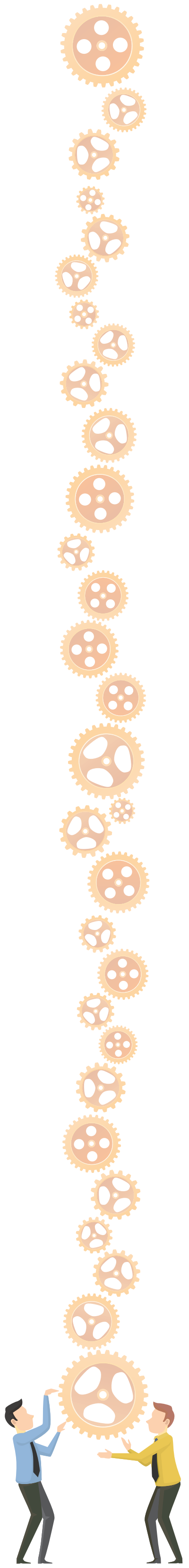
目 次



第 3 章　指數、對數函數

◎學測趨勢與準備方向：指數與對數的「符號概念」和「應用問題」，是本章命題的兩大主流，請同學務必精熟。考古題中純粹玩公式的題目並不多，請同學要抓準趨勢。對數一定要會查表和反查，不然就白學了。

◎指考相關訊息：全章每個單元主題都是數甲、數乙的三顆星必考範圍，太重要了！往年的指考試題偏難的居多，尤其對數的應用問題除了題幹敘述冗長，解題步驟也比較繁複，同學要更加用心來準備。

年　度	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
學測命題數	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2
指考命題數	1	3	1	2	2	2	3	3	3	

基本例題影音教學　全部類題影音教學

一、指數定義與指數律

★★★★

① 指數符號的定義：若 $a \neq 0$，則 $a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。若 $a > 0$ 可取分數次方，為 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$，其中 m、n 為正整數且 $m \geq 2$。

例 A　下列哪些選項是正確的？

(A) $(-2)^{-3} = 8$　(B) $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$　(C) $16^{-\frac{3}{4}} = -8$　(D) $(-\dfrac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{2}$

答 ______

詳答參見詳解本 P10

例 B　對任意實數 x 而言，$27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值為：

(A) 3　(B) $\sqrt{3}$　(C) 9　(D) 27　(E) $81\sqrt{3}$

答對率 60%　97 學測

答 ______

例 C　$(\dfrac{8}{27})^{-\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5} =$ ______。

★★★★

② 指數律：指數符號皆能滿足指數律，如 a、$b > 0$，x、$y \in R$，則：

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	$\dfrac{a^x}{b^x} = (\dfrac{a}{b})^x$

例 A　$(3+\sqrt{7})^{10}(3-\sqrt{7})^{10} =$ ______。

3　指數、對數函數

例 B $\dfrac{(2^{-5})^{\frac{7}{3}}}{8^{\frac{4}{9}}}=16^x$，則 $x=$ ________。

例 C 下列哪些選項等於 81^x？

(A) 3^{4x} (B) 4^{3x} (C) $(3^x)^4$ (D) 9^{2x} (E) $9^{(x^2)}$

答 ________

二、對數定義與對數律

★★★★

③ 指數符號與對數符號互換：$a>0$ 且 $a\neq 1$ 時，規定 $a^b=c \Leftrightarrow b=\log_a c$。

例 A (1) $\log_2 16=$ ____ (2) $\log_3 \dfrac{1}{27}=$ ____ (3) $\log_{25} 5=$ ____。

例 B 解方程式 $(3^x+1)(2^x-1)(5^x-7)=0$，則 $x=$ ________。

★★★★

④ 對數 $\log_a b$ 有意義 $\Leftrightarrow$ 「$a>0$ 且 $a\neq 1$ 且 $b>0$」，稱 a 為底數，b 為真數。

例 A 下列何者有意義？

(A) $\log_1 1$ (B) $\log_5 1$ (C) $\log_2(-4)$ (D) $\log_{-2} 4$ (E) $\log_{-3}(-27)$

答 ________

例 B $\log_x(x+6)=2$ 的解為 $x=$ ____。

★★★★

⑤ 對數公式：a、$b>0$，均不為 1，x、$y>0$，m、$n\in R$，則由指數律可推出：

分合公式	$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$		$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
次方提成係數	$\log_a(x^n)=n\log_a x$		$\log_{a^m} x=\dfrac{1}{m}\log_a x$
換底公式	$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（其中 $c>0$，且 $c\neq 1$）		
較少用到的公式	$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$	$a^{\log_a x}=x$	$x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$

3 指數、對數函數

例 A　(1) $\log_{10}25+\log_{10}4=$______　(2) $\log 125-\log\frac{1}{8}=$______。

例 B　請問下列哪一個選項等於 $\log(2^{(3^5)})$？

PMH10301

(A) $5\log(2^3)$　(B) $3\times 5\log 2$　(C) $5\log 2\times\log 3$

(D) $5(\log 2+\log 3)$　(E) $3^5\log 2$

答對率 82%　103 學測

答 ______

例 C　已知坐標平面上三點 $(3,\log 3)$、$(6,\log 6)$ 與 $(12,y)$ 在同一直線上，則 $y=$ ______。

答對率 46%　107 學測

PMH107A

例 D　$\log_2 3\times\log_3 49\times\log_7 16=$______。

例 E　若 $a=\dfrac{3}{\log_2 5}$，求 $25^a=$______。

三、指數函數與對數函數

★★★★

6　(1) $a>0$，$a\neq 1$，形如 $f(x)=a^x$ 的函數稱為「指數函數」，如 $y=2^x$，$y=(\frac{1}{3})^x$。複利本利和、人口增長、放射性衰變、溫度變化等，都是指數型態的函數。

(2) $a>0$，$a\neq 1$，形如 $f(x)=\log_a x$ 的函數稱為「對數函數」，如 $y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{3}}x$。地震釋放能量、酸鹼 pH 值、響度分貝等，都是對數型態的函數。

例 A　$y=4^x-2^{x+3}$ 在 $x=$______時，有最小值為______。

例 B　設細菌的數量會以指數函數的方式成長，現有細菌 125 個，若經過 2 個小時的細菌數為 8000 個，則現在起算 20 分鐘後的細菌數為______個。

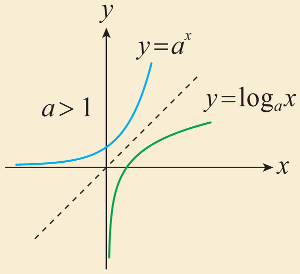
例 C　設 $3<x<7$，求 $y=\log_8(x-3)+\log_8(7-x)$ 的最大值為______。

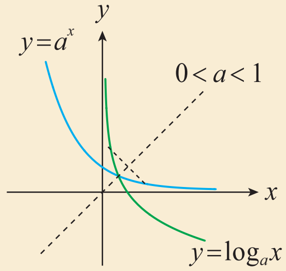
3　指數、對數函數

7 指數函數圖形與對數函數圖形

(1)若 $a>1$，則 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形均為「增函數」。注意凹口方向與漸近線。

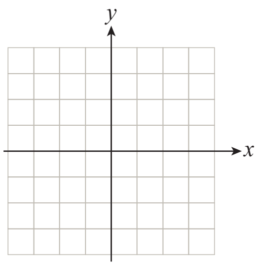
(2)若 $0<a<1$，則 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形均為「減函數」。凹口均向上，注意漸近線。

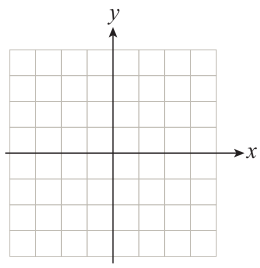


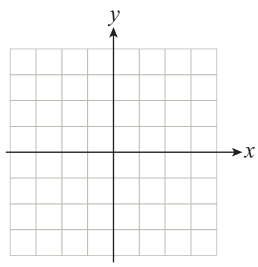


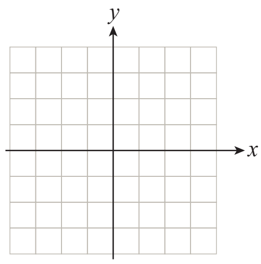
(3)平面上點 (p,q) 與 (q,p) 互相對稱於斜直線 $y=x$，所以 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 兩圖形對稱於直線 $y=x$。

例 A (1) $y=2^x$ (2) $y=(\frac{1}{2})^x$ (3) $y=\log_2 x$ (4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$









例 B (1) $y=2^x$ 與 $y=2^{-x}$ 的圖形對稱於哪一條直線？________

(2) $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於哪一條直線？________

(3) $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於哪一條直線？________

例 C 坐標平面上，在函數圖形 $y=2^x$ 上，標示 A、B、C、D 四個點，其 x 坐標分別為 -1、0、1、2。請選出正確的選項。

PMH10407

(A)點 B 落在直線 AC 下方

(B)在直線 AB、直線 BC、直線 CD 中，以直線 CD 的斜率最大

(C) A、B、C、D 四個點，以點 B 最靠近 x 軸

(D)直線 $y=2x$ 與 $y=2^x$ 的圖形有兩個交點

(E)點 A 與點 C 對稱於 y 軸

全對率 52% 104 學測

答 ________

8 函數圖形的平移：如同二次函數的平移，以下規則適用於所有函數

(1)左右平移：$y=f(x)$ 的圖形向左移 k，就是 $y=f(x+k)$ 的圖形。

(2)上下平移：$y=f(x)$ 的圖形向上移 k，就是 $y=f(x)+k$ 的圖形。

例 A $y=3^x$ 的圖形向左移 2 再向下移 4，得到 $y=f(x)$ 的圖形，則 $f(1)=$______。

例 B　$y=\log_2 x$ 的圖形向右平移 5 單位，再向上平移 1 單位，得新函數 $y=\log_2(ax+b)$，則 $a=$ ______，$b=$ ______。

★★★★

⑨ 指數不等式與對數不等式：常化為同底，比較其次數或真數。

當 $a>1$	$x>y \Leftrightarrow a^x>a^y$	$x>y>0 \Leftrightarrow \log_a x>\log_a y$
當 $0<a<1$	$x>y \Leftrightarrow a^x<a^y$	$x>y>0 \Leftrightarrow \log_a x<\log_a y$

而解對數的方程式或不等式時，務必先使符號有意義，再解之。

例 A　解 $2^{x+3}<4^{x+1}$，x 的範圍為 ______。

例 B　$\log_2(x+1)<3$，其解為 ______。

詳答參見詳解本 P11

四、對數查表與應用

★★★★

⑩ 對數表：利用對數表可以進行查表、反查表。因 $y=\log_{10}x$ 的曲線局部放大接近筆直，常用內（外）插法求對數近似值，其方法如同對線型函數使用分點公式。

例 A　查表：(1) $\log 2.52=$ ______　(2) $\log 261=$ ______　(3) $\log$ ______ $=0.4232$。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456

例 B　數學教科書所附的對數表中，$\log 4.34=0.6375$，$\log 4.35=0.6385$。根據 $\log 4.34$ 和 $\log 4.35$ 的查表值以內插法求 $\log 4.342$，設求得的值為 p，則下列哪一個選項是正確的？

(A) $p=\frac{1}{2}(0.6375+0.6385)$　(B) $p=0.2\times0.6375+0.8\times0.6385$
(C) $p=0.8\times0.6375+0.2\times0.6385$　(D) $p=0.6375+0.002$
(E) $p=0.6385-0.002$

答對率 64%　98 指考甲

答 ______

★★★★

⑪ 首數、尾數與「真數的科學記號」：若 $\log k=$ 整數 $n+$ 非負純小數 r，稱 n 為 $\log k$ 的首數，r 為 $\log k$ 的尾數，查表得 $r=\log a.bc\cdots$，a 為 1 ～ 9 的整數，則 $k=a.bc\cdots\times10^n$，稱為 k 的「科學記號」。

(1)若 $n\geq0$，則 k 的整數部分有 $(n+1)$ 位，最高位數字為 a。

(2)若 $n<0$，則 k 從小數點後第 $(-n)$ 位始不為 0，此不為 0 的數字即為 a。

3　指數、對數函數

例 A　若 $\log k = 8.42$，則 k 的整數部分有____位，最高位數字為____，$\frac{1}{k}$ 從小數點後第____位始不為 0，此不為 0 的數字為____。

例 B　利用上頁對數表，若將 278^{100} 乘開後，寫成有三位有效數字的科學記號為 $a.bc \times 10^n$，則整數序組 $(a, b, c, n) =$ ________。

範例 1　指數符號與大小判斷　全對率 30%　99 指考甲

設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$。試問下列哪些選項是正確的？______

(A) $a^3 = 3$　(B) $\log_{\sqrt{3}} a = \sqrt{3}$　(C) $a > 1$　(D) $a < 3^{\frac{1}{4}}$

解

小小叮嚀

以 3 為底，次數愈大則指數愈大

類題 1　設 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$c = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$，下列選項何者為真？

(A) $a > b > c$　(B) $a < b < c$　(C) $a = c > b$

(D) $a = c < b$　(E) $a = b = c$

90 推甄

答 ______

類題 2　某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

PMH10602

(A) 1.7　(B) 3　(C) 5.2

(D) 9　(E) 81

答對率 51%　106 學測

答 ______

範例 2　對數符號與大小判斷　全對率 46%　101 指考乙

設 $0<x<1$。請選出正確的選項。＿＿＿＿

(A) $x^2<\sqrt{x}<x$　(B) $\log_{10}(x^2)<\log_{10}x<\log_{10}\sqrt{x}$

(C) $\log_2(x^2)<\log_{10}(x^2)<\log_2 x$　(D) $\log_{10}(x^2)<\log_2\sqrt{x}<\log_{10}x$

解

怎麼解決

1. 將 $x=\frac{1}{4}$ 代入後看出(A)不合，(C)不合，可以猜答囉！
2. (C)與(D)可化成「同真數」來比較

類題 3　計算機的按鍵 $\boxed{\sqrt[2]{x}}$、$\boxed{10^x}$、$\boxed{\log_{10}}$ 的功能如下：

(1)按下 $\boxed{\sqrt[2]{x}}$ 會把螢幕上的正數開根號，如輸入 9 再按 $\boxed{\sqrt[2]{x}}$ 得到 3

(2)按下 $\boxed{10^x}$ 會把螢幕上的數當成 10 的次數，如輸入 2 再按 $\boxed{10^x}$ 得到 100

(3)按下 $\boxed{\log_{10}}$ 會把螢幕上的正數以 10 為底取對數，如輸入 1000 再按 $\boxed{\log_{10}}$ 得到 3

清除螢幕資料後，輸入正數 a，其中 $a>1$，依序按下 $\boxed{\sqrt[2]{x}}$、$\boxed{10^x}$、$\boxed{\log_{10}}$ 所得到的結果與下列哪些選項的操作會有相同的結果？

(A)輸入 a，再依序按下 $\boxed{\sqrt[2]{x}}$、$\boxed{\log_{10}}$、$\boxed{10^x}$

(B)輸入 a，再依序按下 $\boxed{10^x}$、$\boxed{\sqrt[2]{x}}$、$\boxed{\log_{10}}$

(C)輸入 a，再依序按下 $\boxed{10^x}$、$\boxed{\log_{10}}$、$\boxed{\sqrt[2]{x}}$

(D)輸入 a，再依序按下 $\boxed{\log_{10}}$、$\boxed{\sqrt[2]{x}}$、$\boxed{10^x}$

(E)輸入 a，再依序按下 $\boxed{\log_{10}}$、$\boxed{10^x}$、$\boxed{\sqrt[2]{x}}$

答 ＿＿＿＿

類題 4　設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$。試選出正確的選項。

PMH10805

(A) $1\le b\le\sqrt{10}$　(B) $\sqrt{10}\le b\le 10$　(C) $10\le b\le 10\sqrt{10}$

(D) $10\sqrt{10}\le b\le 100$　(E) $100\le b\le 100\sqrt{10}$

答 ＿＿＿＿

答對率 54%　108 學測

3

指數、對數函數

類題 5 下列各式的數值哪些為正？

(A) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$ (B) $\log_2 3-1$ (C) $\log_3 2-1$ (D) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ (E) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

答 ＿＿＿＿＿ 全對率 43% 92 學測

範例 3 對數律公式 答對率 28% 100 學測

設 $(a_{n+1})^2=\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，$n$ 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n=\log a_n$，則數列 b_1，b_2，b_3，…為：＿＿＿＿

PMH10003

(A)公差為正的等差數列 (B)公差為負的等差數列 (C)公比為正的等比數列

(D)公比為負的等比數列 (E)既非等差亦非等比數列

解

類題 6 若正實數 x、y 滿足 $\log_{10}x=2.8$，$\log_{10}y=5.6$，則 $\log_{10}(x^2+y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

PMH10105

(A) 2.8 (B) 5.6 (C) 5.9 (D) 8.4 (E) 11.2 答對率 51% 101 學測

答 ＿＿＿＿

類題 7 考慮坐標平面上滿足 $2^x=5^y$ 的點 $P(x,y)$，試問下列哪一個選項是錯誤的？

(A) $(0,0)$ 是一個可能的 P 點 (B) $(\log 5,\log 2)$ 是一個可能的 P 點

(C)點 $P(x,y)$ 滿足 $xy\geq 0$ (D)所有可能的點 $P(x,y)$ 構成的圖形為一直線

(E)點 P 的 x、y 坐標可以同時為正整數 答對率 69% 100 指考甲

答 ＿＿＿＿

3 指數、對數函數

範例 4　對數的表示問題

詳答參見詳解本 P12

若 $\log 8=a$，$\log 9=b$，r、s 為有理數，下列哪些可以表示成 $ra+sb$ 的形式？＿＿＿＿

(A) $\log(8+9)$　(B) $\log\dfrac{81}{32}$　(C) $\log_{81}32$　(D) $\log\sqrt[5]{24}$

解

概念強化

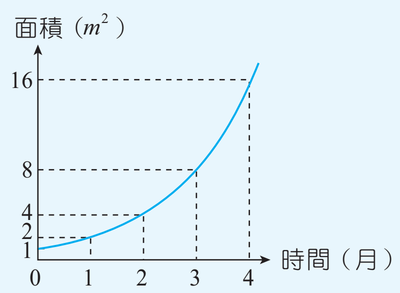
＿＿＿＿：$\log_a(x+y)=\log_a x\cdot\log_a y$

類題 8　若 $\log(1+\frac{1}{7})=a$，$\log(1+\frac{1}{49})=b$，則 $\log 2=$＿＿＿＿。（以 a、b 表示）

類題 9　已知 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，則用 a、b 表示為 $\log_{12}84=$＿＿＿＿。

範例 5　指數函數及其圖形　87 推甄

右圖為某池塘中布袋蓮蔓延的面積與時間之關係圖。假設其關係為指數函數，試問下列敘述哪些為真？＿＿＿＿



(A)此指數函數的底數為 2

(B)在第 5 個月時，布袋蓮的面積就會超過 30 m^2

(C)布袋蓮從 4 m^2 蔓延到 12 m^2，只需 1.5 個月

(D)設布袋蓮蔓延到 2 m^2、3 m^2、6 m^2 所需的時間分別為 t_1、t_2、t_3，則 $t_1+t_2=t_3$

(E)布袋蓮在第 1 到第 3 個月之間的蔓延平均速度等於在第 2 到第 4 個月之間的蔓延平均速度

解

小小叮嚀

平均速度 $=\dfrac{A(t_2)-A(t_1)}{t_2-t_1}$

即兩點的連線斜率

3 指數、對數函數

類題10 阿宏在一家生技公司負責研究製造某食品的一種細菌之成長變化。令 $y(t)$ 代表 t 天後，測得的細菌單位數。阿宏得到一組數據如右。他想用指數函數 $y(t)=p\cdot a^t+q$ 來表徵此細菌的成長，其中 p、q、a 都是實數。阿宏發現他竟可以精確的算出 p、q、a 的值。試問：

t	1	2	3	4	5
$y(t)$	18	30	66	174	498

⑴阿宏算出的 $p=$_____。

⑵依據他算出的 p、q、a 推估開始製造時，有_____單位的細菌。

類題11 某一調查報告顯示某市失業人口每個月約增加 a 倍，已知 3 個月後失業人口為 800 人，4 個半月後失業人口為 2700 人，若情況沒有改變，則在_____個月後，失業人口為 4050 人。

範例 6 對數函數及其圖形 全對率 51% 98 指考乙

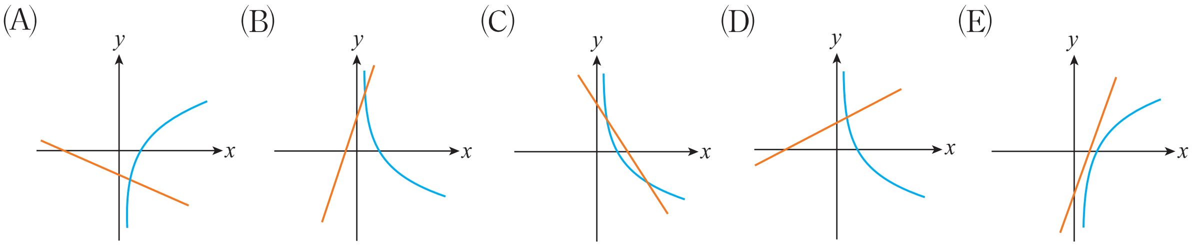
若 (a,b) 是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？_____

(A) $(1,0)$ (B) $(10a,b+1)$ (C) $(2a,2b)$

(D) $(\frac{1}{a},1-b)$ (E) $(a^2,2b)$

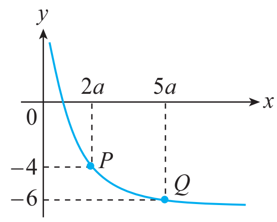
解

類題12 將直線 $y=ax+b$ 與對數函數 $y=b\log_a x$ 的圖形畫在一起，應為下列哪一個選項最合理？



答 ______

類題13 對數函數 $f(x)=\log_t x$（$t>0$，$t\neq 1$）之圖形如右圖所示，則 $t=$ ______，$\overline{PQ}$ 斜率為 ______。



範例 7　指數與對數的綜合問題　全對率 12%　96 學測

設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，試問下列哪些選項是正確的？______

(A)若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$

(B) $\dfrac{f(238)}{f(219)}=\dfrac{f(38)}{f(19)}$

(C) $g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$

(D)若 P、Q 為 $y=g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(E)若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也有兩個交點

解

3 指數、對數函數

類題14 關於指數函數或對數函數圖形的敘述，下列哪些選項是正確的？

(A) $y=2010^x$ 的圖形恆在 $y=99^x$ 的上方

(B) $y=\log_{99}x$ 與 $y=99^x$ 兩函數的圖形對稱於直線 $y=x$

(C) $y=\log_{99}x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{99}}x$ 兩函數的圖形對稱於 x 軸

(D) $y=\log_{2010}(x^2-10x+33)$ 的圖形與 x 軸相交

全對率 38% 99 指考乙

答 ______

詳答參見詳解本 P13

類題15 若 $y=f(x)=2^{x+3}-5$ 與 $y=g(x)$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，則 $g(-3)=$ ______。

範例 8 由函數圖形判斷方程式實根個數

下列哪些方程式有實數解？______

(A) $2^x=\log_2 x$ (B) $2^x=3^x$ (C) $2^x=x$ (D) $2^x=x^2$ (E) $2^x=x+2$

解

關鍵想法

$y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的兩函數圖形交點個數，即為方程式 $f(x)=g(x)$ 的實根個數，交點的 x 坐標即為方程式的實根

類題16 下列函數圖形哪些與直線 $y=x-1$ 恰交一點？

(A) $y=3^x$ (B) $y=(\frac{5}{7})^x$ (C) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ (D) $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$

答 ______

類題17 陳老師證明了 $x^2=2^x$ 有兩個正實數解與一個負實數解後，進一步說，此方程式兩邊各取 $\log_2$，得 $2\log_2 x=x$。陳老師要同學討論此新方程式有多少實數解。
小英說：恰有三個實數解；小明說：恰有兩個正實數解；
小華說：最多只有兩個正實數解；小毛說：仍然有兩個正實數解與一個負實數解；
小芬說：沒有實數解。
請問哪些人說的話，可以成立？
(A)小英　(B)小明　(C)小華　(D)小毛　(E)小芬　全對率 36%　92 指考乙

答 ________

範例 9　函數圖形的平移伸縮

右圖甲、乙、丙、丁、戊為下列五個函數的圖形，則：

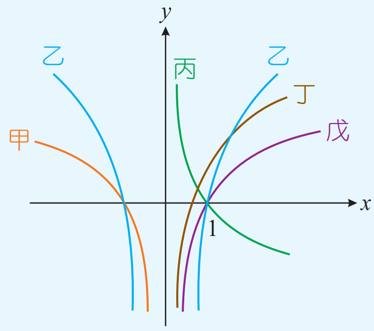
(1) $y=\log_2 x$ 的圖形為________。

(2) $y=\log_2(-x)$ 的圖形為________。

(3) $y=-\log_2 x$ 的圖形為________。

(4) $y=\log_2(2x)$ 的圖形為________。

(5) $y=\log_2(x^2)$ 的圖形為________。

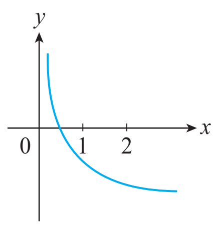


解

小小叮嚀
此題修自大考中心的單選題，可以學到平移、伸縮、顛倒等概念

3
指數、對數函數

類題18 如右圖為函數 $y=a+\log_b x$ 之部分圖形，其中 a、b 皆為常數，則下列何者為真？
(A) $a<0$，$b>1$　(B) $a>0$，$b>1$　(C) $a=0$，$b>1$
(D) $a>0$，$0<b<1$　(E) $a<0$，$0<b<1$　88 社會組



答 ________

類題19 已知 $y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)$ 的圖形不相交，而 $y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)+2$ 的圖形有交點，則下列各選項的推論哪些為真？

(A) $y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)+1$ 的圖形有交點

(B) $y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)+3$ 的圖形有交點

(C) $y=f(x)-2$ 的圖形與 $y=g(x)$ 的圖形有交點

(D) $y=f(x)-1$ 的圖形與 $y=g(x)+1$ 的圖形有交點

(E) $y=2f(x)$ 的圖形與 $y=2g(x)+4$ 的圖形有交點

答 ________

範例 10 對數的方程式與不等式 答對率 41% 96 學測

設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$ ________。(化成最簡分數)

解

再想一想

若這一題改成不等號，就不可以用兩邊同乘來解不等式

類題20 求方程式 $\log_3(3^x-243)=\frac{x}{2}+2+\log_3 2$ 之解為 $x=$ ______。

詳答參見詳解本 P14

類題21 求所有滿足 $\log(x^3-12x^2+41x-20)\geq 1$ 的 x 值之範圍，為 ________________。

100 指考甲

範例 11 指數與對數的應用問題 答對率 22% 92 學測

根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一選項？________

(A) 5 小時　(B) $7\frac{1}{2}$ 小時　(C) 9 小時　(D) $11\frac{1}{2}$ 小時　(E) 13 小時

解

類題22 若依據過去經驗，學生的數學考試成績 y（分）與每週讀書時間 x（小時）的學習曲線為 $y=\dfrac{10^{2x-8}}{1+10^{2x-8}}\cdot 100$，請問若小西瓜在數學考試成績想要達到 60 分，則小西瓜每週至少要讀書多少小時？

(A) 4.1 小時　(B) 4.0 小時　(C) 3.9 小時　(D) 3.6 小時　(E) 2.6 小時

答 ______

類題23 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10 ？

(A) 24 小時　(B) 48 小時　(C) 69 小時　(D) 96 小時　(E) 117 小時

答 ______　答對率 24%　95 學測

類題24 地球上天然碳元素中，約 99% 是碳 12（每個碳原子有 6 個質子與 6 個中子），1% 是碳 13，只有 10^{12} 分之 1 是碳 14，相當於每公克的純碳內含有約 500 億個碳 14 原子。碳 14 是大氣中的氮原子被宇宙射線撞擊而成，具放射性，半衰期經測定為 5730 年，科學家發現，幾億年來地球各地的碳 14 含量始終維持穩定，當生物死亡後不再與環境進行碳交換，體內的碳 14 含量即開始降低，因此可偵測化石中碳 14 的含量來估計生成的年代。考古學家在西班牙發現尼安德塔人的遺跡，請問若有一些尼安德塔人在 5 萬 7 千年前死去，則今日測其遺骨中每公克的碳約有幾個碳 14 原子？

(A) 5 千萬個　(B) 1 億個　(C) 2 億個　(D) 5 億個　(E) 10 億個

答 ______

3 指數、對數函數

範例 12　對數值的首數與尾數　答對率 68%　104 學測

第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？______

PMH10402

(A) 10,000 元　(B) 1,000,000 元　(C) 100,000,000 元
(D) 1,000,000,000 元　(E) 1,000,000,000,000 元

解

複習一下

1. 等比級數的首項為 a，公比為 r，則第 n 項為 ar^{n-1}，前 n 項和為 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
2. 若 a 比 b 大很多，則 $\log(a\pm b)\fallingdotseq\log a$

類題25 若 $(\frac{2}{3})^{100}=0.\underbrace{00\cdots0}_{n\text{個}}a_1a_2a_3\cdots$，$a_1$、$a_2$、$a_3$、$\cdots\in\{0,1,2,3,\cdots,9\}$，$a_1\neq0$，則數對 $(n,a_1)=$______。（$\log2\fallingdotseq0.3010$，$\log3\fallingdotseq0.4771$）

類題26 若 $\log a$ 的首數與 $\log123456$ 的首數相同，$\log a$ 的尾數與 $\log789$ 的尾數相同，求 $a=$______。

類題27 觀察 2 的次方所形成的等比數列：$2,2^2,2^3,2^4,\cdots$，設其中出現的第一個 13 位數為 2^n，則 $n=$______。（註：$\log2\fallingdotseq0.3010$）　答對率 59%　101 指考乙

範例 13　對數查表與內插估計

若 $a=\sqrt[3]{\frac{5.45\times1.07}{7.58}}$，則利用部分常用對數表，求 $\log a=$______，並求出 a 的近似值至小數點後第三位為______。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633

解

3 指數、對數函數

類題28 前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓臺灣 *double*（加倍），一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 $a\%$，其中 a 為整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值為______。（參考數值：$\log 2 \fallingdotseq 0.3010$）　答對率 23%　91 指考乙

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x)\fallingdotseq$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

類題29 下表為常用對數表 $\log_{10}N$ 的一部分。請問 $10^{3.032}$ 最接近下列哪一個選項？

PMH10103

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0429	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

(A) 101　(B) 201　(C) 1007　(D) 1076　(E) 2012　答對率 36%　101 學測

答 ______

詳答參見詳解本 P15

類題30 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？

PMH9905

(A) 9 千隻　(B) 108 千隻　(C) 2200 千隻　(D) 3200 千隻　(E) 32000 千隻

答 ______　答對率 26%　99 學測

第 3 章 指數、對數函數

1. 例A (B) 參見講義 P.31 ～ 36

(A)應為 $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}$ (B)合

(C)應為 $16^{-\frac{3}{4}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(D) $-\frac{1}{8}$ 不能取分數次方，在高中視為無意義

例B (C)

次數最小為 $\frac{2}{3}$ ∴所求 $=27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9$

例C 72

∴所求 $=(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(\frac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}=(\frac{27}{8})^{\frac{2}{3}}\times4^{\frac{5}{2}}=\frac{9}{4}\times32=72$

2. 例A 1024

所求 $=[(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})]^{10}=2^{10}=1024$

例B $-\frac{13}{4}$

左式 $=\frac{2^{-\frac{35}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}=2^{-\frac{35}{3}-\frac{4}{3}}=2^{-13}=2^{4x}$ ∴ $x=-\frac{13}{4}$

例C (A)(C)(D)

$(81)^x=(3^4)^x=\left[\begin{array}{l}3^{4x}=(3^x)^4\\(3^2)^{2x}=9^{2x}\end{array}\right.$

3. 例A (1) 4 (2) -3 (3) $\frac{1}{2}$

(1) $2^x=16=2^4$ ∴ $x=4$ (2) $3^x=\frac{1}{27}=3^{-3}$ ∴ $x=-3$

(3) $25^x=52^x=5$ ∴ $x=\frac{1}{2}$

例B 0 或 $\log_5 7$

得 $3^x=-1$（不合）或 $2^x=1$ 或 $5^x=7$ ∴ $x=0$ 或 $\log_5 7$

4. 例A (B)

(A)底數不合 (C)真數不合

(D)底數不合 (E)底數與真數皆不合

例B 3

$\begin{cases}x+6>0\\x>0 \text{ 且 } x\neq1\end{cases}$ 才有意義，$\log_x(x+6)=\log_x(x^2)$

∴ $x+6=x^2$ ⇒ $(x-3)(x+2)=0$

得 $x=3$ 或 -2（不合）

5. 例A (1) 2 (2) 3

(1)原式 $=\log_{10}25\times4=\log_{10}100=2$

(2)原式 $=\log125\times8=\log1000=3$

例B (E)

∵ $\log_a(x^n)=n\log_a x$ ∴原式 $=3^5\log2$，選(E)

例C $\log24$

$(3,\log3)$、$(6,\log6)$ 的連線斜率為 $\frac{\log6-\log3}{6-3}=\frac{\log2}{3}$

$(6,\log6)$、$(12,y)$ 的連線斜率為 $\frac{y-\log6}{12-6}=\frac{y-\log6}{6}$

∵三點共線 ∴ $\frac{\log2}{3}=\frac{y-\log6}{6}$

則 $y=2\log2+\log6=\log4+\log6=\log24$

例D 8

所求 $=\log_2 3\times\frac{2\log_2 7}{\log_2 3}\times\frac{4\log_2 2}{\log_2 7}=8$

例E 64

所求 $=25^{3\log_5 2}=25^{\log_5 8}=25^{\log_{25}64}=64$

6. 例A 2；-16

$y=(2^x)^2-8\times2^x=(2^x-4)^2-16$ ∴ $2^x=4$

⇒ $x=2$ 時，y 有最小值為 -16

例B 250

設每經一小時增加為 a 倍，即 t 小時後細菌的個數為 $f(t)=125\cdot a^t$，則 $f(2)=125\cdot a^2=8000$

∴ $a^2=\frac{8000}{125}=64$，$a=8$，所求 $=f(\frac{1}{3})=125\cdot8^{\frac{1}{3}}=250$

例C $\frac{2}{3}$

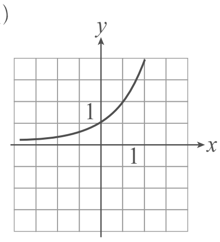
$y=\log_8(x-3)(7-x)=\log_8(-x^2+10x-21)$

$=\log_8[-(x-5)^2+4]$

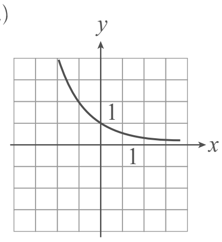
∴ $x=5$ 時，y 有最大值為 $\log_8 4=\frac{2}{3}$

7. 例A

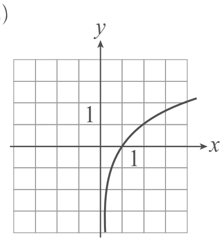
(1)



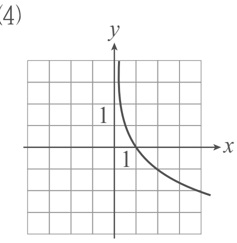
(2)



(3)



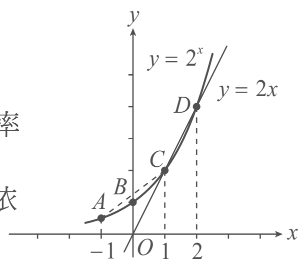
(4)



例B (1) y 軸 (2) x 軸 (3) $y=x$

例C (A)(B)(D)

作圖如右



(A)○

(B)○；因 $\overline{CD}$ 朝右上最陡，斜率最大

(C)×；A、B、C、D 的 y 坐標依序為 $\frac{1}{2}$，1，2，4

∴ A 最靠近 x 軸

(D)○；$y=2^x$ 與 $y=2x$ 交於 $C(1,2)$ 與 $D(2,4)$ 兩點

(E)×

故選(A)(B)(D)

8. 例A 23

$f(x)=3^{x+2}-4$ ∴ $f(1)=3^3-4=23$

例B 2；-10

$y=\log_2(x-5)+1=\log_2(x-5)+\log_2 2=\log_2(2x-10)$

∴ $a=2$，$b=-10$

9. 例A $x>1$

即 $2^{x+3}<2^{2x+2}$ ∴ $x+3<2x+2$，得 $x>1$

例 B　$-1<x<7$

$x+1>0$ 才有意義，且 $\log_2(x+1)<\log_2 8$

$\therefore 0<x+1<8$，得 $-1<x<7$

10. 例 A　(1) 0.4014　(2) 2.4166　(3) 2.65

例 B　(C)

看成線型函數，以 1：4 作分點

$p=\frac{4}{1+4}\cdot 0.6375+\frac{1}{1+4}\cdot 0.6385$

$=0.8\times 0.6375+0.2\times 0.6385$

11. 例 A　9；2；9；3

$\log k=8+0.42$，首數 $=8$，尾數 $=0.42=\log 2.63\cdots$

$\therefore$最高位數字為 2，$\log\frac{1}{k}=-8.42=-9+0.58$

首數 $=-9$，尾數 $=0.58=\log 3.\cdots$　$\therefore$不為 0 的數字為 3

例 B　$(2,5,1,244)$

$\log(278^{100})=100(\log 2.78+\log 100)=100(0.4440+2)$

$=244.40=\log(10^{244})+\log 2.512$

$\therefore 278^{100}\fallingdotseq 2.51\times 10^{244}$

$(a,b,c,n)=(2,5,1,244)$

範例 1

參見講義 P.36

(A)×；應為 $a^3=(a^{\sqrt3})^{\sqrt3}=(\sqrt3)^{\sqrt3}=3^{\frac{\sqrt3}{2}}\neq 3$

(B)×；把 $a^{\sqrt3}=\sqrt3$ 化成對數符號

應為 $\sqrt3=\log_a\sqrt3=\frac{1}{\log_{\sqrt3}a}$，即 $\log_{\sqrt3}a=\frac{1}{\sqrt3}$

(C)○；由 $a^{\sqrt3}=\sqrt3$ 兩邊同取 $\frac{1}{\sqrt3}$ 次方得

$a=\sqrt3^{\frac{1}{\sqrt3}}=3^{\frac{1}{2\sqrt3}}>3^0=1$

(D)×；承(C)得 $a=3^{\frac{1}{2\sqrt3}}=3^{\frac{\sqrt3}{6}}\fallingdotseq 3^{0.29}>3^{0.25}$　$\therefore a>3^{\frac14}$ 才對

故選(C)

類題

1.(C)　2.(C)

1. ① $a^6=[(\frac12)^{\frac12}]^6=(\frac12)^3=\frac18$，$b^6=[(\frac13)^{\frac13}]^6=(\frac13)^2=\frac19$

$\therefore a>b$

② $a^4=[(\frac12)^{\frac12}]^4=(\frac12)^2=\frac14$，$c^4=[(\frac14)^{\frac14}]^4=\frac14$

$\therefore a=c$

由①②得知 $a=c>b$　$\therefore$選(C)

2. $b\xRightarrow[\text{點擊一次}]{}b^2\xRightarrow[\text{點擊二次}]{}b^4\xRightarrow[\text{點擊三次}]{}b^8$

$\therefore b^8\fallingdotseq 81^3=3^{12}$

得 $b=(3^{12})^{\frac18}=3^{\frac32}=3\sqrt3\fallingdotseq 3\times 1.732=5.196$，故選(C)

範例 2

參見講義 P.37

(A)×；應為 $x^2<x<\sqrt x$ 才對

(B)○；$\because y=\log x$ 為遞增函數

$\therefore$由(A)知 $\log(x^2)<\log x<\log\sqrt x$ 成立

(C)×；選項三數依序為 $\log_{\sqrt2}x$、$\log_{\sqrt{10}}x$、$\log_2 x$

若 $1<a<b$ 且 $0<x<1$，則 $\log_a x<\log_b x$

$\therefore \log_{\sqrt2}x<\log_2 x<\log_{\sqrt{10}}x$

(D)○；選項三數依序為 $\log_{\sqrt{10}}x$、$\log_4 x$、$\log_{10}x$

由(C)知 $\log_{\sqrt{10}}x<\log_4 x<\log_{10}x$ 成立

故選(B)(D)

類題

3.(A)(C)(E)　4.(D)　5.(A)(B)(E)

3. $a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt a\xrightarrow{10^x}10^{\sqrt a}\xrightarrow{\log_{10}}\log(10^{\sqrt a})=\sqrt a$

(A) $a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt a\xrightarrow{\log_{10}}\log\sqrt a\xrightarrow{10^x}10^{\log\sqrt a}=\sqrt a$

(B) $a\xrightarrow{10^x}10^a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{10^a}\xrightarrow{\log_{10}}\log_{10}(10^{\frac a2})=\frac a2$

(C) $a\xrightarrow{10^x}10^a\xrightarrow{\log_{10}}\log 10^a=a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt a$

(D) $a\xrightarrow{\log_{10}}\log a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt{\log a}\xrightarrow{10^x}10^{\sqrt{\log a}}$

無法化簡為 $\sqrt a$

(E) $a\xrightarrow{\log_{10}}\log a\xrightarrow{10^x}10^{\log a}=a\xrightarrow{\sqrt[2]{x}}\sqrt a$

故選(A)(C)(E)

4. 原式 $=2\log b+2+\log b=7$　$\therefore \log b=\frac53$

得 $b=10^{\frac53}=10^{\frac{10}{6}}$，而 $10\sqrt{10}=10\cdot 10^{\frac12}=10^{\frac32}=10^{\frac96}$

$\therefore 10\sqrt{10}<b<100$　$\therefore$選(D)

5. (A) $2^{\frac12}>2^{\frac13}$　$\therefore \sqrt2-\sqrt[3]{2}>0$

(B) $\because \log_2 3>\log_2 2=1$　$\Rightarrow$　$\log_2 3-1>0$

(C) $\log_3 2<\log_3 3=1$　$\Rightarrow$　$\log_3 2-1<0$

(D) $\log_{\frac12}3<\log_{\frac12}1=0$　$\Rightarrow$　$\log_{\frac12}3<0$

(E) $\log_{\frac13}\frac12>\log_{\frac13}1=0$　$\Rightarrow$　$\log_{\frac13}\frac12>0$

$\therefore$選(A)(B)(E)

《另解》

也可用 $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$ 估計各選項的值

範例 3

參見講義 P.38

$\log(a_{n+1}{}^2)=\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log(a_n{}^2)$

$\Rightarrow$　$2\log a_{n+1}=-\log\sqrt{10}+2\log a_n$

$\therefore 2b_{n+1}=-\frac12+2b_n$，得 $b_{n+1}=b_n-\frac14$

$\therefore\langle b_n\rangle$ 為等差且公差為負，選(B)

類題

6.(C)　7.(E)

6. $\log(x^2)=2\log x=2\times 2.8=5.6$　$\therefore \log x^2=\log y$，則 $x^2=y$

$\therefore \log(x^2+y)=\log(y+y)=\log 2y=\log 2+\log y$

$=0.3010+5.6\fallingdotseq 5.9$

故選(C)

7. (A)○；$\because 2^0=5^0=1$，成立

(B)○；由 $2^x=5^y$ 同取對數得 $x\log_{10}2=y\log_{10}5$

$\therefore x=\log 5$ 且 $y=\log 2$ 代入成立

(C)○；$\because x\cdot\log 2=y\cdot\log 5$，而 $\log 2>0$，$\log 5>0$

$\therefore xy\geq 0$

(D)○；$\because x\cdot\log 2=y\cdot\log 5$ 為一直線

(E)×；不可能，在 $y=\dfrac{\log 2}{\log 5}x$ 中，$\dfrac{\log 2}{\log 5}$ 不是整數

所以 x、y 不能同時為正整數

故選(E)

範例 4　參見講義 P.39

概念強化　×

$\because a=\log 8=3\log 2$，$b=\log 9=2\log 3$

$\therefore \log 2=\dfrac{a}{3}$，$\log 3=\dfrac{b}{2}$

(A) $\log(8+9)=\log 17$，無法分解成 $\log 2$、$\log 3$，不合

(B) $\log\dfrac{81}{32}=\log 81-\log 32=4\log 3-5\log 2=4\cdot\dfrac{b}{2}-5\cdot\dfrac{a}{3}$，合

(C) $\log_{81}32=\dfrac{\log 32}{\log 81}=\dfrac{5\log 2}{4\log 3}=\dfrac{5\cdot\frac{a}{3}}{4\cdot\frac{b}{2}}=\dfrac{5a}{6b}$，不合

(D) $\log\sqrt[5]{24}=\dfrac{1}{5}\log 24=\dfrac{1}{5}(3\log 2+\log 3)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{b}{2}$，合

$\therefore$ 選(B)(D)

類 題

8. $\dfrac{2a-b+2}{7}$　9. $\dfrac{2+a+ab}{2+a}$

8. $\log\dfrac{8}{7}=a$　$\therefore 3\log 2-\log 7=a\cdots①$，$\log\dfrac{50}{49}=b$

$\therefore \log 50-\log 49=b \Rightarrow (2-\log 2)-2\log 7=b$

$\Rightarrow -\log 2-2\log 7=b-2\cdots②$

由①②得 $\log 2=\dfrac{2a-b+2}{7}$

9. $\log_3 7=\dfrac{\log_2 7}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 7}{a}=b$　$\therefore \log_2 7=ab$

則 $\log_{12}84=\dfrac{\log_2 84}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 4+\log_2 3+\log_2 7}{\log_2 4+\log_2 3}=\dfrac{2+a+ab}{2+a}$

範例 5　參見講義 P.39

(A)設指數函數為 $f(x)=k\cdot a^x$

則 $f(0)=k=1$，$f(1)=k\cdot a^1=a=2$　$\therefore f(x)=2^x$，合

(B)當 $x=5$，$2^5=32>30$，合

(C)當 $x=2$ 時，面積 $4\,m^2$，再過 1.5 個月

即 $x=2+1.5=3.5$ 時

面積是 $2^{3.5}=2^{\frac{7}{2}}=8\sqrt{2}\fallingdotseq 8\times 1.414=11.312<12$，不合

(D) $\begin{cases}2^{t_1}=2\cdots①\\2^{t_2}=3\cdots②\\2^{t_3}=6\cdots③\end{cases}$　①×②=③得 $2^{t_1}\cdot 2^{t_2}=6=2^{t_3}$

$\Rightarrow 2^{t_1+t_2}=2^{t_3}$　$\therefore t_1+t_2=t_3$，合

(E)在第 1 到第 3 個月之間的蔓延平均速度 $=\dfrac{8-2}{3-1}=3$（m^2／月）

在第 2 到第 4 個月之間的蔓延平均速度 $=\dfrac{16-4}{4-2}=6$（m^2／月），不合

$\therefore$ 選(A)(B)(D)

類 題

10. (1) 2　(2) 14　11. 5

10. (1) $y(1)=pa+q=18\cdots①$，$y(2)=pa^2+q=30\cdots②$

$y(3)=pa^3+q=66\cdots③$

②－①得 $pa(a-1)=12\cdots④$

③－②得 $pa^2(a-1)=36\cdots⑤$

$\therefore$ ⑤÷④得 $a=3$，代回④得 $p=2$，代回①得 $q=12$

(2) $\because y(t)=2\cdot 3^t+12$　$\therefore y(0)=2\cdot 3^0+12=2+12=14$

11. 設原失業人口約為 N 人

$\begin{cases}N(a+1)^3=800\\N(a+1)^{\frac{9}{2}}=2700\end{cases} \Rightarrow \dfrac{N(a+1)^{\frac{9}{2}}}{N(a+1)^3}=\dfrac{27\cancel{00}}{8\cancel{00}}$

$\Rightarrow (a+1)^{\frac{3}{2}}=(\dfrac{3}{2})^3=(\dfrac{9}{4})^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a+1=\dfrac{9}{4}$

設 x 個月後，失業人口數 4050 人

$N(a+1)^x=4050 \Rightarrow N(a+1)^3(a+1)^{x-3}=4050$

$\Rightarrow 800\times(a+1)^{x-3}=4050 \Rightarrow (\dfrac{9}{4})^{x-3}=\dfrac{81}{16}$

$\Rightarrow (\dfrac{9}{4})^{x-3}=(\dfrac{9}{4})^2 \Rightarrow x-3=2$　$\therefore x=5$

故 5 個月後，失業人口為 4050 人

範例 6　參見講義 P.40

已知 $\log a=b$，(A) $x=1$ 代入，$y=\log 1=0$，合

(B) $x=10a$ 代入，$y=\log(10a)=\log 10+\log a=1+b$，合

(C) $x=2a$ 代入，$y=\log(2a)=\log 2+\log a=\log 2+b\neq 2b$，不合

(D) $x=\dfrac{1}{a}$ 代入，$y=\log(\dfrac{1}{a})=-\log a=-b\neq 1-b$，不合

(E) $x=a^2$ 代入，$y=\log(a^2)=2\log a=2b$，合　$\therefore$ 選(A)(B)(E)

類 題

12. (D)　13. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$；$-\dfrac{16}{75}$

12. (A)(C)的直線斜率 $a<0$，使 $\log_a x$ 無意義

(B)由直線得 $a>1$ 且 $b>0$　$\therefore y=b\log_a x$ 應遞增，不合

(D)由直線得 $0<a<1$ 且 $b>0$　$\therefore y=b\log_a x$ 為遞減，合

(E)由直線得 $a>1$ 且 $b<0$　$\therefore y=b\log_a x$ 為遞減，不合

$\therefore$ 選(D)

13. $f(2a)=\log_t(2a)=\log_t 2+\log_t a=-4\cdots①$

$f(5a)=\log_t(5a)=\log_t 5+\log_t a=-6\cdots②$

①－②得 $\log_t 2-\log_t 5=\log_t\dfrac{2}{5}=2$　$\therefore t^2=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，代回①得 $t^{-4}=(\sqrt{\dfrac{2}{5}})^{-4}=\dfrac{25}{4}=2a$

$\therefore a=\dfrac{25}{8}$，則 $\overline{PQ}$ 斜率 $=\dfrac{(-4)-(-6)}{2a-5a}=\dfrac{2}{-3a}=-\dfrac{16}{75}$

範例 7　參見講義 P.41

(A)若 $f(3)=a^3=6$，即 $3=\log_a 6$

則 $g(36)=\log_a 36=2\log_a 6=2\times 3=6$，合

(B)左式 $\dfrac{a^{238}}{a^{219}}=a^{19}$，右式 $\dfrac{a^{38}}{a^{19}}=a^{19}$　$\therefore$ 左＝右，合

(C)左式 $=\log_a 238-\log_a 219=\log_a\dfrac{238}{219}$

右式 $=\log_a 38-\log_a 19=\log_a\dfrac{38}{19}=\log_a 2$

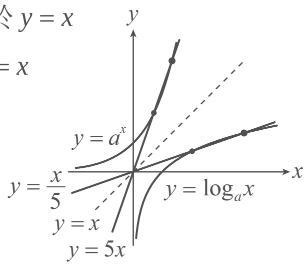
$\because \dfrac{238}{219}<2$　$\therefore$ 左 ＜ 右，不合

(D)∵ $a>1$　∴ $y=\log_a x$ 為遞增，合

(E)∵「$y=a^x$ 與 $y=\log_a x$」對稱於 $y=x$

「$y=5x$ 與 $y=\frac{x}{5}$」也對稱於 $y=x$

∴ $\begin{cases} y=a^x \\ y=5x \end{cases}$ 與 $\begin{cases} y=\log_a x \\ y=\frac{x}{5} \end{cases}$ 有相同的交點個數，如右圖



∴選(A)(B)(D)(E)

類題

14.(B)(C)　15. -2

14.(A)×；若 $x\le 0$，則不會滿足選項的敘述

(B)○；兩者互為反函數

(C)○；∵ $y=\log_{\frac{1}{99}}x=-\log_{99}x$，為 $y=\log_{99}x$ 的上下顛倒

(D)×；∵ $x^2-10x+33=(x-5)^2+8\ge 8$

則 $y=\log_{2010}(x^2-10x+33)$ 的最小值為 $\log_{2010}8>0$

∴函數圖形恆在 x 軸上方

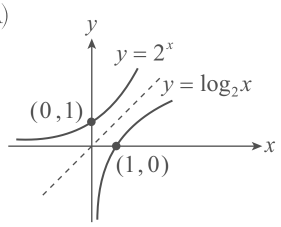
故選(B)(C)

15.令 $y=-3$ 代入 $f(x)$，$-3=2^{x+3}-5$　∴ $x+3=1$

⇒　$x=-2$　∵ $f(-2)=-3$　∴ $g(-3)=-2$

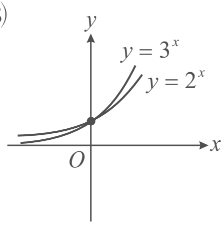
範例 8　參見講義 P.42

(A)



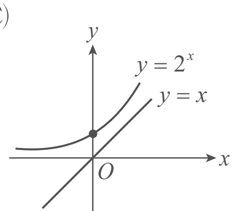
無實根

(B)



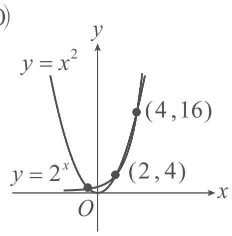
得 $x=0$

(C)



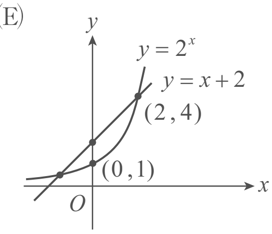
無實根

(D)



有三實根（兩正一負）

(E)



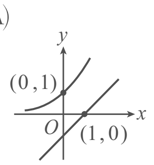
有兩實根（一正一負）

∴選(B)(D)(E)

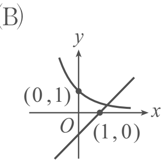
類題

16.(B)(C)(D)　17.(B)(C)

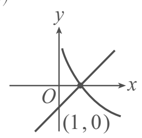
16.(A)



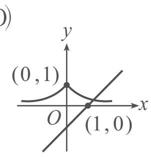
(B)



(C)



(D)



∴選(B)(C)(D)

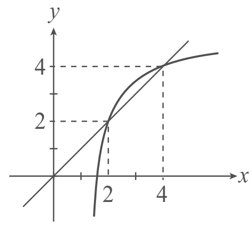
17.函數 $y=2\log_2 x$ 與 $y=x$ 作圖

因原來 $x^2=2^x$ 的負根

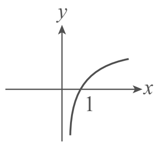
使 $\log_2 x$ 無意義

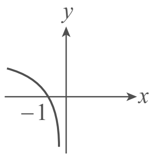
只有正實根 $x=2$，4

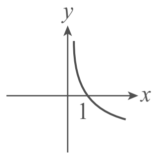
∴選(B)(C)

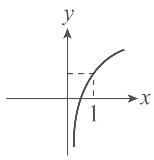


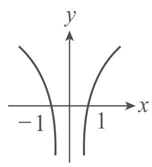
範例 9　參見講義 P.43

(1) $y=\log_2 x$ 的圖形為 ，即戊

(2) $y=\log_2(-x)$ 的圖形為 ，為戊的左右顛倒，即甲

(3) $y=-\log_2 x$ 的圖形為 ，即戊的上下顛倒，即丙

(4) $y=\log_2 2x=\log_2 2+\log_2 x=\log_2 x+1$ 圖形為 ，為戊向上移 1，即丁

(5) $y=\log_2 x^2=2\log_2|x|$，為 $y=\log_2 x$ 左右對稱並上下拉長為 2 倍，，即乙

類題

18.(E)　19.(C)(D)(E)

18.∵遞減　⇒　$0<b<1$，又 $y=\log_b x$ 過 $(1,0)$

向下移才會得到題目所給的圖形　∴ $a<0$

故選(E)

19.(A)不一定　(B)不一定　(C)(D)(E)有交點

範例 10　參見講義 P.44

設 $\log_2 x=k$，則 $\log_x 4=2\log_x 2=\frac{2}{\log_2 x}=\frac{2}{k}$

∴ $\frac{2}{k}-k=1$　⇒　$\frac{2-k^2}{k}=1$　⇒　$k^2+k-2=0$

⇒　$(k+2)(k-1)=0$　∴ $k=\log_2 x=-2$ 或 1

得 $x=2^{-2}$ 或 2^1（不合）

∴ $x=\frac{1}{4}$

類題

20. 6　21. $1\le x\le 5$ 或 $x\ge 6$

20. $\log_3(3^x-243)=\log_3 3^{\frac{x}{2}}+\log_3 9+\log_3 2$

⇒　$\log_3(3^x-243)=\log_3(18\cdot 3^{\frac{x}{2}})$

去對數　⇒　$3^x-243=18\cdot 3^{\frac{x}{2}}$

令 $t=3^{\frac{x}{2}}$ 且 $t>0$　⇒　$t^2-18t-243=0$

⇒　$(t-27)(t+9)=0$　∴ $t=27$ 或 -9（不合）

$3^{\frac{x}{2}}=27$　⇒　$3^{\frac{x}{2}}=3^3$　⇒　$\frac{x}{2}=3$　∴ $x=6$

21. ∵ $1=\log 10$

即 $x^3-12x^2+41x-20\ge 10$，

滿足不等式且使真數大於 0

∴ $x^3-12x^2+41x-30\ge 0$

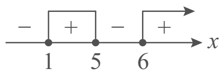
$x=1$ 代入得 $1-12+41-30=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} +1 & -12 & +41 & -30 & \\ & +1 & -11 & +30 & +1 \\ \hline +1 & -11 & +30 & +0 & \end{array}$$

∴ $(x-1)(x^2-11x+30)\ge 0$

即 $(x-1)(x-5)(x-6)\ge 0$

得 $1\le x\le 5$ 或 $x\ge 6$



範例 11　參見講義 P.44

$$\begin{cases} 100(1-2^{-3k})\%=70\%\cdots① \\ 100(1-2^{-kT})\%=99\%\cdots② \end{cases}$$

由①知 $1-2^{-3k}=\frac{7}{10}$　⇒　$2^{-3k}=\frac{3}{10}$

由②知 $1-2^{-kT}=\frac{99}{100}$　⇒　$2^{-kT}=\frac{1}{100}$

⇒　$(2^{-3k})^{\frac{T}{3}}=\frac{1}{100}$　⇒　$(\frac{3}{10})^{\frac{T}{3}}=\frac{1}{100}$

取 log 得 $\frac{T}{3}\log\frac{3}{10}=\log\frac{1}{100}=-2$　⇒　$T(\log 3-1)=-6$

⇒　$T=\frac{6}{1-0.4771}=11.47\cdots$　∴選(D)

類 題

22.(A)　23.(E)　24.(A)

22. 令 $10^{2x-8}=t$　∴ $60\le\frac{t}{1+t}\cdot 100$　⇒　$60(1+t)\le 100t$

⇒　$40t\ge 60$　⇒　$t\ge\frac{3}{2}$

$10^{2x-8}\ge\frac{3}{2}$　⇒　$2x-8\ge\log\frac{3}{2}$

⇒　$2x\ge 8+\log\frac{3}{2}=8+(\log 3-\log 2)$

$=8+(0.4771-0.3010)=8+0.1761=8.1761$

∴ $x=\frac{8.1761}{2}=4.088\doteqdot 4.1$，故選(A)

23. 設現有 k 個，則 $A=k\cdot 2^{\frac{t}{2}}$，$B=k\cdot 3^{\frac{t}{3}}$

∴ $\frac{B}{A}=\frac{k\cdot 3^{\frac{t}{3}}}{k\cdot 2^{\frac{t}{2}}}=10$　⇒　$3^{\frac{t}{3}}=10\cdot 2^{\frac{t}{2}}$

取對數得 $\frac{t}{3}\log 3=\log 10+\frac{t}{2}\log 2$

∴ $\frac{t}{3}\cdot 0.4771=1+\frac{t}{2}\cdot 0.3010$，得 $0.159t=1+0.1505t$

⇒　$t=\frac{1}{0.0085}\doteqdot 117.6$，故選(E)

24. x 年後，每公克碳的碳 14 個數為 500 億 $\times(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$

$x=57300$ 代入

得 500 億 $\times(\frac{1}{2})^{10}\approx$ 500 億 $\times\frac{1}{1000}=0.5$ 億 $=5000$ 萬

範例 12　參見講義 P.45

$1,2,4,8,\cdots,2^{29}$ 之和為

$S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{29}=\frac{1\times(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$

$\log S=\log(2^{30}-1)\doteqdot\log(2^{30})=30\log 2=30\times 0.3010$

$=9+0.030=\log(10^9)+\log 1.\cdots=\log(1.\cdots\times 10^9)$

∴ $S\doteqdot 1.\cdots\times 10^9$，即最高位為 1，接近 1,000,000,000

故選(D)

類 題

25.$(17,2)$　26. 789000　27. 40

25. $\log(\frac{2}{3})^{100}=100\log\frac{2}{3}=100(\log 2-\log 3)$

$=100(0.3010-0.4771)=-17.61=-18+0.39$

∴小數點後共有 17 個 0，則 $n=17$，尾數 $0.39=\log 2.\cdots$

⇒　$a_1=2$，故數對 $(n,a_1)=(17,2)$

26. a 與 123456 有相同位數，數字依序為 789

∴ $a=789000$

27. 13 位數的範圍為 $10^{12}\sim 10^{13}$（含 10^{12} 但不含 10^{13}）

解 $2^n\ge 10^{12}$，取對數得 $n\log 2\ge 12$

即 $n\ge\frac{12}{0.3010}\doteqdot 39.8\cdots$　∴ n 最小為 40

範例 13　參見講義 P.46

① $\log a=\log\sqrt[3]{\frac{5.45\times 1.07}{7.58}}=\frac{1}{3}(\log 5.45+\log 1.07-\log 7.58)$

$=\frac{1}{3}(0.7364+0.0294-0.8797)\doteqdot -0.0380$

② $\log a=-0.0380=-1+0.9620\underset{\substack{\uparrow \\ \text{內插法}}}{=}-1+\log 9.162$

$=\log\frac{1}{10}+\log 9.162=\log 0.9162$

∴ $a\doteqdot 0.916$

《內插法過程》

利用線性內插法

x	$\log x$
9.16	0.9619
P	0.9620
9.17	0.9624

$\frac{P-9.16}{0.01}=\frac{0.9620-0.9619}{0.9624-0.9619}$

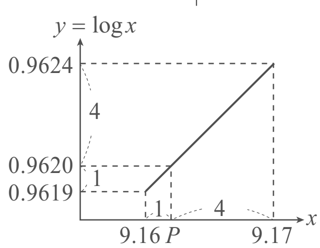
⇒　$\frac{P-9.16}{0.01}=\frac{0.0001}{0.0005}$

⇒　$P-9.16=0.01\times\frac{1}{5}$

⇒　$P=9.16+0.002$

$=9.162$

∴ $0.9620=\log 9.162$



類 題

28. 8　29.(D)　30.(C)

28. 第 1 年開始為 k 元

第 2 年開始為 $k(1+a\%)$ 元

⋮

第 11 年開始為 $k(1+a\%)^{10}$ 元 $=2k$ 元

∴ $(1+\frac{a}{100})^{10}=2$

取對數為 $10\log(1+\frac{a}{100})=\log 2\doteqdot 0.3010$

$\therefore \log(1+\frac{a}{100}) = 0.03010$ 在 $\log 1.07$ 與 $\log 1.08$ 之間

$\therefore a$ 在 7 與 8 之間，若 a 為最小整數，則為 8

29. 由查表看出 $\log 1.07 = 0.0294$，$\log 1.08 = 0.0334$

再內插估計 $0.032 \fallingdotseq \log 1.076$，則 $10^{0.032} \fallingdotseq 1.076$

兩邊同乘 1000 得 $10^{0.032} \times 10^3 \fallingdotseq 1.076 \times 1000$

$\therefore 10^{3.032} \fallingdotseq 1076$，選(D)

30. 個數 $n = 1 \times (1+0.08)^{100}$（千隻）

$\log n = 100\log\frac{108}{100} = 100(2\log 2 + 3\log 3 - \log 100)$

$= 100(2\cdot 0.3010 + 3\cdot 0.4771 - 2) = 3.33 = 3 + 0.33$

$= \log 1000 + \log 2.\cdots = \log(2.\cdots \times 1000)$

$\therefore n = 2.\cdots \times 10^3$（千隻）　∴選(C)

第 4 章　數列與級數

1. 例 A　106；37；1550　參見講義 P.48 ～ 51

$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 100 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 79 \end{cases}$　$\therefore d = -3$，$a_1 = 106$

希望 $a_n = 106 + (n-1)\times(-3) < 0$，得 $n > 36\frac{1}{3}$

$\therefore n = 37$ 開始為負，前 20 項之和為

$\frac{2\times 106 + 19\times(-3)}{2}\times 20 = 1550$

例 B　1600

所求 $= 64 \times 25 = 1600$

2. 例 A　14

第 n 項為 6^{n-1}，解 $6^{n-1} > 10^{10}$

得 $(n-1)\log 6 > 10$　$\therefore n - 1 > \frac{10}{0.3010+0.4771} \fallingdotseq 12.85$

$\therefore n > 13.85$，得 $n = 14$

例 B　14；$1023\frac{15}{16}$

公比為 2，又 $512 = \frac{1}{16}\times 2^{n-1}$　$\Rightarrow$　$2^{13} = 2^{n-1}$

$\therefore n = 14$，所求 $= \frac{\frac{1}{16}(2^{14}-1)}{2-1} = 2^{10} - \frac{1}{16} = 1023\frac{15}{16}$

3. 例　10404

共 2 期，期利率為 2%

所求 $= 10000(1+2\%)^2 = 10000 \times 1.0404 = 10404$

4. 例　$\sum_{k=1}^{34}(3k-2)$；$\sum_{k=1}^{9}2^k$

①每一項差 3，可設一般項為 $3k + a$，再求出 a 及總項數

$k = 1$ 代入得 $3 + a = 1$　$\Rightarrow$　$a = -2$

$a_n = 3n - 2 = 100$　$\Rightarrow$　$n = 34$　∴原式 $= \sum_{k=1}^{34}(3k-2)$

②原式 $= 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9 = \sum_{k=1}^{9}2^k$

5. 例 A　(1) 300　(2) 4900　(3) 90000　(4) 50

(1)所求 $= \frac{24\times 25}{2} = 300$　(2)所求 $= \frac{24\times 25\times 49}{6} = 4900$

(3)所求 $= (\frac{24\times 25}{2})^2 = 300^2 = 90000$

(4)所求 $= \underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{10\text{個}} = 50$

例 B　(A)

所求 $= (1^3 + 2^3 + \cdots + 20^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$

$= (\frac{20\times 21}{2})^2 - (\frac{10\times 11}{2})^2 = 44100 - 3025 = 41075$

∴選(A)

6. 例 A　-41

所求 $= 3\sum_{k=1}^{n}a_k - 7\sum_{k=1}^{n}b_k = 3\times 5 - 7\times 8 = -41$

例 B　945

所求 $= \sum_{n=1}^{10}(2n^2+3n+1) = 2\sum_{n=1}^{10}n^2 + 3\sum_{n=1}^{10}n + \sum_{n=1}^{10}1$

$= 2\times\frac{10\times 11\times 21}{6} + 3\times\frac{10\times 11}{2} + 1\times 10 = 945$

7. 例 A　5、3、3、3、3

$a_1 = S_1 = 3 + 2 = 5$

$a_n = S_n - S_{n-1} = (3n+2) - [3(n-1)+2] = 3$，$n \ge 2$

∴前五項為 5、3、3、3、3

例 B　$\frac{81}{16}$

$n = 5$ 代入得 $2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 243\cdots$①

$n = 4$ 代入得 $2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 81\cdots$②

① − ②得 $32a_5 = 162$　$\therefore a_5 = \frac{81}{16}$

8. 例 A　(D)；(B)

例 B　(C)

將各選項的遞迴式列出前幾項，(A)為 1 , 2 , 5 , 14 , 41

(B)為 1 , 2 , 6 , 24 , 120　(C)為 1 , 2 , 6 , 15 , 31

(D)為 1 , 3 , 7 , 15 , 31　(E)為 1 , 2 , 5 , 16 , 65

只有(C)與題意相符，選(C)

9. 例　(D)

(A) $n = 41$ 代入，為 $41^2 - 41 + 41 = 41^2$，不合

(B) $n = 3$ 代入，不合，$n \ge 4$ 才合

(C) $n = k$ 成立可推得 $n = k + 1$ 成立，但 $n = 1$ 代入不合

∴選(D)

範例 1

參見講義 P.51

大拇指為 $\underbrace{1，9}_{\text{加}8}\underbrace{，17}_{\text{加}8}$，25，33，41，49，⋯，$a_n$

則 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)\times 8 = 8n - 7 \le 1000$

得 $n \le \frac{1007}{8} = 125\frac{7}{8}$　∴代 $n = 125$，$a_{125} = 8\times 125 - 7 = 993$

大拇指由 993 開始數　∴ 1000 在食指，選(B)

類題

1. (A)(D)　2. (B)(C)(E)

1. (A)○；∵公差為正數　$\therefore a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$

∵ $b_n = -a_n$　$\therefore b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$成立

(B)×；反例：$\langle a_n\rangle = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$

則 $\langle c_n\rangle = 9, 4, 1, 0, 1, 4, \cdots$

(C)×；$d_n = a_n + a_{n+1} = [a_1 + (n-1)\alpha] + [a_1 + n\alpha]$

$= 2a_1 + (2n-1)\alpha$

$\langle d_n\rangle$ 為等差且公差為 2α 才對

(D)○；$e_n = [a_1 + (n-1)\alpha] + n = a_1 - \alpha + n(\alpha+1)$

公差為 $\alpha + 1$

對話式®

高中數學 1 - 4 冊
學測複習講義
課後練習本

班級：＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿　座號：＿＿＿＿＿＿

第 5 回　指數與指數函數

① 求 $(0.008)^{\frac{2}{3}}\times 25+(\frac{16}{9})^{0}-(\frac{16}{81})^{-0.25}+(-2^{-2})^{2}=$________。

解

② 若 $a=(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}}$，$b=8^{-1}$，$c=4^{0.5}$，$d=(2^{-\frac{2}{k}})^{k}$，試比較 a、b、c、d 之大小。

解

③ $5^{2x}=4$，則 $\frac{5^{3x}+5^{-3x}}{5^{x}-5^{-x}}=$________。

解

④ 若 $16^{x}=10^{y}=25$，則 $\frac{1}{x}-\frac{4}{y}=$________。

解

⑤ 解方程式 $9^{\frac{1}{2}-x}-\frac{28}{3^{x}}+9=0$，$x=$ ________。

解

⑥ $f(x)=2^x$ 且 $f(-2a)=2f(a^2)$，則 $a=$ ________。

解

⑦ 若 $a>0$，x 為實數，且 $a^{3x}+a^{-3x}=52$，則：⑴ $a^x+a^{-x}=$________ ⑵ $a^x=$________。

解

⑧ 設 $f(x)=(4^x+4^{-x})+(2^x+2^{-x})+5$，$x\in R$，則 $x=$ ________時，$f(x)$ 有最小值________。

解

⑨ ⑴方程式 $x^2+2^x=7$ 有________個實根 ⑵方程式 $(\frac{1}{2})^x=\log_2\frac{1}{x}$ 有________個實根。

解

⑩ 有 81 公克的放射性物質，其重量是時間的指數函數，若經測量得知在 4 個月後，其重量僅剩 16 公克，則再經一個月後的重量為________公克。

解

得 $f(1)f(\frac{3}{2})<0$，由勘根定理知實根介於 1 和 $\frac{3}{2}$ 之間

∴ 最接近整數 1，故選(B)

4. 令 $x=1-3i \Rightarrow (x-1)^2=(-3i)^2=-9$

$\Rightarrow x^2-2x+10=0$，得二次因式為 $x^2-2x+10$

利用長除法 $\Rightarrow (x^2-2x+10)(x^2+3x-6)=0$

∴ 此方程式的根為 $x=1\pm 3i$ 與 $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

故所求為 $x=1+3i$ 與 $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

5. $\because k^2=\overline{k} \quad \therefore (p+qi)^2=p-qi$

$\Rightarrow p^2+2pqi-q^2=p-qi$

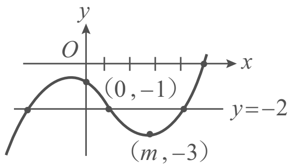
$\Rightarrow \begin{cases} p^2-q^2=p \\ 2pq=-q \end{cases} \Rightarrow 2p=-1 \quad \therefore p=-\frac{1}{2}$

6. (A)○；$f(0)=d=-1<0$

(B)○；由圖形知

$f(5.1)>0$，$f(4.9)<0$

$\therefore f(5.1)\times f(4.9)<0$



(C)○

(D)×；$f(1-i)=f(\overline{1+i})=\overline{f(1+i)}=\overline{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

(E)○；函數 $y=f(x)$ 與 $y=-2$ 的圖形交於三點

故方程式 $f(x)=-2$ 有三個實根

7. 由 $\frac{1}{3}<x<2 \Rightarrow (x-\frac{1}{3})(x-2)<0$

$\Rightarrow (3x-1)(x-2)<0 \Rightarrow 3x^2-7x+2<0$

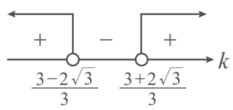
$\Rightarrow -3x^2+7x-2>0$ ∴ 數對 $(a,b)=(-3,7)$

8. ① $k<0$

② $D=(k+1)^2-4k(k-1)<0$

$\Rightarrow 3k^2-6k-1>0$

$\Rightarrow k<\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k>\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$



∴ 取①②交集得 $k<\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

9. (1) $2x^2-6x+25$ 恆正 $\Rightarrow (x+1)(x-1)(x-3)\le 0$

$\therefore x\le -1$ 或 $1\le x\le 3$

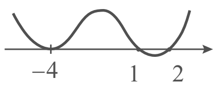
(2) $(x^2+1)(25x+100)^2-(3x-1)(25x+100)^2\le 0$

$\Rightarrow (x^2+1-3x+1)(25x+100)^2\le 0$

$\Rightarrow (x^2-3x+2)(25x+100)^2\le 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(25x+100)^2\le 0$

$\Rightarrow 1\le x\le 2$ 或 $x=-4$



(3) 即 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}+1<0$

$\Rightarrow \frac{x^2-5x+6+x^2-9x+20}{x^2-9x+20}<0$

$\Rightarrow \frac{x^2-7x+13}{(x-4)(x-5)}<0$，而 $x^2-7x+13$ 恆正

$\Rightarrow \frac{1}{(x-4)(x-5)}<0 \quad \therefore 4<x<5$

10. (A)×；$\because \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.707 \quad \therefore f(\frac{1}{\sqrt{2}})=$ 正 × 負 × 正 <0

(B)×；$f(x)=2 \Rightarrow x^3-x-2=0$

方程式可能整數根為±1、±2，令 $g(x)=x^3-x-2$

$g(1)\ne 0$，$g(-1)\ne 0$，$g(2)\ne 0$， $g(-2)\ne 0$

故 $f(x)=2$ 沒有整數解

(C)○；$\because f(x)=x^2+1$ 為三次實係數方程式，必有實根

(D)×；$f(x)=x$，即 $x^3-2x=x(x^2-2)=0$，得 $x=0$，$\pm\sqrt{2}$

(E)×；$f(-a)=-a(-a-1)(-a+1)$

$=-a(a+1)(a-1)=-f(a)=-2$

故選(C)

第5回

1. 原式 $=[(\frac{1}{5})^3]^{\frac{2}{3}}\times 25+1-[(\frac{2}{3})^4]^{-\frac{1}{4}}+(-\frac{1}{4})^2$

$=1+1-\frac{3}{2}+\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$

2. $a=(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}}=2^{-\sqrt{2}}$，$b=8^{-1}=2^{-3}$

$c=(2^2)^{0.5}=2^1$，$d=(2^{-\frac{2}{k}})^k=2^{-2}$

$\because -3<-2<-\sqrt{2}<1 \quad \therefore 2^{-3}<2^{-2}<2^{-\sqrt{2}}<2^1$

$\Rightarrow b<d<a<c$

3. 所求 $=\frac{5^{3x}+\frac{1}{5^{3x}}}{5^x-\frac{1}{5^x}}=\frac{5^x(5^{3x}+\frac{1}{5^{3x}})}{5^x(5^x-\frac{1}{5^x})}=\frac{5^{4x}+\frac{1}{5^{2x}}}{5^{2x}-1}=\frac{16+\frac{1}{4}}{4-1}=\frac{\frac{65}{4}}{3}=\frac{65}{12}$

4. $\because 16^x=25 \Rightarrow 16=25^{\frac{1}{x}}\cdots$①

又 $10^y=25 \Rightarrow 10=25^{\frac{1}{y}} \Rightarrow 10000=25^{\frac{4}{y}}\cdots$②

$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{16}{10000}=25^{\frac{1}{x}-\frac{4}{y}} \Rightarrow 25^{\frac{1}{x}-\frac{4}{y}}=\frac{1}{625}=(25)^{-2}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{4}{y}=-2$

5. 即 $3\cdot(3^{-x})^2-28\cdot(3^{-x})+9=0$

分解得 $(3\cdot 3^{-x}-1)(3^{-x}-9)=0$

3 ╳ −1
1 ╳ −9

$\therefore 3^{-x}=\frac{1}{3}$ 或 9 $\Rightarrow 3^{-x}=3^{-1}$ 或 3^2

故得 $x=1$ 或 -2

6. $2^{-2a}=2\cdot 2^{a^2}=2^{a^2+1} \Rightarrow -2a=a^2+1$

$\Rightarrow a^2+2a+1=0 \Rightarrow (a+1)^2=0 \Rightarrow a=-1$

7. (1) $a^{3x}+a^{-3x}=52 \Rightarrow (a^x+a^{-x})^3-3a^x\cdot a^{-x}(a^x+a^{-x})=52$

令 $t=a^x+a^{-x}$，則 $t^3-3t=52$

$(t-4)(\underbrace{t^2+4t+13}_{D<0})=0 \Rightarrow t=4$，故 $a^x+a^{-x}=4$

(2) 令 $S=a^x$，則 $S+\frac{1}{S}=4 \Rightarrow S^2-4S+1=0$

$\Rightarrow S=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$，故 $a^x=2\pm\sqrt{3}$

8. 令 $2^x+\frac{1}{2^x}=t$

① $\frac{t}{2}=\frac{2^x+\frac{1}{2^x}}{2}\ge\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=1 \quad \therefore t\ge 2$

② $(2^x+\frac{1}{2^x})^2=4^x+\frac{1}{4^x}+2=t^2 \Rightarrow 4^x+\frac{1}{4^x}=t^2-2$

$f(x)=(t^2-2)+t+5=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$，但 $t\ge 2$

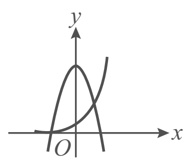
$\therefore t=2$ 時，$f(x)$ 有最小值 $=(\frac{5}{2})^2+\frac{11}{4}=9$

此時 $2^x=\frac{1}{2^x}$，得 $x=0$

9. (1) 即 $2^x=7-x^2$

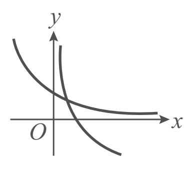
令 $y=2^x$，$y=7-x^2$，圖形如右

∴ 有兩個交點，即有 2 個實根



(2) 令 $\begin{cases} y=(\frac{1}{2})^x \\ y=\log_2\frac{1}{x} \end{cases}$，圖形如右

∴ 有一個交點，即有 1 個實根



10.設 $f(x)=81\cdot a^{x}\Rightarrow f(4)=81\cdot a^{4}=16$

$\Rightarrow a^{4}=\dfrac{16}{81}\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$

函數關係為 $f(x)=81\times(\dfrac{2}{3})^{x}$

$\therefore f(5)=81\times(\dfrac{2}{3})^{5}=81\times\dfrac{32}{243}=\dfrac{32}{3}$

故再經一個月後的重量為 $\dfrac{32}{3}$ 公克

第6回

1. $x=\log_{2}3\Rightarrow 2^{x}=3$

$(\dfrac{1}{4})^{x}=(2^{-2x})=(2^{x})^{-2}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$，所求$=3+\dfrac{1}{9}=\dfrac{28}{9}$

2. (1)所求$=\log_{2}(\sqrt{\dfrac{7}{48}}\times 12\div\sqrt{42})=\log_{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=-\dfrac{1}{2}$

(2)所求$=(\log_{2}3+\log_{2}3)(2\log_{3}2+\dfrac{1}{2}\log_{3}2)$

$=(2\log_{2}3)\cdot(\dfrac{5}{2}\log_{3}2)=5$

(3)所求$=\log_{2}(\log_{2}49)+\log_{2}(\log_{7}4)=\log_{2}(\log_{2}49\cdot\log_{7}4)$

$=\log_{2}(2\log_{2}7\cdot 2\log_{7}2)=\log_{2}4=2$

(4)所求$=\dfrac{\log 3}{\log 4}\cdot\dfrac{\log 25}{\log 9}\cdot\dfrac{\log 8}{\log 5}=\dfrac{\log 3}{2\log 2}\cdot\dfrac{2\log 5}{2\log 3}\cdot\dfrac{3\log 2}{\log 5}=\dfrac{3}{2}$

(5)所求$=(3^{5})^{\log_{3}2}=3^{5\log_{3}2}=3^{\log_{3}32}=32$

3. (A) $\log_{6}3=\dfrac{1}{\log_{3}6}=\dfrac{1}{a}$，合

(B) $\log_{6}2=\log_{6}\dfrac{6}{3}=\log_{6}6-\log_{6}3=1-\dfrac{1}{a}$，合

(C)$\because a=\log_{3}6=\log_{3}2+\log_{3}3\Rightarrow\log_{3}2=a-1$

$\therefore\log_{2}6=\log_{2}2+\log_{2}3=1+\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{a-1}$，合

(D) $\log_{3}12=\log_{3}4+\log_{3}3=2\log_{3}2+1=2(a-1)+1=2a-1$

不合

(E) $\log_{3}4=2\log_{3}2=2(a-1)=2a-2$，合

∴ 選(A)(B)(C)(E)

4. $\log_{3}a=98\Rightarrow a=3^{98}$；$\log_{3}b=100\Rightarrow b=3^{100}$

$a+b=3^{98}+3^{100}=3^{98}(1+3^{2})=10\cdot 3^{98}$

$\log_{3}(a+b)=\log_{3}(10\cdot 3^{98})=\log_{3}10+\log_{3}3^{98}=2.\cdots+98=100.\cdots$

$\log[\log_{3}(a+b)]=\log 100.\cdots=2.\cdots$

$\therefore 2<k<3$，故選(D)

5. $\dfrac{\log 3}{\log a}>\dfrac{\log 3}{\log b}>0$，故 $\log b>\log a>0\Rightarrow\log b>\log a>\log 1$

去對數得 $b>a>1$，故選(E)

6. $y=\log_{2}x\xrightarrow{\text{向右}}y=\log_{2}(x-2)\xrightarrow{\text{向下}}y=\log_{2}(x-2)-3$

$y=\log_{2}(x-2)-3=\log_{2}(x-2)-\log_{2}8$

$=\log_{2}\dfrac{x-2}{8}=\log_{2}(\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{4})\quad\therefore p=\dfrac{1}{8}$，$q=-\dfrac{1}{4}$

7. (A) $y=(x-3)^{2}$ 即將 $y=x^{2}$ 向右平移 3 單位，合

(B) $y=\log_{2}4x=\log_{2}4+\log_{2}x=2+\log_{2}x$，即將 $y=\log_{2}x$ 的圖形向上平移 2 單位，合

(C) $y=x^{2}$ 與 $y=-x^{2}$ 兩圖形對 x 軸對稱，不合

(D) $y=2^{x}$ 與 $y=\log_{2}x$ 對直線 $y=x$ 對稱，不合

∴ 選(A)(B)

8. $b=\log_{64}125=\log_{2^{6}}5^{3}=\dfrac{1}{2}\log_{2}5=\log_{2}\sqrt{5}$

$c=\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{1}{3}=\log_{4^{-1}}3^{-1}=\log_{4}3=\dfrac{1}{2}\log_{2}3=\log_{2}\sqrt{3}$

$d=\log_{2^{\frac{1}{2}}}7^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\log_{2}7=\log_{2}\sqrt{7}$

$\because 3>\sqrt{7}>\sqrt{5}>\sqrt{3}\Rightarrow\log_{2}3>\log_{2}\sqrt{7}>\log_{2}\sqrt{5}>\log_{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow a>d>b>c$ ∴選(D)

9. 設釋放出的能量為 E'

$\log E'=11.8+1.5(r+1)=11.8+1.5r+1.5=\log E+1.5$

$=\log E+\log 10^{\frac{3}{2}}=\log E+\log 10\sqrt{10}=\log 10\sqrt{10}E$

$\therefore E'=10\sqrt{10}E\quad\therefore k=10\sqrt{10}$

10. $\begin{cases}40=10\log\dfrac{I_{1}}{I_{0}}\cdots ①\\[2ex] 80=10\log\dfrac{I_{2}}{I_{0}}\cdots ②\end{cases}$

②－①得 $40=10(\log\dfrac{I_{2}}{I_{0}}-\log\dfrac{I_{1}}{I_{0}})=10(\log\dfrac{I_{2}}{I_{0}}+\log\dfrac{I_{0}}{I_{1}})=10\log\dfrac{I_{2}}{I_{1}}$

$\Rightarrow\log\dfrac{I_{2}}{I_{1}}=4\Rightarrow\dfrac{I_{2}}{I_{1}}=10^{4}=10000$ 倍

第7回

1. $\log x=2+\log 2=\log 100+\log 2=\log 200\quad\therefore x=200$

$\log 357=\log 3.57\times 10^{2}=2+\log 3.57$

故 log357 的尾數為 log3.57

$\log y=-3+\log 3.57=\log 10^{-3}\times 3.57=\log 0.00357$

$\therefore y=0.00357$，則 $x+y=200.00357$

2. $\log x^{2}-\log\dfrac{1}{x}=2\log x+\log x=3\log x$ 為整數

∴而 $1<x<10\Rightarrow 0<\log x<1\Rightarrow 0<3\log x<3$

$\Rightarrow 3\log x=1$ 或 $2\Rightarrow\log x=\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{1}{3}}$ 或 $10^{\frac{2}{3}}$，即 $x=\sqrt[3]{10}$ 或 $\sqrt[3]{100}$

3. $\log(\dfrac{20}{9})^{300}=300(\log 2+\log 10-\log 9)$

$=300(0.3010+1-2\times 0.4771)=104.04$

$0.04\fallingdotseq\log 1.\cdots$

∴ 整數部分為 105 位數，最高位數字為 1

4. 即 $167\leq\log 47^{100}<168\Rightarrow 1.67\leq\log 47<1.68$

同乘 17 $\Rightarrow 28.39\leq\log(47^{17})<28.56\quad\therefore 47^{17}$ 為 29 位數

5. (1) $\log 3^{100}=100\log 3=47.71$，$\log 2^{158}=158\log 2=47.558$

$\because\log 3^{100}>\log 2^{158}\Rightarrow 3^{100}>2^{158}$

(2) $\log 3^{100}\times 2^{158}=\log 3^{100}+\log 2^{158}$

$=47.71+47.558=95.268=95+0.268$

$\therefore 3^{100}\times 2^{158}$ 為 96 位數

6. $\log(\dfrac{4}{3})^{n}>\log 1000\Rightarrow n\log\dfrac{4}{3}>3\Rightarrow n(\log 4-\log 3)>3$

$\Rightarrow n(2\times 0.3010-0.4771)>3\Rightarrow 0.1249n>3$

$\therefore n>\dfrac{3}{0.1249}\fallingdotseq 24.02$，$n$ 的最小值為 25

7. $\log a=\dfrac{1}{2}(\log 1.21+\log 13.2-\log 0.107)$

$=\dfrac{1}{2}[\log 1.21+\log(1.32\times 10)-\log(1.07\times 10^{-1})]$

$=\dfrac{1}{2}[0.0828+(1+0.1206)-(0.0294-1)]$

$=\dfrac{1}{2}\times 2.174=1.087$

8. $\log(1.03)^{10}=10\log 1.03=10\times 0.0128=0.128$

又 $\log 1.34=0.1271$，$\log 1.35=0.1303$

由線性內插法，令 $\log p=0.128$

x	$\log x$
1.34	0.1271
p	0.128
1.35	0.1303

$\dfrac{p-1.34}{0.01}=\dfrac{0.0009}{0.0032}$

$\Rightarrow p=1.34+0.01\times\dfrac{9}{32}=1.34+0.0028=1.3428\fallingdotseq 1.343$

$\log(1.03)^{10}\fallingdotseq 1.343$