alpha+\tan\beta<0$　(E) $\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}>0$

解

類題 2A 基本

若 $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，且 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，求下列各值：

(1) $\sin 2\theta$　(2) $\cos 2\theta$　(3) $\sin\frac{\theta}{2}$　(4) $\cos\frac{\theta}{2}$　(5) $\cos 3\theta$。

解

類題 2B 基本

設 $a=\sin 108^\circ\cos 102^\circ+\cos 108^\circ\sin 102^\circ$，$b=2\sin 107^\circ\cos 107^\circ$，$c=2\cos^2 107^\circ-1$，

$d=\frac{2\tan 107^\circ}{1-\tan^2 107^\circ}$，試比較 a、b、c、d 四數的大小關係。

解

類題 2C 進階

已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，試回答下列各題：

(1)若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos\frac{\theta}{2}$　(2)若 θ 為第一象限角，求 $\cos\frac{\theta}{2}$。

解

類題 4B 基本

若函數 $y=a\sin 2x+\cos 2x$ 的圖形對稱於直線 $x=\frac{-\pi}{8}$，求常數 a。

解

類題 4C 進階

當 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$ 時，求函數 $y=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x$ 的最大值。

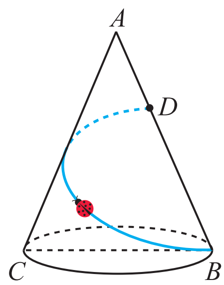
解

綜合實力測驗

一、單選題

____ 1.如右圖，有一直圓錐底圓直徑 $\overline{BC}=4$，斜高 $\overline{AB}=6$，D 點位於 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AD}=2$。若有隻昆蟲自 B 點出發，沿著圓錐側面爬行一圈到達 D 點，則此隻昆蟲所爬行的最短路徑長為下列何者？

(A) $\sqrt{40-12\sqrt{3}}$　(B) $2\sqrt{7}$　(C) $2\sqrt{13}$　(D) $\sqrt{40+12\sqrt{3}}$　(E) $4\pi-4$



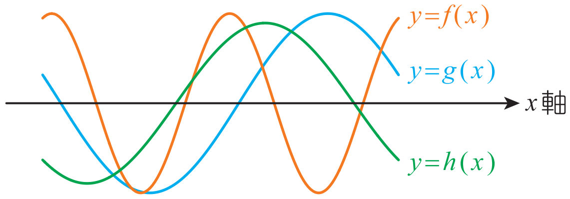
____ 2.若 θ 為銳角，且 $\frac{1}{\cos\theta}$、$\cos\theta$、$\sin\theta$ 成等差數列，則 $\tan 2\theta$ 之值為下列何者？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) 2　(C) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　(D) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$　(E) -2

____ 3.試求以 $x+\sin 170^\circ$ 除 $16x^3-12x+2016$ 所得的餘式為下列何者？

(A) 2016　(B) 2017　(C) 2018　(D) 2019　(E) 2020

_____ 4.將函數 $y=3\sin x-\cos x$、$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$ 所代表的函數應為下列哪一個選項？

(A) $f(x)=3\sin x-\cos x$，$g(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$h(x)=2\sin x+2\cos x$

(B) $f(x)=3\sin x-\cos x$，$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$g(x)=2\sin x+2\cos x$

(C) $g(x)=3\sin x-\cos x$，$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$h(x)=2\sin x+2\cos x$

(D) $g(x)=3\sin x-\cos x$，$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$f(x)=2\sin x+2\cos x$

(E) $h(x)=3\sin x-\cos x$，$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$g(x)=2\sin x+2\cos x$

| 46% 答對率 | 99 指考甲

二、多選題

_____ 5.遊樂區中有一圓形摩天輪，中心軸高 22 公尺，直徑 40 公尺，逆時針方向運轉一圈需時 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，阿美恰坐在離地最近的位置上，x 分鐘後，阿美離地的高度可表為 $y=a\sin(bx+c)+d$，$a>0$ 且 $b>0$。試問下列選項有哪些是正確的？

(A) $a=20$

(B) $a=40$

(C) $b=\dfrac{2\pi}{15}$

(D) $c=0$

(E) $d=2$

93 指考乙補

_____ 6.x 代表實數，請選出正確的選項：

(A)當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\cos 2x$ 之值恆為正

(B)當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\sin 2x$ 之值恆為正

(C)不論 x 為何，$\cos^2 x-\sin^2 x\le\dfrac{1}{2}$ 恆成立

(D)不論 x 為何，$\sin x\cos x\le\dfrac{1}{2}$ 恆成立

(E)不論 x 為何，$\sin x+\cos x\le\dfrac{3}{2}$ 恆成立

| 33% 全對率 | 96 指考乙

_____ 7.考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。

(A) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(B) f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(C) f 的最小值為 0

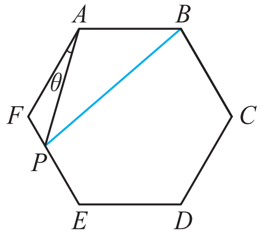
(D) $f(\dfrac{\pi}{10})>f(\dfrac{\pi}{9})$

(E)函數 f 的（最小正）週期為 π

| 32% 全對率 | 102 指考甲

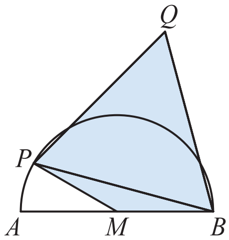
三、填充題

8. 俯哲今天早上 6 點自家裡出發，在 6 點半之前就抵達公車站，此時他看了手錶，發現時針與分針的夾角為 $\frac{11\pi}{36}$ 弳，經過好一陣子，公車終於在 7 點之前抵達車站，若此時俯哲又看了手錶，發現時針與分針的夾角依然為 $\frac{11\pi}{36}$ 弳，則俯哲在公車站共等待______分鐘。



9. 已知 ΔABC 的周長為 280，若 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，則 ΔABC 的外接圓直徑為______。

10. 如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為 3，已知 P 為 $\overline{EF}$ 上一點且 $\angle FAP=\theta$，若 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，$\overline{AP}=\sqrt{13}$，則 $\overline{PB}=$______。



11. 如右圖，已知 P 點位於以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上，而 $\overline{AB}$ 的中點為 M。若 $\overline{AB}=2$，且以 $\overline{PB}$ 為一邊作正 ΔPBQ，則四邊形 $BMPQ$ 面積的最大值為______。

12. 某人在 O 點測量到遠處有一物作等速直線運動。開始時該物位置在 P 點，一分鐘後，其位置在 Q 點，且 $\angle POQ=90^\circ$。再過一分鐘後，該物位置在 R 點，且 $\angle QOR=30^\circ$，請以最簡分數表示 $\tan^2(\angle OPQ)=$______。

| 24% 答對率 | 91 指考甲

13. 在坐標平面上，一道光線通過原點 O 後，沿著 y 軸射向直線 L：$y=\frac{1}{2}x+1$，碰到直線 L 後，假設光線依光學原理（入射角等於反射角）反射後通過 x 軸上的 R 點，則 R 點的 x 坐標為______。（化成最簡分數）

92 學測補

14. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}=$______。（化成最簡根式）

| 19% 答對率 | 102 學測

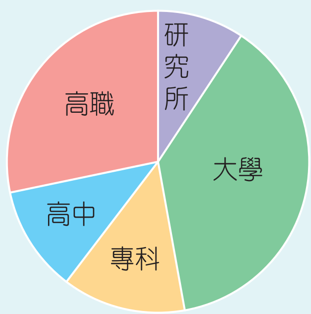
15. 坐標平面上，若拋物線 $y=x^2+2x-3$ 的頂點為 C，與 x 軸的交點為 A、B，則 $\cos\angle ACB=$______。（化成最簡分數）

| 49% 答對率 | 107 學測

四、混合題

第 16.至 17.題為題組

圓餅圖是一個劃分為數個扇形的圓形統計圖表，常用於描述量、頻率或百分比之間的相對關係。在圓餅圖中，每個「切塊的扇形區域」的大小，即表示該項目在整體中所占的比例。根據行政院統計資料庫，右圖為 108 年國人十五歲以上人口教育程度為高職、高中、專科、大學、研究所的圓餅圖，試回答下列各題。



16. 在此圓餅圖中，若教育程度為專科所占的比例為 15%，則該項目在圓餅圖中的扇形所對的圓心角為多少弳？（單選題）______

(A) $\frac{\pi}{12}$　(B) $\frac{3\pi}{20}$　(C) $\frac{\pi}{6}$　(D) $\frac{3\pi}{10}$　(E) $\frac{\pi}{3}$

17. 承 16.題，已知教育程度為高中所占的比例為 10%，而高職所占的比例為研究所的 $\frac{14}{5}$ 倍。若教育程度為高職在圓餅圖中的扇形弧長為 $\frac{56\pi}{25}$ 公分，且研究所在圓餅圖中的扇形面積為 $\frac{8\pi}{5}$ 平方公分，則高中在圓餅圖中的扇形弧長為多少公分？______

第 18.至 19.題為題組

以前衝浪手必須仰賴氣象報告和潮汐表來預測浪況，現在則可以直接在線上查詢波浪預報圖來取得浪況的實用資訊，例如：浪高。已知下表為西灣海水浴場某日時刻 x 時與其海浪高度 y 米的數據：

時刻 x 時	0	3	6	9	12	15	18	21	24
海浪高度 y 米	$\frac{31}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{31}{16}$

設時刻 x 時與其海浪高度 y 米的關係為 $y = a\cos bx + c$，其中 a、b、c 均為正數。試回答下列各題。

18. 下列關於函數 $y = a\cos bx + c$ 的敘述，哪些是正確的？（多選題）______

(A)此函數圖形的振幅為 $\frac{5}{4}$

(B)此函數圖形的週期為 6

(C)此函數圖形對稱於點 $(12, \frac{31}{16})$

(D)此函數圖形對稱於直線 $x = 12$

(E)此函數圖形通過點 $(2, \frac{13}{8})$

19. 若根據經驗得知當海浪高度至少為 1 米時，較適合衝浪手衝浪，則該日西灣海水浴場在時刻 6 時至時刻 18 時之間，適合衝浪的時間共有幾個小時？______

名言佳句

若你解不出某道題，則肯定是有一個更容易的問題你尚未解決，找到它並解決它！突破與否往往在於有無堅強的信念，以及有無勇氣去付諸行動。

8 三角函數

實事求是

1 **練習1** (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{2\pi}{3}$ (4) 15° (5) 22.5°
(6) 30° (7) -240°

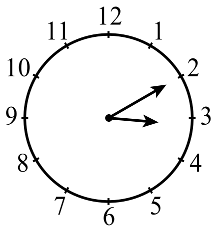
練習2 $\frac{7\pi}{36}$

作圖如右，每分鐘時針走

$\frac{1}{60}\times\frac{2\pi}{60}\times 5=\frac{\pi}{360}$ 弳

所以 3 點 10 分時，時針與分針的

銳夾角為 $\frac{2\pi}{60}\times 5+10\times\frac{\pi}{360}=\frac{7\pi}{36}$



練習3 (1)(D) (2)(B)

(1)① $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 時，$\tan x<0$

② $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 時，可知 $\frac{3}{2}\times 3<\frac{3\pi}{2}<x<2\pi<2\times 4$

$\Rightarrow\ (\frac{9}{2})^\circ<x^\circ<8^\circ\ \Rightarrow\ \sin x^\circ>0$

$\therefore$ 當 $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 時，$\tan x<\sin x^\circ$ 恆成立

(2) $3\pi<\pi^2<\frac{10}{3}\pi\ \Rightarrow\ \sin\pi>\sin(\pi^2)>\sin\frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow\ 0>t>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 **練習4** $\frac{2\pi}{3}$ 公尺

ΔBCF 為正三角形

所以 $\angle BCF=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ \angle DCF=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

同理 $\angle BCE=\frac{\pi}{6}$，因此 $\angle ECF=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ 弧 $\overset{\frown}{EF}$ 的弧長為 $1\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

故所求為 $4\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ 公尺

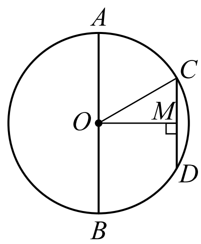
練習5 $\frac{4000\pi}{3}+400\sqrt{3}$ 平方公分

設圓心為 O，且 O 在 $\overline{CD}$ 上的投影點

為 M，作圖如右

可知 $\overline{OC}=40$，$\overline{OM}=20\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \angle COM=\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ \angle COD=\frac{\pi}{3}$



所以弓形區域面積為

$\frac{1}{2}\times 40^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 40^2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{800\pi}{3}-400\sqrt{3}$

故所求 $=40^2\times\pi-(\frac{800\pi}{3}-400\sqrt{3})$

$=\frac{4000\pi}{3}+400\sqrt{3}$ 平方公分

3 **練習6** (B)(E)(G)為「○」，其餘為「×」

(A)週期為 π (B)定義域皆為 $\{x\mid x\in R\}$

(C) $y=\tan x$ 的定義域為 $\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in Z\}$，與 $y=x^2$ 的定義域 $\{x\mid x\in R\}$ 不同

(D) $y=\tan x$ 的值域為 $\{y\mid y\in R\}$，與 $y=x^2$ 的值域 $\{y\mid y\geq 0\}$ 不同

(E)值域皆為 $\{y\mid y\in R\}$

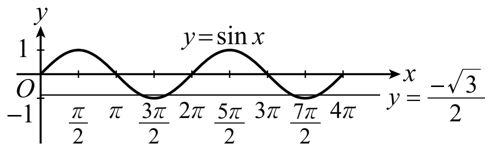
(F)因為 $\sin(-x)\neq\sin x$，所以圖形不對稱於 y 軸

(G)因為 $(\frac{3\pi}{2},0)$ 為 $y=\cos x$ 的圖形與 x 軸的交點，所以對稱於點 $(\frac{3\pi}{2},0)$

(H)因為 $y=\tan x$ 的值域為 $\{y\mid y\in R\}$，所以與 $y=2021$ 的圖形會相交

4 **練習7** (1) $x=\frac{5\pi}{3}$，$\frac{10\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$

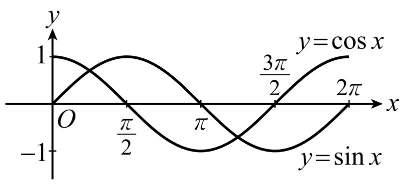
(1) $y=\sin x$ 與 $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ 的相交情形如下圖



因為 $\sin\frac{5\pi}{3}=\sin\frac{10\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

所以其解為 $x=\frac{5\pi}{3}$，$\frac{10\pi}{3}$

(2) $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的圖形如下



因為 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$，$\sin\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}$

所以其解為 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$

練習8 $a>d>c>b$

作圖如右

故 $a>d>c>b$

《另解》

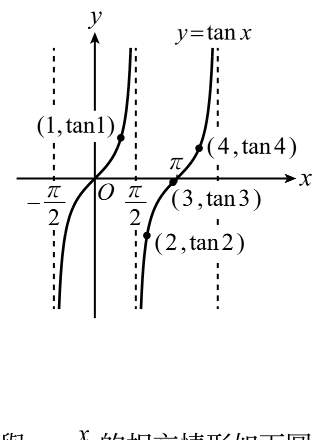
$a=\tan 1\approx\tan 57^\circ$

$b=\tan 2\approx\tan 114^\circ=-\tan 66^\circ$

$c=\tan 3\approx\tan 171^\circ=-\tan 9^\circ$

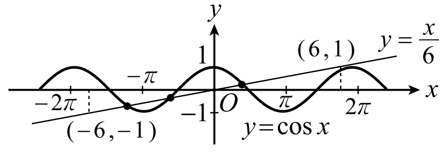
$d=\tan 4\approx\tan 228^\circ=\tan 48^\circ$

故 $a>d>c>b$



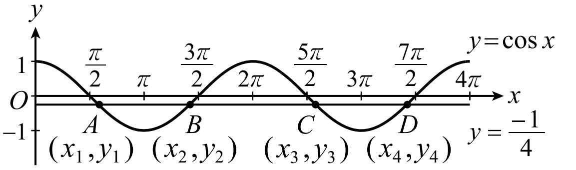
練習9 (1) 3 (2) 8π

(1)原式可得 $\cos x=\frac{x}{6}$，$y=\cos x$ 與 $y=\frac{x}{6}$ 的相交情形如下圖



所以 $y=\cos x$ 與 $y=\frac{x}{6}$ 有 3 個交點，故其解共有 3 個

(2) $y=\cos x$ 與 $y=\dfrac{-1}{4}$ 的相交情形如下圖



可知共有 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 四個交點，又 A 與 B 對稱於 $x=\pi$，C 與 D 對稱於 $x=3\pi$

所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\pi$，$\dfrac{x_3+x_4}{2}=3\pi$

故所求 $=x_1+x_2+x_3+x_4=2\pi+6\pi=8\pi$

5 **練習10** (C)(E)

(A)將 $y=\sin 2x$ 的圖形水平伸縮為原來的 2 倍可得 $y=\sin x$ 的圖形

(B)將 $y=\sin 2x$ 的圖形水平伸縮為原來的 2 倍、鉛直伸縮為原來的 2 倍，可得 $y=2\sin x$ 的圖形

(C)將 $y=\sin 2x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{10}$ 單位可得 $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{5})$ 的圖形

(D)將 $y=\sin 2x$ 的圖形水平伸縮為原來的 2 倍，再向左平 $\dfrac{\pi}{2}$ 單位，向上平移 1 單位，可得 $y=\cos x+1$ 的圖形

(E)將 $y=\sin 2x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位，向下平移 3 單位可得 $y=\cos 2x-3$ 的圖形

練習11 $\dfrac{\pi}{6}$

$(\dfrac{4\pi}{3},0)$ 為 $y=4\cos(\dfrac{x}{2}-k)$ 的圖形與 x 軸的交點

所以 $4\cos(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}-k)=0 \Rightarrow \dfrac{2\pi}{3}-k=\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$

$\Rightarrow k=\dfrac{\pi}{6}-2n\pi$ 或 $\dfrac{7\pi}{6}-2n\pi$，故最小正數 k 為 $\dfrac{\pi}{6}$

6 **練習12** $(2,3,1)$

函數圖形的振幅為 $a=2$，週期為 $\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow b=3$

$x=0$ 代入可得 $2\cos 0+c=3 \Rightarrow c=1$

故序組 $(a,b,c)=(2,3,1)$

練習13 (C)(D)

(A)週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$　(B)最小值 $=-2+1=-1$

(C) $f(\dfrac{\pi}{4})=2\sin(3\times\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})+1=2\sin\dfrac{\pi}{2}+1=3$

(D) $f(\dfrac{7\pi}{12})=2\sin(3\times\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4})+1=2\sin\dfrac{3\pi}{2}+1=-1$

所以直線 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 通過 $f(x)$ 圖形的最低點

即圖形對稱於 $x=\dfrac{7\pi}{12}$

(E)將 $y=2\sin x+1$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 單位可得

$y=2\sin(x-\dfrac{\pi}{12})+1$，再水平伸縮為原來的 $\dfrac{1}{3}$ 倍可得

$y=2\sin(3x-\dfrac{\pi}{12})+1$，將 $y=2\sin x+1$ 的圖形水平伸縮為原來的 $\dfrac{1}{3}$ 倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 單位可得 $f(x)$ 的圖形

練習14 (B)(C)(D)

(A)週期為 $T=\dfrac{2\pi}{120\pi}=\dfrac{1}{60}$ 秒　(B)頻率為 $f=\dfrac{1}{T}=60$ 赫茲

(D)因為 $I=100\sin(120\pi t+\dfrac{\pi}{3})\le 100\times 1=100$，所以最大電流為 100 安培

7 **練習15** (A)(C)(D)(E)

(A)$\because \angle FAC=45^\circ$　$\therefore \angle CAB=45^\circ$

$\Rightarrow \angle ACB=\angle DEC=45^\circ$

(B) $\overline{AF}=\overline{AE}\times\cos(\angle EAF)=\cos(45^\circ-30^\circ)$

(C) $\overline{CE}=\overline{AE}\times\sin(\angle EAC)=\sin 30^\circ$

(D) $\overline{CB}=\overline{AC}\times\cos(\angle ACB)$

$=[\overline{AE}\times\cos(\angle EAC)]\times\cos(\angle ACB)$

$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ$

(E) $\overline{CD}=\overline{CE}\times\sin(\angle DEC)=\sin 30^\circ\sin 45^\circ$

$\overline{AF}=\overline{BC}+\overline{CD}=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

【註】(E)可推得差角公式

$\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

練習16 (1) $\dfrac{7}{6}$　(2) -1

(1) $\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\dfrac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{7}{6}$

(2) $\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{13}{2}}{\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{13}{15}$

$\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta=\dfrac{15}{2}$，故 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$

練習17 45° 與 135°

設兩直線 L_1 與 L_2 的斜角分別為 α 與 β

可知 $\tan\alpha=4$，$\tan\beta=\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4-\frac{3}{5}}{1+4\times\frac{3}{5}}=1$

$\Rightarrow \alpha-\beta=45^\circ \Rightarrow 180^\circ-45^\circ=135^\circ$

故兩直線的夾角為 45° 與 135°

8 **練習18** $y=3$ 與 $x=2$

設通過點 $(2,3)$ 且與直線 $x+y=3$ 的交角為 45° 之直線方程式為 $y-3=m(x-2)$，可知 $\tan 45^\circ=\left|\dfrac{-1-m}{1+(-1)\times m}\right|=1$

$\Rightarrow |1+m|=|1-m| \Rightarrow 1+m=\pm(1-m) \Rightarrow m=0$

過點 $(2,3)$ 且與 $x+y=3$ 交 45° 的直線必有兩條

可知另一條為鉛直線，故所求為 $y=3$ 與 $x=2$

練習19 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\dfrac{9}{13}$

(1)$\because \cos A=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos B=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$　$\therefore \sin A=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin B=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

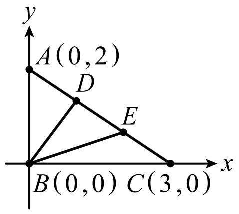
$=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\times(\dfrac{-1}{\sqrt{5}})+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)坐標化，設 $B(0,0)$、$A(0,2)$、$C(3,0)$

作圖如右，可知 $D(1,\frac{4}{3})$、$E(2,\frac{2}{3})$

設 $\angle DBC=\alpha$，$\angle EBC=\beta$

由廣義角三角函數可得



$\tan\alpha=\dfrac{\frac{4}{3}}{1}=\dfrac{4}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{\frac{2}{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$

故 $\tan(\angle DBE)=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{9}{13}$$

練習20 (1) $\dfrac{-24}{25}$ (2) $\dfrac{7}{25}$ (3) $\dfrac{-24}{7}$

(1) $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times(\dfrac{-4}{5})=\dfrac{-24}{25}$

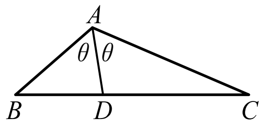
(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times(\dfrac{3}{5})^2=1-\dfrac{18}{25}=\dfrac{7}{25}$

(3) $\tan\theta=\dfrac{-3}{4}$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times(\frac{-3}{4})}{1-(\frac{-3}{4})^2}=\frac{\frac{-3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{-24}{7}$$

練習21 $\dfrac{8}{15}$

設 $\angle BAD=\theta$，作圖如右



$\overline{BD}$ ：$\overline{CD}$

$=\Delta ABD$ 面積：ΔACD 面積

$=3$：5

由內角平分線定理可得 $\overline{AB}$ ：$\overline{AC}=\overline{BD}$ ：$\overline{CD}$ $=3$：5

設 $\overline{AB}=3x \quad\Rightarrow\quad \overline{AC}=5x$，$\overline{AD}=2x$

又 ΔABC 面積 $=\Delta ABD$ 面積 $+\ \Delta ACD$ 面積

$\dfrac{1}{2}\times 3x\times 5x\times\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}\times 3x\times 2x\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times 2x\times 5x\times\sin\theta$

$\Rightarrow\quad 15\times(2\sin\theta\cos\theta)=6\sin\theta+10\sin\theta$

$\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}$

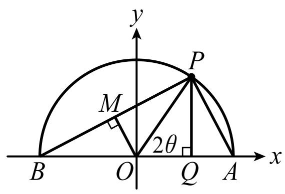
故 $\cos(\angle BAD)=\dfrac{8}{15}$

9 **練習22** (A)(B)(C)(D)(E)

作 $\overline{OM}\perp\overline{PB}$

可知 $\angle OBP=\angle OPB=\theta$

$\angle BPA=90^\circ$



(A) $\overline{PB}=2\overline{BM}$

$\quad=2\times\overline{OB}\times\cos\theta=2\cos\theta$

(B) ΔPAB 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PA}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times 2\cos\theta\times(\overline{AB}\times\sin\theta)=2\cos\theta\sin\theta$

(C) ΔPAB 面積 $=2\cos\theta\sin\theta$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{PQ}=\overline{PQ}$

【註】ΔOPQ 中，$\overline{PQ}=\overline{OP}\times\sin 2\theta=\sin 2\theta$，可得二倍角公式 $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$

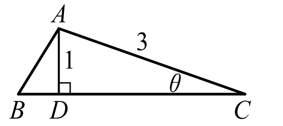
(D) ΔBPQ 中，$\overline{BQ}=\overline{BP}\times\cos\theta=(2\cos\theta)\times\cos\theta=2\cos^2\theta$

(E) $\overline{OQ}=\overline{BQ}-\overline{OB}=2\cos^2\theta-1$

【註】ΔOPQ 中，$\overline{OQ}=\overline{OP}\times\cos 2\theta=\cos 2\theta$，可得二倍角公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

練習23 $\dfrac{27}{23}$

設 $\angle C=\theta$，作圖如右



可得 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$

$\sin B=\sin 3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$

$\quad=-4\times(\dfrac{1}{3})^3+3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{23}{27}$

又 $\sin B=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\overline{AB}}$，故 $\overline{AB}=\dfrac{27}{23}$

練習24 2

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=\frac{-4\sin^3\theta+3\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{4\cos^3\theta-3\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$=(-4\sin^2\theta+3)-(4\cos^2\theta-3)$$

$$=-4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+6=-4+6=2$$

《另解》

原式 $=\dfrac{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sin(3\theta-\theta)}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}$

$\quad=\dfrac{2\sin 2\theta}{\sin 2\theta}=2$

10 **練習25** (1) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$ (3) $\dfrac{-1}{2}$

由 $270^\circ<\theta<360^\circ$，可得 $135^\circ<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ$

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

(3) $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{-2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{-1}{2}$

練習26 (B)(D)(E)(F)

(A) $\angle OBP=\angle OPB=\dfrac{\theta}{2}$

又 $\angle OBP+\angle PAQ=\angle APQ+\angle PAQ=\dfrac{\pi}{2}$

所以 $\angle APQ=\angle OBP=\dfrac{\theta}{2}$

(B) $\overline{AQ}=\overline{OA}-\overline{OQ}=\overline{OA}-\overline{OP}\times\cos\theta=1-\cos\theta$

(C)因為 $\angle OMB=\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，$\overline{OB}=\overline{OA}$

所以 $\overline{OM}\,/\!/\,\overline{AP}$，且 $\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}$

在 ΔAPQ 中，由畢氏定理可得

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AQ}^2+\overline{PQ}^2}=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}$

所以 $\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

【註】ΔBOM 中，$\overline{OM}=\overline{OB}\times\sin\dfrac{\theta}{2}=\sin\dfrac{\theta}{2}$

又 $\overline{OM}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$，所以可推得半角公式

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$，其中 θ 為銳角

(D) ΔBPA 中，由畢氏定理可得

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{PA}^2}=\sqrt{4-(2-2\cos\theta)}=\sqrt{2+2\cos\theta}$

【註】在 ΔBOM 中，$\overline{BM}=\overline{OB}\times\cos\dfrac{\theta}{2}=\cos\dfrac{\theta}{2}$

又 $\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{PB}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$，所以可推得半角公式

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$，其中 θ 為銳角

(E) $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\overline{OP}\times\sin\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

【註】在 ΔAPQ 中，因為 $\angle APQ=\dfrac{\theta}{2}$

所以 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，其中 θ 為銳角

(F) $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\dfrac{\sin\theta}{\overline{OB}+\overline{OQ}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

【註】在 ΔBPQ 中，因為 $\angle PBQ=\dfrac{\theta}{2}$

所以 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$，其中 θ 為銳角

練習27 (B)

由疊合定理可得

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2(\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2})=2\sin(\theta+30^\circ)$

其中 $90^\circ<\theta<180^\circ$，因為 $2\sin150^\circ=1$

所以 $\theta+30^\circ=150^\circ \Rightarrow \theta=120^\circ$

11 **練習28** $160\sqrt{2}$ 公分

設 $\angle ADB=\theta$，可知矩形 $ABCD$ 的周長為

$2(\overline{AB}+\overline{AD})=2(\overline{BD}\times\sin\theta+\overline{BD}\times\cos\theta)$

$=2(80\sin\theta+80\cos\theta)$

$=160\sqrt{2}(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

$=160\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\le160\sqrt{2}$

所以當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時，隔熱墊周長的最大值為 $160\sqrt{2}$ 公分

練習29 $x=0$ 或 $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\pi$

因為 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2(\sin x\cdot\dfrac{1}{2}+\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

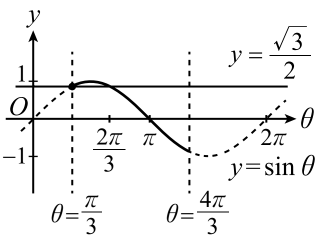
所以原不等式可化成

$2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})\le\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin(x+\dfrac{\pi}{3})\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

設 $\theta=x+\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{4\pi}{3}$，作圖如右



可得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{4\pi}{3}$，故其解為 $x=0$ 或 $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\pi$

練習30 $\dfrac{-1}{2}$

$y=\cos(\dfrac{\pi}{6}+x)+\cos(x-\dfrac{\pi}{2})$

$=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x)+\sin x$

$=(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x)+\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)$

$=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

其中 $\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{7\pi}{6}$

所以當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{6}$，即 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 時，y 有最小值 $\dfrac{-1}{2}$

練習31 $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

設原點為 O，且直線 L 的斜角為 θ，可知 $m=\tan\theta>1$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，因為 $\angle AOC=\angle OBD=\theta$

所以 $\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{BD}$

$=\overline{OA}\times\sin\theta+(\overline{OB}\times\sin\theta-\overline{OA}\times\cos\theta)+\overline{OB}\times\cos\theta$

$=2\sin\theta+(4\sin\theta-2\cos\theta)+4\cos\theta=6\sin\theta+2\cos\theta$

$=2\sqrt{10}(\sin\theta\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}})$

$=2\sqrt{10}\sin(\theta+\phi)$

其中 $0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\phi=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

因此 $\theta+\phi=\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{BD}$ 有最大值 $2\sqrt{10}$

即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\phi$，故此時

$\overline{AC}=2\sin\theta=2\sin(\dfrac{\pi}{2}-\phi)=2\cos\phi=2\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

精益求精

12 **精熟1** (C)

作圖如右

所以共有 3 個交點

《另解》

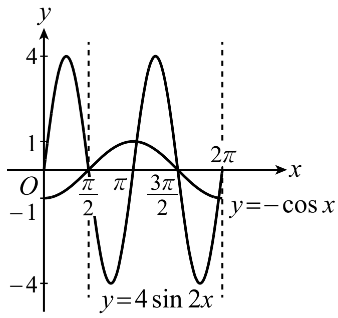
解 $\begin{cases} y=-\cos x \\ y=4\sin2x \end{cases}$

$\Rightarrow 4\sin2x=-\cos x$

$\Rightarrow 8\sin x\cos x=-\cos x$

$\Rightarrow \cos x(8\sin x+1)=0$

$\Rightarrow \cos x=0$ 或 $\sin x=-\dfrac{1}{8}$



因為在 $\dfrac{\pi}{2}<x\le2\pi$ 的範圍中，滿足 $\cos x=0$ 的解有 1 個，滿足 $\sin x=-\dfrac{1}{8}$ 的解有 2 個，所以共有 3 個解

即有 3 個交點

類題1A $\dfrac{12}{5}$

設 $P(t,3\sin t)$，可知 $3\sin t=4\cos t$

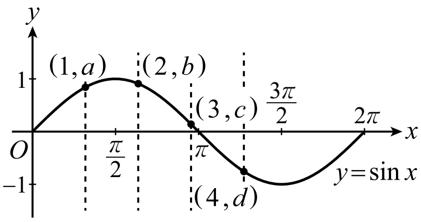
$\Rightarrow \tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \sin t=\dfrac{4}{5} \Rightarrow 3\sin t=\dfrac{12}{5}$

故 P 點與 x 軸的距離為 $\dfrac{12}{5}$

類題1B $b>a>c>d$

作圖如右

故 $b>a>c>d$



《另解》

$a=\sin 1\approx \sin 57^\circ$

$b=\sin 2\approx \sin 114^\circ$

$=\sin 66^\circ$

$c=\sin 3\approx \sin 171^\circ=\sin 9^\circ$

$d=\sin 4\approx \sin 228^\circ=-\sin 48^\circ$

因為 $\sin 66^\circ>\sin 57^\circ>\sin 9^\circ>-\sin 48^\circ$

所以 $b>a>c>d$

13 **精熟 2** (A)(C)(E)

(A)因為 $0<\alpha+\beta<\pi$，且 $\alpha>0$，$\beta>0$

所以 $\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha+\sin\beta>0$

(B)反例：$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $0<\alpha+\beta<\pi$

$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{2}$，得 $\sin\alpha\cos\beta<0$

(C) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)>0$

(D) $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

因為 $\sin(\alpha+\beta)>0$，但 $\cos\alpha\cos\beta$ 可能為正或負，所以 $\tan\alpha+\tan\beta$ 可能大於或小於 0

(E) $\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}>0$

類題2A (1) $\frac{24}{25}$ (2) $\frac{7}{25}$ (3) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (4) $\frac{-\sqrt{10}}{10}$ (5) $\frac{44}{125}$

因為 θ 為第三象限角，可得 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times(\frac{-3}{5})\times(\frac{-4}{5})=\frac{24}{25}$

(2) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\frac{-4}{5})^2-1=\frac{32}{25}-1=\frac{7}{25}$

(3) $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，所以

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-(\frac{-4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(4) $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+(\frac{-4}{5})}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{-\sqrt{10}}{10}$

(5) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\times(\frac{-4}{5})^3-3\times(\frac{-4}{5})$

$=\frac{-256}{125}+\frac{12}{5}=\frac{44}{125}$

類題2B $d>a>b>c$

$a=\sin(108^\circ+102^\circ)=\sin 210^\circ=-\sin 30^\circ$

$b=\sin 214^\circ=-\sin 34^\circ$

$c=\cos 214^\circ=-\cos 34^\circ=-\sin 56^\circ$，$d=\tan 214^\circ=\tan 34^\circ$

因為 $\tan 34^\circ>0>-\sin 30^\circ>-\sin 34^\circ>-\sin 56^\circ$

故 $d>a>b>c$

類題2C (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (2) $\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(1) $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$ 及 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2)因為 θ 為第一象限角，所以 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

且 $2k\pi<\theta<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 $k\in Z$

$\Rightarrow$ $k\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi$

①當 $k=2h$，$h\in Z$ 時，可得 $2h\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}+2h\pi$

$\Rightarrow$ $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

②當 $k=2h+1$，$h\in Z$ 時，可得 $\pi+2h\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{5\pi}{4}+2h\pi$

$\Rightarrow$ $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{-3\sqrt{10}}{10}$

故 $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

14 **精熟 3** (B)(C)(D)(G)(I)(J)為「○」，其餘為「×」

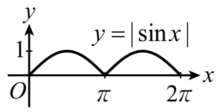
(A)週期為 $\frac{\pi}{2}$

(B)週期為 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

(C)因為 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})$

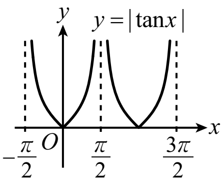
$=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，所以週期為 2π

(D)作圖如右



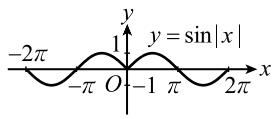
所以週期為 π

(E)作圖如右



所以週期為 π

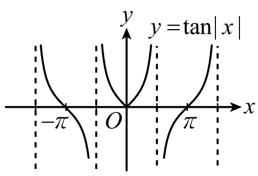
(F)作圖如右



所以不為週期函數

(G)因為 $y=\cos|x|=\cos x$，所以週期為 2π

(H)作圖如右



所以不為週期函數

(I)因為 $y=|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right|$，所以承(D)可知週期為 π

(J)設 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$

因為 $f(x+\frac{\pi}{2})=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|+\left|\cos(x+\frac{\pi}{2})\right|$

$=|\cos(-x)|+|\sin(-x)|$

$=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$

且 $\frac{\pi}{2}$ 為滿足此關係的最小正數，所以週期為 $\frac{\pi}{2}$

類題3A (C)

因為 $y=\tan\frac{x}{2}$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

所以相鄰兩交點間的距離為 2π

15 **類題3B** $(2,\frac{\pi}{3})$

因為週期為 $\frac{2\pi}{a}=\frac{7\pi}{12}-(\frac{-5\pi}{12})=\pi$，所以 $a=2$

將 $x=\frac{7\pi}{12}$ 代入可得 $y=\cos(2\times\frac{7\pi}{12}+b)=\cos(\frac{7\pi}{6}+b)=0$

又 $\frac{7\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}+b<\frac{5\pi}{3}$，因此 $\frac{7\pi}{6}+b=\frac{3\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad b=\frac{\pi}{3}$

故數對 $(a,b)=(2,\frac{\pi}{3})$

精熟4 (C)(D)

(A)振幅為 2

(B)週期為 $2\times(\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})=2\pi$

(C)因為 $y=a\sin x+b\cos x+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)+c$

其中 $\cos\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\phi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

所以可知 $\sqrt{a^2+b^2}=2$，$c=-1$

將 $(\frac{3\pi}{4},1)$ 代入可得 $a\sin\frac{3\pi}{4}+b\cos\frac{3\pi}{4}-1=1$

$\Rightarrow\quad a=b+2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad(b+2\sqrt{2})^2+b^2=4$

$\Rightarrow\quad b^2+2\sqrt{2}b+2=0\quad\Rightarrow\quad b=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad y=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x-1$

$\Rightarrow\quad y=\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}-1=-1+1-1=-1$

所以圖形通過點 $(\frac{5\pi}{4},-1)$

(D) $y=2(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})-1=2\sin(x-\frac{\pi}{4})-1$

$\Rightarrow\quad y=2\sin(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4})-1=2\sin\frac{\pi}{6}-1=0$

所以圖形通過點 $(\frac{5\pi}{12},0)$

類題4A $\frac{\pi}{3}$

$y=\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x\cdot\frac{1}{2})$

$=2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{6})$

同理 $y=\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x=2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{6})$

故最小正數 k 為 $(x+\frac{\pi}{6})-(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}$

16 **類題4B** -1

$y=a\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\phi)$

其中 $\cos\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

因為圖形對稱於直線 $x=\frac{-\pi}{8}$，所以直線 $x=\frac{-\pi}{8}$ 通過圖形的最高點或最低點

即 $\left|a\sin(\frac{-\pi}{4})+\cos(\frac{-\pi}{4})\right|=\sqrt{a^2+1}$

$\Rightarrow\quad\left|\frac{-a}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{a^2+1}\quad\Rightarrow\quad a^2-2a+1=2a^2+2$

$\Rightarrow\quad a^2+2a+1=0\quad\Rightarrow\quad a=-1$

《另解》

因為 $y=a\sin 0+\cos 0=1$，所以 $(0,1)$ 為圖形上一點

又圖形對稱於 $x=\frac{-\pi}{8}$，因此 $(-\frac{\pi}{4},1)$ 亦為圖形上一點

代入可得 $a\sin(\frac{-\pi}{2})+\cos(\frac{-\pi}{2})=1\quad\Rightarrow\quad a=-1$

類題4C $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$y=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$

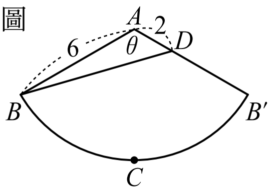
因為 $\frac{5\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\pi$，所以最大值為 $\sin\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

綜合實力測驗

1.(C)	2.(B)	3.(C)	4.(C)	5.(A)(C)
6.(B)(D)(E)	7.(A)(B)	8. 20	9. 130	10. $2\sqrt{7}$
11. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$	12. $\frac{3}{4}$	13. $\frac{4}{3}$	14. $4\sqrt{15}$	15. $\frac{3}{5}$
16.(D)	17. $\frac{4\pi}{5}$ 公分	18.(D)(E)	19. 8 個小時	

一、單選題

1.設其展開圖的圓心角為 θ，如右圖



可知弧 $\overset{\frown}{BB'}$ 的弧長為

$6\theta=4\pi\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{2\pi}{3}$

所以最短路徑長為

$\overline{BD}=\sqrt{6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{36+4+12}=2\sqrt{13}$

2.因為 $\frac{1}{\cos\theta}$、$\cos\theta$、$\sin\theta$ 成等差

所以 $2\cos\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\sin\theta\quad\Rightarrow\quad 2\cos^2\theta=1+\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\quad 1+\cos 2\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\quad\Rightarrow\quad\cos 2\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{\sin 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=2$

3.由餘式定理可知

餘式 $=16\times(-\sin 170^\circ)^3-12\times(-\sin 170^\circ)+2016$

$=4(-4\sin^3 10^\circ+3\sin 10^\circ)+2016=4\sin 30^\circ+2016$

$=4\times\frac{1}{2}+2016=2018$

17 4.① $y=3\sin x-\cos x=\sqrt{10}\sin(x+\theta_1)$

其振幅為 $\sqrt{10}$，週期為 2π

② $y=\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{10}\sin(2x+\theta_2)$

其振幅為 $\sqrt{10}$，週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

③ $y=2\sin x+2\cos x=\sqrt{8}\sin(x+\theta_3)$

其振幅為 $\sqrt{8}$，週期為 2π

所以 $f(x)=\sin 2x+3\cos 2x$，$g(x)=3\sin x-\cos x$

$h(x)=2\sin x+2\cos x$

二、多選題

5.因為運轉一圈需時 15 分鐘

所以週期為 $\dfrac{2\pi}{b}=15 \quad\Rightarrow\quad b=\dfrac{2\pi}{15}$

依題意可知最高點的高度為 $a+d=22+20=42$

最低點的高度為 $-a+d=22-20=2$

解 $\begin{cases}a+d=42\\-a+d=2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a=20\\d=22\end{cases}$

又開始運轉時，阿美恰坐在最低點

所以 $y=20\sin(\dfrac{2\pi}{15}\times 0+c)+22=2$

$\Rightarrow\quad \sin c=-1 \quad\Rightarrow\quad c=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$

6.(A)因為 $0<2x<\pi$，所以 $-1<\cos 2x<1$

(B)因為 $0<2x<\pi$，所以 $0<\sin 2x\le 1$

(C)因為 $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ 且 $-1\le\cos 2x\le 1$

所以 $-1\le\cos^2 x-\sin^2 x\le 1$

(D)對於任意實數 x，$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x\le\dfrac{1}{2}$ 恆成立

(E)對於任意實數 x

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\le\sqrt{2}\le\dfrac{3}{2}$ 恆成立

7.(A) $f(-x)=\left|\sin(-x)\right|+\left|\cos(-x)\right|$

$=\left|-\sin x\right|+\left|\cos x\right|=\left|\sin x\right|+\left|\cos x\right|=f(x)$

(B)①當 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 時，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

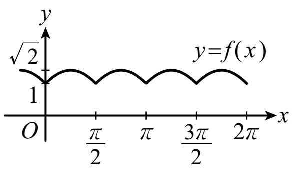
且 $\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}$，所以此時 $1\le f(x)\le\sqrt{2}$

②因為 $f(x+\dfrac{\pi}{2})=\left|\sin(x+\dfrac{\pi}{2})\right|+\left|\cos(x+\dfrac{\pi}{2})\right|$

$=\left|\cos(-x)\right|+\left|\sin(-x)\right|=f(x)$

且 $\dfrac{\pi}{2}$ 為滿足此式的最小正數，所以 $f(x)$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{2}$

由①②可得 $f(x)$ 的圖形如右



因此 f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(C)承(B)可知 f 的最小值為 1

(D)因為 $0<\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{\pi}{9}<\dfrac{\pi}{4}$，所以承(B)可知 $f(\dfrac{\pi}{10})<f(\dfrac{\pi}{9})$

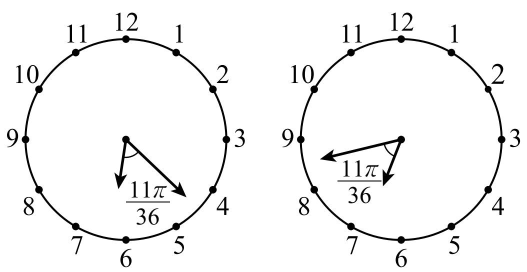
(E)承(B)可知週期為 $\dfrac{\pi}{2}$

三、填充題

18 8.設俗哲在早上 6 點 a 分抵達公車站，而公車在 6 點 b 分抵達公車站，可知分針每分鐘可走 $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$ 弳

時針每分鐘可走 $(\dfrac{\pi}{30}\times 5)\times\dfrac{1}{60}=\dfrac{\pi}{360}$ 弳

依題意可得下圖



所以 $\begin{cases}(\pi+\dfrac{a\pi}{360})-\dfrac{a\pi}{30}=\dfrac{11\pi}{36}\\[2mm]\dfrac{b\pi}{30}-(\pi+\dfrac{b\pi}{360})=\dfrac{11\pi}{36}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}1-\dfrac{11a}{360}=\dfrac{11}{36}\cdots①\\[2mm]\dfrac{11b}{360}-1=\dfrac{11}{36}\cdots②\end{cases}$

$①+②=\dfrac{11(b-a)}{360}=\dfrac{11}{18}$

$b-a=20$，故俗哲在公車站共等待 20 分鐘

9.由題意可得 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{48+15}{65}=\dfrac{63}{65}$

由正弦定理可知 $a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C$

$=\dfrac{4}{5}：\dfrac{5}{13}：\dfrac{63}{65}=52：25：63$

又 $a+b+c=280$，所以 $a=280\times\dfrac{52}{140}=104$

$2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{104}{\frac{4}{5}}=5\times 26=130$

10.由 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ 可得 $\cos\theta=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$

設 $\angle BAP=\phi$，因為 $\angle BAF=\dfrac{2\pi}{3}$，所以可得

$\cos\phi=\cos(\dfrac{2\pi}{3}-\theta)=\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos\theta+\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin\theta$

$=\dfrac{-1}{2}\times\dfrac{7}{2\sqrt{13}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=\dfrac{-7+3}{4\sqrt{13}}=\dfrac{-1}{\sqrt{13}}$

故由餘弦定理可得

$\overline{PB}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+3^2-2\times 3\times\sqrt{13}\times(\dfrac{-1}{\sqrt{13}})}$

$=\sqrt{13+9+6}=2\sqrt{7}$

11.設 $\angle BMP=\theta$，其中 $0<\theta\le\pi$

在 ΔBMP 中由餘弦定理可得

$\overline{PB}^2=1^2+1^2-2\times 1\times 1\times\cos\theta=2-2\cos\theta$

所以四邊形 $BMPQ$ 面積 = ΔBMP 面積 + ΔBPQ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2-2\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\sin\theta+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(\theta-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

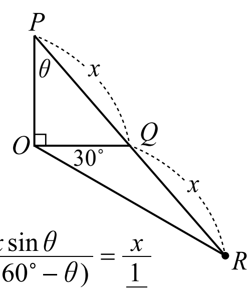
因為 $-\dfrac{\pi}{3}<\theta-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\theta-\dfrac{\pi}{3})\le 1$

$\Rightarrow\quad 0<\sin(\theta-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

故當 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$ 時，四邊形 $BMPQ$ 面積的最大值為 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

12.設 $\overline{PQ}=\overline{QR}=x$，$\angle OPQ=\theta$

作圖如右，可得 $\angle ORQ$



$=180^\circ-\theta-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ-\theta$

在 ΔORQ 中，由正弦定理可知

$\dfrac{\overline{OQ}}{\sin(60^\circ-\theta)}=\dfrac{\overline{QR}}{\sin 30^\circ} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}=\dfrac{x}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow\quad \sin\theta = 2(\sin 60^\circ\cos\theta - \cos 60^\circ\sin\theta)$

$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta) = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$

$\Rightarrow\quad 2\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

故 $\tan^2(\angle OPQ) = \tan^2\theta = (\frac{\sin\theta}{\cos\theta})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$

《另解》

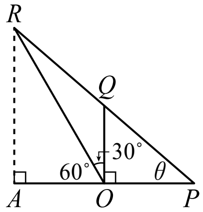
設 $\angle OPQ = \theta$，作圖如右

$\because\ \overline{PQ} = \overline{QR} \quad \therefore\ \overline{AO} = \overline{OP}$

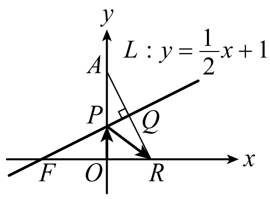
設 $\overline{AO} = \overline{OP} = x \quad\Rightarrow\quad \overline{AR} = \sqrt{3}x$

故 $\tan^2(\angle OPQ)$

$= \tan^2\theta = (\frac{\overline{AR}}{\overline{AP}})^2 = (\frac{\sqrt{3}x}{2x})^2 = \frac{3}{4}$



13.過 R 點作垂直 L 的直線分別交 L 和 y 軸於 Q、A 兩點，設直線 L 交 x 軸於 F 點，且光線在 L 上的 P 點處產生反射，如右圖，由反射定理可知



$\angle FPO = \angle RPQ$，又 $\angle FPO = \angle APQ$

所以 $\angle RPQ = \angle APQ$，即直線 L 為 $\overline{AR}$ 的中垂線

設 $R(a,0)$、$A(0,b)$，所以 $\overline{RA}$ 的中點為 $Q(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$

代入直線 L 可得 $\frac{b}{2} = \frac{a}{4} + 1 \quad\Rightarrow\quad a - 2b + 4 = 0$

因為 $m_L = \frac{1}{2}$，所以 $m_{\overleftrightarrow{AR}} = \frac{0-b}{a-0} = -2 \quad\Rightarrow\quad b = 2a$

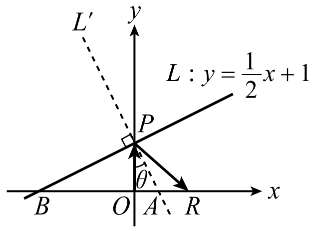
解 $\begin{cases} a - 2b + 4 = 0 \\ b = 2a \end{cases}$，得 $a = \frac{4}{3}$，故 R 點的 x 坐標為 $\frac{4}{3}$

《另解》

作法線 L' 分別交直線 L 與 x 軸於 P、A 兩點

設 $\angle OPA = \theta$，且直線 L 與 x 軸交於 B 點

如右圖



可知 $\angle OPA = \angle RPA = \angle PBO = \theta$

$\Rightarrow\quad \angle OPR = 2\theta$，且 $P(0,1)$、$B(-2,0)$

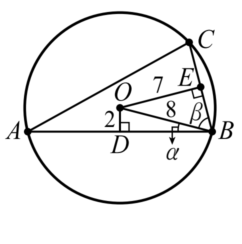
在 ΔPBO 中，可知 $\tan\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{1}{2}$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

在 ΔOPR 中，可知 $\overline{OR} = \overline{OP}\times\tan 2\theta = \frac{4}{3}$

故 R 點的 x 坐標為 $\frac{4}{3}$

14.作圖如右



其中 $\angle OBD = \alpha$，$\angle OBE = \beta$

可知 $\sin\alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$，$\sin\beta = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{8}$

由正弦定理及和角公式可得

$\overline{AC} = 2R\sin B = 16\sin(\alpha+\beta) = 16(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

$= 16(\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{7}{8}) = 16\times\frac{8\sqrt{15}}{32} = 4\sqrt{15}$

15.配方可得 $(x+1)^2 = y + 4$

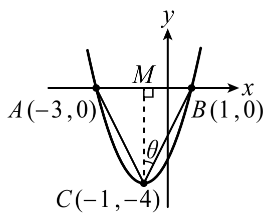
所以頂點為 $C(-1,-4)$

解 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 得 $x = -3$ 或 1

所以 $A(-3,0)$、$B(1,0)$

設 $\overline{AB}$ 的中點為 $M(-1,0)$

且 $\angle MCB = \theta$，作圖如右



$\cos\theta = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{\sqrt{(-1-1)^2+(-4-0)^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

故 $\cos\angle ACB = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\times(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 - 1 = \frac{3}{5}$

四、混合題

19 16.圓心角為 $2\pi\times\frac{15}{100} = \frac{3\pi}{10}$

17.設圓半徑為 r，且研究所在圓餅圖中的扇形圓心角為 θ

依題意可知 $\begin{cases} r\times\frac{14}{5}\theta = \frac{56\pi}{25} \cdots① \\ \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{8\pi}{5} \quad\cdots② \end{cases}$　　$\frac{②}{①}$：$\frac{5r}{28} = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow\quad r = 4$

故高中在圓餅圖中的扇形弧長為 $4\times(2\pi\times\frac{10}{100}) = \frac{4\pi}{5}$ 公分

18.由數據可知 $y = a\cos bx + c$ 的週期為

$\frac{2\pi}{b} = 12 \quad\Rightarrow\quad b = \frac{\pi}{6}$，將 $(0,\frac{31}{16})$、$(6,\frac{11}{16})$ 代入可得

$\begin{cases} a + c = \frac{31}{16} \\ -a + c = \frac{11}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{8} \\ c = \frac{21}{16} \end{cases} \Rightarrow\quad y = \frac{5}{8}\cos\frac{\pi}{6}x + \frac{21}{16}$

(A)振幅為 $\frac{5}{8}$

(B)週期為 12

(C) $y = \frac{5}{8}\cos\frac{\pi}{6}x + \frac{21}{16}$ 與 $y = \frac{21}{16}$ 的交點均為函數圖形的對稱中心，所以 $(12,\frac{31}{16})$ 不為函數圖形的對稱中心

(D)通過函數圖形的最高點或最低點的鉛直線均為圖形的對稱軸，所以 $x = 12$ 為圖形的對稱軸

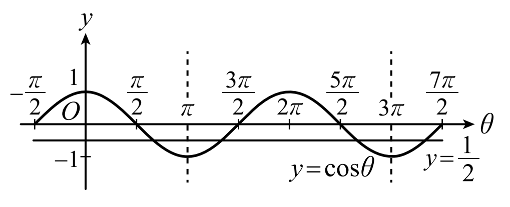
(E)因為 $y = \frac{5}{8}\cos(\frac{\pi}{6}\times 2) + \frac{21}{16} = \frac{5}{8}\times\frac{1}{2} + \frac{21}{16} = \frac{13}{8}$

所以圖形通過點 $(2,\frac{13}{8})$

19.依題意可得 $\frac{5}{8}\cos\frac{\pi}{6}x + \frac{21}{16} \ge 1 \quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\pi}{6}x \ge \frac{-1}{2}$

設 $\theta = \frac{\pi}{6}x$，因為 $6 \le x \le 18$，所以 $\pi \le \theta \le 3\pi$

作圖如下



因此在 $\pi \le \theta \le 3\pi$ 的範圍內

可得不等式 $\cos\theta \ge \frac{-1}{2}$ 的解為 $\frac{4\pi}{3} \le \theta \le \frac{8\pi}{3}$

$\Rightarrow\quad 8 \le x \le 16 \quad\Rightarrow\quad 16 - 8 = 8$

故適合衝浪的時間共有 8 個小時

123日的淬鍊

數學 3A~4A冊 學測複習講義 課後練習本

一、單選題 (占30分)

說明：第1.題至第6.題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得5分；答錯、未作答或作答多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若點 (a, b) 位於 $f(x) = 3x^2 - 1$ 圖形上，則下列哪一點必位於 $g(x) = 3x^2 + 12x + 15$ 圖形上？
(A) $(a, b+16)$ (B) $(a-2, b+4)$ (C) $(a+2, b-4)$ (D) $(a+2, b+4)$ (E) $(a-4, b-32)$
解

2. 設 $a = \log_2 5 - \log_2 4$，$b = \log_2 6 - \log_2 5$，$c = \dfrac{\log_2 6 - \log_2 4}{2}$，則 a、b、c 的大小關係為下列哪一個選項？
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$ (E) $c > b > a$
解

3. 投擲一顆公正的骰子三次，依序出現的點數為 a、b、c，則 a、b、c 恰成等差數列的機率為下列何者？
(A) $\dfrac{1}{36}$ (B) $\dfrac{1}{24}$ (C) $\dfrac{1}{18}$ (D) $\dfrac{1}{12}$ (E) $\dfrac{1}{9}$
解

4. 若從圓內接正18邊形的18個頂點中，任意選出三點為三角形的三頂點，則共可構成幾個正三角形？
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9
解

5. 設 $a=\dfrac{5\times2^{20}+3^{10}}{6}$，$b=\dfrac{2^{20}+2\times3^{10}}{3}$，$c=\dfrac{3\times2^{20}+2\times3^{10}}{5}$，則 a、b、c 的大小關係為下列何者？

（已知 $\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$）

(A) $a>c>b$　(B) $a>b>c$　(C) $b>a>c$　(D) $c>a>b$　(E) $c>b>a$

解

6. 設有 180 個數據為 $\cos1^\circ,\cos2^\circ,\cos3^\circ,\cdots,\cos179^\circ,\cos180^\circ$，則其標準差為下列何者？

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{91}{180}$　(C) $\dfrac{\sqrt{16199}}{180}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2915999}}{180}$　(E) 90

解

二、多選題 （占25分）

說明：第 7.題至第 11.題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 某次段考全班 40 位同學的數學成績與英文成績分別以 X、Y 表示，已知兩科成績的相關係數為 0.005，試選出正確的選項。

(A) X 與 Y 的相關情形可以用散布圖表示

(B) 兩科成績適合用迴歸直線 $Y=a+bX$ 表示 X 與 Y 的相關情形（a、$b\in R$，$b\neq0$）

(C) X 與 $-Y$ 的相關係數仍為 0.005

(D) 兩科成績標準化後的成績相關係數仍為 0.005

(E) X 與 $10Y$ 的相關係數變為 0.05

解

8. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+3)$ 的餘式為 $2x-5$，則 $f(x)$ 除以 $(x+3)^2$ 的餘式可能為下列哪些選項？

(A) -11　(B) $x-4$　(C) $2x-5$　(D) $4x-7$　(E) $3x-2$

解

9. 設有兩個平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=4$，則 $|\vec{b}|$ 可能為下列哪些值？

(A) 0　(B) 1　(C) 3　(D) 6　(E) 7

解

10. 若 $\cos\theta$ 為非零有理數，則下列哪些選項必為有理數？

(A) $\sin\theta$　(B) $\sin 2\theta$　(C) $\cos 2\theta$　(D) $\tan\theta$　(E) $\cos 3\theta$

解

11. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，若不等式 $f(x)>0$ 的整數解共有 3 個，試選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 的最高次項係數必為負數

(B) $f(x)$ 的圖形與 x 軸必有交點

(C) $f(x)$ 的次數必為奇數

(D) 不等式 $f(x)>-20$ 的整數解至少有 3 個

(E) 不等式 $f(3x)>0$ 的整數解至少有 3 個

解

三、填充題 （占30分）

說明：第12.題至第17.題，每題完全答對給5分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

12. 設 $a>0$，$b>0$，$0<c<\pi$，若將 $y=\sin x$ 的圖形水平伸縮為原來的 a 倍，鉛直伸縮為原來的 b 倍，再向左平移 c 單位可得 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的圖形，則序組 $(a,b,c)=$ ________。

解

13. 已知自由一路與十全一路為兩條互相垂直的筆直道路，若從十字路口（兩條道路交叉的地方）往東方行駛 60 公尺會有一條南北向的小路，沿著小路往北方行駛 90 公尺可以回到自由一路，而往南方行駛 k 公尺則可回到十全一路，則正數 $k=$ ________。

解

14. 耗克健身中心的精算師丞佑為公司建了一個獲利模型：公司會員人數為 t 人的每月獲利為 A 元，其中 $A=2000t^{\frac{9}{8}}+76000$，則根據此模型可知當公司會員人數為________人時，每月獲利可達 110 萬元。

解

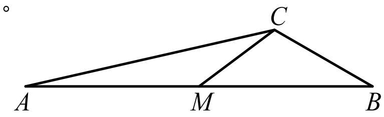
15. 試求 $(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+\cdots+(197^2-199^2)=$ ________。

解

16. 圓 C：$(x-2)^2+(y+1)^2=1$ 的圓周長被兩直線 $y=-x+m$、$y=-x+n$ 分成四段長度相等的弧長，若 $m>n$，則數對 $(m,n)=$ ________。

解

17. 如右圖，在 ΔABC 中，已知 M 為 $\overline{AB}$ 中點，$\overline{BC}=6$，$\angle ABC=30^\circ$，若 $\cos\angle AMC=\dfrac{-4}{5}$，則 ΔABC 的面積為________。

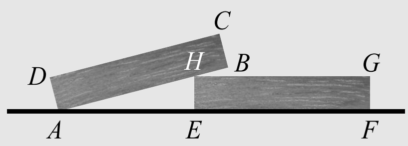


解

四、混合題 （占15分）

說明：第18.題為多選題，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。第19.題為非選擇題，必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。

骨牌是一種好玩又有趣的遊戲，對於學齡孩童而言，可鍛鍊手部小肌肉的穩定性及手眼協調性，甚至在排骨牌的過程中，還可訓練孩童的空間概念與提升專注力。如右圖，為兩塊大小相同的長方體骨牌傾倒在地面上的側面圖，設 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}$，已知骨牌的高 $\overline{AB}$ 為5公分，厚度 $\overline{AD}$ 為1公分，且 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積的 $\dfrac{5}{4}$ 倍，試回答下列各題。



18. 試選出正確的選項。（多選題，5分）

(A) $k=\dfrac{4}{5}$　(B) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=24$　(C) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=20$　(D) $\overrightarrow{CH}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{CB}$

(E) $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AH}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積的 $\dfrac{4}{5}$ 倍

解

19. 求 C 點與地面的距離。（非選擇題，10分）

解

1 第一至三冊

1 1.(B)

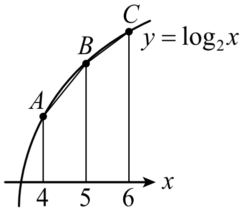
配方可得 $g(x)=3(x+2)^2+3$，所以將 $f(x)$ 的圖形向左平移 2 單位，再向上平移 4 單位可得 $g(x)$ 的圖形，即 $(a-2,b+4)$ 位於 $g(x)$ 圖形上

2.(B)

設 $f(x)=\log_2 x$，$A(4,f(4))$、$B(5,f(5))$、$C(6,f(6))$

則 $a=m_{\overleftrightarrow{AB}}$、$b=m_{\overleftrightarrow{BC}}$、$c=m_{\overleftrightarrow{AC}}$

示意圖如右，由圖形可知 $a>c>b$



《另解》

$a=\log_2\dfrac{5}{4}$，$b=\log_2\dfrac{6}{5}$

$c=\dfrac{\log_2 6-\log_2 4}{2}$

$=\dfrac{(\log_2 6-\log_2 5)+(\log_2 5-\log_2 4)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

又 $\log_2\dfrac{5}{4}>\log_2\dfrac{6}{5}$，所以 $a>c>b$

3.(D)

因為 a、b、c 成等差，所以 $a+c=2b$，即 $a+c$ 為偶數

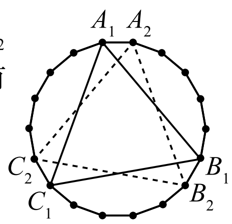
①若 a、c 皆為奇數，則方法數 $=3^2=9$

②若 a、c 皆為偶數，則方法數 $=3^2=9$

故所求機率 $=\dfrac{9+9}{6^3}=\dfrac{18}{6^3}=\dfrac{1}{12}$

4.(B)

作圖如右，圖中 $\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$ 皆為正三角形，依此類推可得共有



$\dfrac{18-3}{3}+\overset{A_1、B_1、C_1\text{ 三點}}{\underset{\Delta A_1B_1C_1}{\underline{1}}}=6$ 個正三角形

2 5.(A)

$\because \log 2^{20}=20\log 2$

$\approx 20\times 0.301=6.02$

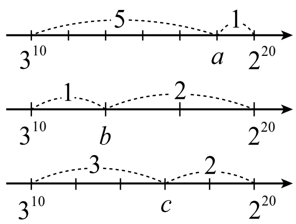
$\log 3^{10}=10\log 3$

$\approx 10\times 0.4771=4.771$

因此可知 $2^{20}>3^{10}$

由分點公式可得右圖

$\therefore a>c>b$



6.(C)

$\mu=\dfrac{\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cdots+\cos 180^\circ}{180}$

$=\dfrac{(\cos 1^\circ+\cos 179^\circ)+(\cos 2^\circ+\cos 178^\circ)+\cdots+(\cos 89^\circ+\cos 91^\circ)+\cos 90^\circ+\cos 180^\circ}{180}$

$=\dfrac{0+0+\cdots+0+0+(-1)}{180}=\dfrac{-1}{180}$

$\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 180^\circ$

$=2(\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ)+\cos^2 90^\circ+\cos^2 180^\circ$

$=2[(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+\cdots$

$+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ]+0+1$

$=2\times(1\times 44+\dfrac{1}{2})+1=90$

所以 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{180}\times 90-(\dfrac{-1}{180})^2}=\dfrac{\sqrt{180\times 90-1}}{180}=\dfrac{\sqrt{16199}}{180}$

7.(A)(D)

(A)任意兩組數據的相關情形均可用散布圖表示

(B)因為相關係數為 0.005，所以 X 與 Y 為低度相關，因此不適合用迴歸直線來表示

(C) $R(X,-Y)=-R(X,Y)=-0.005$

(D)是否標準化，皆不改變相關係數

(E) $R(X,10Y)=R(X,Y)=0.005$

3 8.(A)(C)(E)

由除法原理設

$f(x)=(x-1)(x+3)q_1(x)+2x-5=(x+3)^2q_2(x)+r(x)$

可知 $f(-3)=r(-3)=-11$

(A)若 $r(x)=-11$，則 $r(-3)=-11$

(B)若 $r(x)=x-4$，則 $r(-3)=-7\neq -11$（不合）

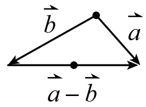
(C)若 $r(x)=2x-5$，則 $r(-3)=-11$

(D)若 $r(x)=4x-7$，則 $r(-3)=-19\neq -11$（不合）

(E)若 $r(x)=3x-2$，則 $r(-3)=-11$

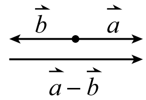
9.(C)(D)

①當 $\vec{a}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 不平行時，



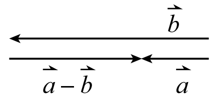
所以 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|<\left|\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|+\left|\vec{a}\right| \Rightarrow 2<\left|\vec{b}\right|<6$

②當 $\vec{a}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 同向時，



所以 $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|=4-2=2$

③當 $\vec{a}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 反向時，



所以 $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|+\left|\vec{a}\right|=2+4=6$

因此可知 $2\leq\left|\vec{b}\right|\leq 6$

10.(C)(E)

(A) $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$，所以 $\sin\theta$ 可能為無理數

(B) $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$，承(A)因為 $\sin\theta$ 可能為無理數，所以 $\sin 2\theta$ 可能為無理數

(C) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，所以 $\cos 2\theta$ 必為有理數

(D) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，承(A)因為 $\sin\theta$ 可能為無理數，所以 $\tan\theta$ 可能為無理數

(E) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，所以 $\cos 3\theta$ 必為有理數

11.(A)(B)(D)

(A)若 $f(x)$ 的最高次項係數為正數，則當 x 夠大的時候，$f(x)$ 必定大於 0，即不等式 $f(x)>0$ 的整數解會有無限多個（矛盾），所以 $f(x)$ 的最高次項係數必為負數

(B)若 $f(x)$ 的圖形與 x 軸沒有交點，即 $f(x)$ 必為恆正或恆負，所以不等式 $f(x)>0$ 的整數解不可能共有 3 個，所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸必有交點

(C)反例：$f(x)=-(x-1)(x-5)$，則不等式 $f(x)>0$ 的解為 $1<x<5$，共有 3 個整數解

(D)因為 $f(x)>0>-20$，且不等式 $f(x)>0$ 的整數解共有 3 個，所以不等式 $f(x)>-20$ 的整數解至少有 3 個

(E)設 $t=3x$，可知不等式 $f(t)>0$ 的整數解 t 共有 3 個

，但當 t 為整數時，x 不一定為整數，所以不等式 $f(3x)>0$ 的整數解不超過 3 個

4 12. $(\frac{1}{2},3,\frac{\pi}{6})$

$y=\sin x \xrightarrow[\text{來的 }\frac{1}{2}\text{ 倍}]{\text{水平伸縮為原}} y=\sin 2x \xrightarrow[\text{原來的 3 倍}]{\text{鉛直伸縮為}} y=3\sin 2x$

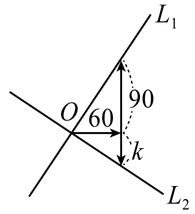
$\xrightarrow[\text{向左平移 }\frac{\pi}{6}\text{ 單位}]{} y=3\sin 2(x+\frac{\pi}{6})=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

故序組 $(a,b,c)=(\frac{1}{2},3,\frac{\pi}{6})$

13. 40

設直線 L_1、L_2 分別代表自由一路與十全一路，且十字路口為原點 O

作圖如右，可知



$m_{L_1}=\frac{90}{60}=\frac{3}{2}$，$m_{L_2}=\frac{-k}{60}$

因為 $L_1\perp L_2$，所以 $m_{L_1}\times m_{L_2}=-1$

$\Rightarrow\ \frac{3}{2}\times(\frac{-k}{60})=-1 \quad \Rightarrow\ k=40$

14. 256

依題意可知 $2000t^{\frac{9}{8}}+76000=1100000$

$\Rightarrow\ 2000t^{\frac{9}{8}}=1024000 \quad \Rightarrow\ t^{\frac{9}{8}}=512=2^9$

$\Rightarrow\ t=(2^9)^{\frac{8}{9}}=2^8=256$ 人

故會員人數為 256 人時，每月獲利可達 110 萬元

15. -20000

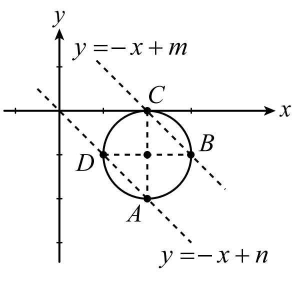
原式 $=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+(9-11)(9+11)+\cdots+(197-199)(197+199)$

$=-2\times(4+12+20+\cdots+396)$

$=-2\times\frac{50\times(4+396)}{2}=-20000$

16. $(2,0)$

作圖如右，所以可知直線 $y=-x+m$，必過 $B(3,-1)$、$C(2,0)$ 兩點且直線 $y=-x+n$，必過 $A(2,-2)$、$D(1,-1)$ 兩點，因此可得 $\begin{cases} m=2 \\ n=0 \end{cases}$



故 $(m,n)=(2,0)$

5 17. $12+9\sqrt{3}$

設 $\angle AMC=\phi$，$\angle CMB=\theta$，可知

$\cos\theta=\cos(180^\circ-\phi)=-\cos\phi=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow\ \sin\angle BCM=\sin(180^\circ-30^\circ-\theta)=\sin(150^\circ-\theta)$

$=\sin 150^\circ\cos\theta-\cos 150^\circ\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}-(\frac{-\sqrt{3}}{2})\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

在 ΔBCM 中，由正弦定理可得

$\frac{\overline{CM}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \overline{CM}=\frac{6\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=5$

故 ΔABC 的面積 $=2\times(\Delta BCM$ 的面積$)$

$=2\times(\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{BC}\times\sin\angle BCM)$

$=5\times6\times\frac{4+3\sqrt{3}}{10}=\underline{\underline{12+9\sqrt{3}}}$

18. (B)(C)

(A)因為 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積 $=\overline{AD}\times\overline{AB}$，$\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積 $=\overline{AD}\times\overline{AH}$，所以依題意可知 $\overline{AD}\times\overline{AB}=\frac{5}{4}\times(\overline{AD}\times\overline{AH})$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AH} \quad \Rightarrow\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow\ k=\frac{5}{4}$

(B) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2=5^2-1^2=24$

(C) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=(\frac{5}{4}\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{5}{4}|\overrightarrow{AH}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$

$=\frac{5}{4}\times(\frac{4}{5}\times5)^2+0=20$

(D)因為 $\overline{AH}:\overline{BH}=4:1$，所以 $\overrightarrow{CH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$

(E)因為 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AH}$ 所張成的平行四邊形面積 $=\overline{AH}\times\overline{AD}$，所以與 $\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所張成的平行四邊形面積相等

19. $\frac{5+\sqrt{15}}{4}$ 公分

$\overline{HE}=\overline{AD}=1 \quad \Rightarrow \quad \overline{AE}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{HE}^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

設 $A(0,0)$、$H(\sqrt{15},1)$，可得 $\overrightarrow{AH}=(\sqrt{15},1)$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AH}=\frac{5}{4}(\sqrt{15},1)$

因為 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AH}$ 且 $\overline{AD}=\frac{1}{4}\overline{AH}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(-1,\sqrt{15})$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\frac{5}{4}(\sqrt{15},1)+\frac{1}{4}(-1,\sqrt{15})$

$=(\frac{5\sqrt{15}-1}{4},\frac{5+\sqrt{15}}{4})$

$\Rightarrow\ C(\frac{5\sqrt{15}-1}{4},\frac{5+\sqrt{15}}{4})$

故 C 點與地面的距離為 $\frac{5+\sqrt{15}}{4}$ 公分

2 第一至三冊

6 1. (C)

獲利期望值 E

$=0.4\times(-10)+0.55\times8+0.05\times15$

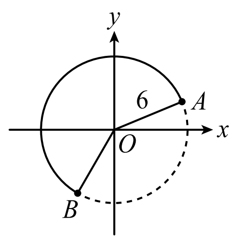
$=-4+4.4+0.75=1.15$ 億元

2. (D)

$\underbrace{C^8_2}_{\text{選 2 人與耿哥、阿瑞同住 }A\text{ 房}}\times\underbrace{C^6_3}_{\text{選 3 人同住 }B\text{ 房}}\times\underbrace{C^3_3}_{\text{選 3 人同住 }C\text{ 房}}=28\times20\times1=560$

3. (C)

作圖如右，可知 Γ 圖形為弧 $\widehat{AB}$



且所對的圓心角為 $\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{8}=\frac{29\pi}{24}$

所以弧 $\widehat{AB}$ 的長度為 $6\times\frac{29\pi}{24}=\frac{29\pi}{4}$