目　次

1 數列與級數

1-1 數列與遞迴關係

在這個單元，我們將探討具規律性的數列，如等差與等比，並特別留意前後項的數字關係，稱為「遞迴數列」，而這種「遞推」的特性，還可以用來證明某些關於正整數的式子或性質，稱為「數學歸納法」。

觀念帶著走

教學建議：為使教學流暢，本章可與第三章「數據分析」合併成為第一次的段考範圍。

範例研習特區

1 等差數列與等比數列

1. 數列：將幾個數字依序寫出用逗號分開，即為數列。第 1 項稱為首項，其次為第 2 項、第 3 項、⋯、第 n 項。若數列為有限項，則稱最後一項為末項。
2. 數列的表示法：數列 $a_1, a_2, \cdots$，常以 $\langle a_n \rangle$ 來表示，如 $\langle 2n-1 \rangle$ 為正奇數 $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$ 所成的數列，$\langle n^2 \rangle$ 為完全平方數 $1, 4, 9, 16, 25, \cdots$ 所成的數列。
3. 等差數列：等差數列 $\langle a_n \rangle$，公差為 d，即 $a_2 = a_1 + d$、$a_3 = a_2 + d$、$a_4 = a_3 + d$、⋯，則 $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$ 為第 n 項通式。
4. 等差中項：a, b, c 三數成等差，稱中間項為等差中項，滿足 $2b = a + c$，即為前後兩項的算術平均數。
5. 等比數列：等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的公比為 r，各項均不可為 0，即 $a_2 = a_1 \times r$、$a_3 = a_2 \times r$、$a_4 = a_3 \times r$、⋯，則 $a_n = a_1 \times r^{n-1} = a_m \times r^{n-m}$ 為第 n 項通式。
6. 等比中項：a, b, c 三數成等比，稱中間項為等比中項，滿足 $b^2 = a \times c$。若三項均為正數，則等比中項即為前後兩項的幾何平均數。
7. 單利、複利與本利和：請同學先理解下列名詞，才能看懂題目。
   (1)本金：一開始所存或借的錢數。
   (2)利息與本利和：存入或借出本金一段時間後，會產生額外的錢，稱為「利息」，若要把錢領清或還清，則需連本帶利才可，稱為「本利和」，即本金加利息。
   (3)利率：一段時間所生利息，除以本金的百分比，稱為「利率」，依時間長短可分為年利率、月利率、日利率等。

(4) 期利率：事先約定多久時間要計算利息一次，稱為一期，一期的利率稱為期利率。如年利率為 12%，以三個月為一期，則一年有 4 期，期利率為 3%。

(5) 單利：利息外加，本金固定不變，利息沒有滾入本金來生利息，稱為單利。單利的本利和 = 本金 + 本金 × 期利率 × 期數，即本利和隨期數成等差數列，為線型函數。

(6) 複利：利息併入本金，本金變大，利上加利，稱為複利。複利的本利和 = 本金 × (1 + 期利率) ^{期數}，即本利和隨期數成等比數列，為指數函數。

注意 我們解題時所遇到的數列，通常都具有規則性，除了等差、等比以外，還有：

(1) 階差數列：如 $1,2,4,7,11,16,\cdots$ 相鄰兩項的差成等差遞增。

(2) 循環數列：如 $1,3,8,1,3,8,1,3,8,\cdots$，每三項一個循環重複出現。

(3) 調和數列：如 $\frac{2}{1},\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{7},\frac{2}{9}$，各項取倒數後成等差。

(4) 費波那契數列：如 $1,1,2,3,5,8,13,21$，各項為前兩項之和。

詳答參見詳解本 P.1

範例 1　數字的規律

看出數字的規則性，訓練對數字的感覺。

1. 數列 $1\times3^4,2\times3^5,3\times3^6,4\times3^7,\cdots$ 請根據規則猜測第 n 項的一般式為________。

解

> **小心注意**
> 猜測不一定正確，例如：數列前四項為 1,2,3,4 ______，則第五項必定是 5

2. 數列 $\langle a_n\rangle=\left\langle \dfrac{(n-5)^{n+1}}{(-1)^n\cdot(3n+15)}\right\rangle$，則第 7 項 $a_7=$________。

解

3. 將自然數按右列規律排列，每一列比前一列多一個數，如右表所示，試問第 100 列第 3 個數是________。

89 學測

第 1 列	1
第 2 列	2、3
第 3 列	4、5、6
第 4 列	7、8、9、10
第 5 列	11、12、13、14、15
…	…

解

4. 數列 $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{4},\dfrac{1}{5},\cdots$，求：

(1) $\dfrac{13}{29}$ 為第________項　(2)第 100 項不約分為________。

解

再講清楚

這種數列稱為分群數列，先觀察規則抓大群，再鎖定各群中的各項數字

這個題目的解法怎麼這麼麻煩，乾脆一個一個寫出來說不定還比較快。

土法煉鋼也可以啦！但是速度慢容易錯，而且解法不具一般性，題目的數字大些一下就掛了。同學要學習較高層次的解題方法，不然就 low class 了！

噢！好吧！我還是用推的把他算出來好了。

這樣才對，你可以試試底下的幾個類題。

類題 1 (1)數列 $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\cdots$ 的第 7 項為________。

(2)數列 $\left\langle \dfrac{(2n-11)^{4n-1}}{(-2)^n+3n+15} \right\rangle$ 的第 5 項為________。

類題 2 數列 $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{1},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{1},\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{1},\cdots$，試問：

(1) $\dfrac{10}{20}$ 是第________項　(2)第 88 項為________。（請勿約分）

類題 3　數列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{5}$，$\frac{1}{7}$，…，則 $\frac{17}{35}$ 是第______項。

類題 4　數列 $(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),\cdots$，依此類推，每個括號的數字個數比前一個括號多一，請問數列中第 23 個括號中的第 10 個數字是______。

這題常考

範例 2　等差數列（複習）

等差數列的一般項公式，可由規則推出，國中學過，不能忘喔！

1. 等差數列的第 10 項為 37，第 25 項為 82，求首項為______，公差為______，第 40 項為______。

解

應用公式
$a_n=a_1+(n-1)d$

2. 設等差數列 a,b,c 均為 1 到 9 的整數，滿足 $0.\overline{a}+0.\overline{4b}=1.\overline{2c}$，求 $a=$______，$b=$______，$c=$______。

解

複習觀念
1. 若 a、b、c 成等差，則 $2b=a+c$
2. 循環小數化成有理數
$1.\overline{2}=\frac{12-1}{9}$，
$1.2\overline{34}=\frac{1234-12}{990}$

類題 5　在 21 與 87 之間插入 10 個數使成等差數列，則所插入的第 7 個數為______。

類題 6　若 $x,y,8,z,u,v,-20,\cdots$ 成等差，求 $x=$______，第 n 項的通式為______。

類題 7　等差數列的第 11 項為 17，第 23 項為 -31，求首項為________，公差為________，第 35 項為________。

類題 8　等差數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_2+a_5=28$，$a_3+a_6+a_{10}=59$，求首項為________，公差為________。

詳答參見詳解本 P.2

這題必考

範例 3　等比數列及等比中項

正式介紹等比數列，其一般項公式可由規則直接推出。

1. 等比數列各項為實數，第 6 項為 120，第 9 項為 405，則公比為________，首項為________。

解

解題技巧
1. 請代公式：$a_n=a_1\times r^{n-1}$
2. 兩式相除在等比是很常用的解題手法

2. 等比數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1+a_2+a_3=-90$，$a_4+a_5+a_6=720$，求此數列的公比為________，首項為________。

解

3. 等比數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1=10000$，$a_{10}=-6000$，則 $a_{37}=$________。

解

傳授絕招
等比數列若等間隔跳著看，也成等比

4. 若 $x, 2x+2, 3x+3, \cdots$ 是等比數列，則此數列第五項為________。

解

小小叮嚀
1. 若 a、b、c 成等比，則 $b^2=ac$
2. 等比數列的各項絕不可為 0

類題 9 數列 $x, y, 1\frac{7}{9}, -2\frac{2}{3}, z$ 成等比，求 $x=$ ________，$z=$ ________。

類題 10 若等比數列的第 4 項為 12，第 7 項為 24，求首項為________，第 25 項為________。

類題 11 等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的各項均為負值，若 $a_4+a_6=-48$，$a_8+a_{10}=-3$，求首項為________，公比為________，第 9 項為________。

類題 12 小城鎮的人口數逐年成等比數列成長，若 10 年前有 25 萬人，現在有 30 萬人，則 20 年後的人口數為________萬人。

類題 13 若 20、50、100 各加上同一數後成為等比數列，則公比為________。

這題常考

範例 4 等差與等比　等差與等比的混合比較，培養同學觀察統整的能力。

1. 設實數數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為正數，請問下列哪些選項的推論為真？________

(A)若 $\langle a_n \rangle$ 為等差且 $a_{100}>0$，則 $a_{1000}>0$

(B)若 $\langle a_n \rangle$ 為等差且 $a_{1000}>0$，則 $a_{100}>0$

(C)若 $\langle a_n \rangle$ 為等比且 $a_{100}>0$，則 $a_{1000}>0$

(D)若 $\langle a_n \rangle$ 為等比且 $a_1+a_2<0$，則 $a_2+a_3<0$

(E)若 $\langle a_n \rangle$ 為等比，a_1、a_2 均為正整數，且 $a_1<a_2$，則 a_1 整除 a_2

解

再講清楚

1. 這一題由 97 年及 103 年的學測多選題修改而成，是「未定數」的命題形式，探討一般性的規則，跳脫傳統的計算
2. 判斷、驗證、舉反例，是處理各個選項的必備手法

2. 三個數成等差，其和為 45，若依次加 2、3、7 則成等比，求原來的三個數為 ______。（兩解）

解

傳授絕招

1. 若知等差的三數之和，則設三數為 $a-d,a,a+d$
2. 若知等比的三數之積，則設三數為 $\frac{a}{r},a,ar$

類題 14 數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$，若：
(1)均為等差，下列哪些仍為等差？______
(2)均為等比，下列哪些仍為等比？______
(A) $\langle a_n+10\rangle$　(B) $\langle 3a_n\rangle$　(C) $\langle a_n^{\,2}\rangle$　(D) $\langle 2^{a_n}\rangle$　(E) $\langle a_n+b_n\rangle$　(F) $\langle a_nb_n\rangle$

類題 15 若正整數 a,b,c 成等差，則下列哪些成等比？______
(A) a^2,b^2,c^2　(B) $2^a,2^b,2^c$　(C) a,ab,abc　(D) $ab^2c^3,a^2b^2c^2,a^3b^2c$

類題 16 某三正數成等差，其和為 36，若各項依次加上 1、4、43 後則成等比數列，求此三正數為______。

詳答參見詳解本 P.3

類題 17 設 $a-b,8,a+3b$ 成等差，又 $a,2,2b$ 成等比，則 $a^3+b^3=$ ______。

這題必考

範例 5　單利與複利

複利是等比的應用，可以累積財富，懂複利就不會隨便借錢。

1. 小明向小華借了 1600 元，每個月算一次利息，月利率為 50%，(1)若為單利，則半年後的本利和為______元　(2)若為複利，則半年後的本利和為______元。

解

應用公式

複利的本利和公式：
本利和 = 本金 × (1 + 期利率)$^{\text{期數}}$

2. 阿祥向銀行貸款 10 萬元，一年後還 60000 元，再過一年再還 55000 元並還清，若一年複利一次，則年利率為________。

解

再講清楚

未還的欠款，每過一期就增長為（1＋期利率）倍，這就是複利！到下個單元還有更厲害的複利問題

類題 18 借 10000 元，期利率 10%，請問：

⑴若為單利，前四期的滿期本利和依次為________________________。

⑵若為複利，前四期的滿期本利和依次為________________________。

類題 19 阿宏向別人借了 200 萬元，約定一個月後先還 120 萬元，再過一個月再還 144 萬元並還清，若以複利計算，則月利率為________。

類題 20 在銀行存入一萬元，⑴若年利率 10%，單利計算，10 年後的利息為________元
⑵若年利率 8%，複利計算，每年計息一次，10 年後的利息為________元。

（已知 $(1.08)^{10} \approx 2.1589$）

2 遞迴關係

1. **遞迴數列**：給數列的前後項關係，則可從第一項開始，不斷地推出下一項，把整個數列確定下來，稱為遞迴數列。解題時，常**代數字找前幾項來發現數字規律**，若是簡單的情形，則可求出一般項的通式。

2. **等差數列的遞迴式**：如 $\langle a_n \rangle = 5, 8, 11, 14, \cdots, 3n+2, \cdots$的遞迴式可寫成

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3, n \in N \end{cases}。$$

3. **等比數列的遞迴式**：如 $\langle a_n \rangle = 3, 6, 12, 24, \cdots, 3 \times 2^{n-1}, \cdots$的遞迴式可寫成

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n, n \in N \end{cases}。$$

4. 以等差、等比的遞迴式為基礎，我們要處理的遞迴關係可分成三大類型：

⑴累加型：$a_{n+1}=a_n+\cdots$：如 $a_{n+1}=a_n+n$，逐一列出後，用等量公理把算式相加來求一般項 a_n。

⑵累乘型：$a_{n+1}=a_n\times\cdots$：如 $a_{n+1}=a_n\times\dfrac{n+1}{n}$，逐一列出後，用等量公理把算式相乘來求一般項 a_n。

⑶等差比型：$a_{n+1}=p\times a_n+q$，其中 p 與 q 為定數，例如 $a_{n+1}=2a_n+5$，則可改寫成 $a_{n+1}+k=p(a_n+k)$，求出 k 後，將 $\langle a_n\rangle$ 同加 k 為 $\langle a_n+k\rangle$，即成等比數列，且公比為 p，所以由等比的第 n 項公式 $a_n+k=(a_1+k)\times p^{n-1}$ 移項即可求出 a_n。詳見範例 8。

這題必考

範例 6　代數字找規則

遞迴是前後項的關係，代數字求前幾項，先體會數字的規則。

1. 遞迴數列 $\begin{cases}a_1=29\\ a_n=a_{n-1}-3\,,n\geq 2\end{cases}$ 的第 n 項為________，前 20 項之和為________。

解

2. 遞迴數列 $\begin{cases}a_1=3\\ a_{n+1}=\sqrt{2}\,a_n\,,n\in N\end{cases}$ 的前 20 項之和為________。

解

3. 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=\dfrac{1}{7}$，$a_{n+1}=\dfrac{7}{2}a_n(1-a_n)$，求 $a_{101}+a_{202}=$________。

解

小小叮嚀

92 指考乙考過類似題

類題 21 遞迴數列 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3\,,n \geq 2 \end{cases}$ 的第 n 項為________。

類題 22 遞迴數列 $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} \times 2\,,n \geq 2 \end{cases}$ 的第 n 項為________。

類題 23 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \dfrac{4}{5}$，$a_{n+1} = \dfrac{5}{2}a_n(1 - a_n)$，求 $a_{20} =$ ________，前 20 項之和為________。

類題 24 數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴定義為 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{1-3a_n}{1-4a_n}$，其中 $n \in N$，則 $a_{20} =$ ________。

類題 25 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，$n \geq 2$ 時，$a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$，求 $a_2 =$ ________，$a_3 =$ ________，$a_4 =$ ________，$a_5 =$ ________。

這題必考

範例 7 用累加、累乘求一般項

等式的左邊相加乘，會等於右邊相加乘，就是等量公理。

1. 觀察數列 $\langle a_n \rangle = 1\,,2\,,4\,,7\,,11\,,16\,,22\,,\cdots$，依此規則求出第 10 項為________，第 n 項為________。

解

小小叮嚀

1. 如果熟練也可以兩邊直接消去
2. 到第二節，累加法結合求和公式可以設計出更進階的考題

詳答參見詳解本 P.4

2. 數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1 = 7$，$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$，$n \in N$，則 $a_{10} =$ ________，$a_n =$ ________。

解

再講清楚

如果熟練也可以兩邊直接約分

類題 26　若 $\langle a_n \rangle = 1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots$，求 $a_{20} =$ ________。

類題 27　數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + (2n - 3)$，$n \in N$，求 $a_n =$ ________。

類題 28　若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = n \cdot a_n$，則 $a_5 =$ ________。

類題 29　數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1 = 4$，$a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n} a_n$，$n \in N$，則 $a_n =$ ________。

範例 8 平移成等比的遞迴

$a_{n+1}=pa_n+q$ 的遞迴關係我們可以處理，但要先變形一下。

1. 數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1=3$，且 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，求 $a_n=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

解

複習一下

等比級數的首項為 a_1，公比為 r，則第 n 項 $a_n=a_1\times r^{n-1}$

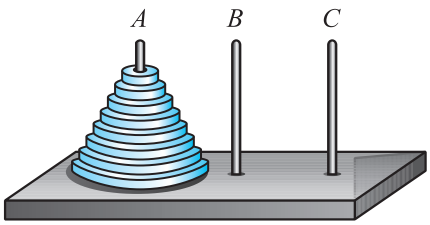
2. 數列 $\langle a_n\rangle$，已知 $a_1=1$ 且 n 大於 1 時有 $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+5$ 的關係，求一般項 $a_n=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

解

傳授絕招

看到 $a_{n+1}=pa_n+q$ 就先找 k，使 $a_{n+1}+k=p(a_n+k)$，也就是平移使 $\langle a_n+k\rangle$ 成等比數列

3. 有一種稱為「河內塔」的益智遊戲，是在木板上立有 A、B、C 三根桿子，A 桿有下大上小的圓盤 8 個，想要透過 B 全移到 C，一次只能移動一個圓盤，在移動過程中只允許小圓盤壓住大圓盤，請問至少需移動圓盤＿＿＿＿＿＿＿次。



解

再講清楚

1. 要移 7 個到 B，才能把第 8 個移到 C，要先移 6 個到 C，才能移第 7 個到 B，…
2. 這個益智遊戲的歷史相當久遠，而且有不少變形，同學可上網搜尋

類題 30　已知 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n + 3 = 2(a_{n-1} + 3), n \geq 2 \end{cases}$，求 $a_{10} =$ ________。

類題 31　若數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係 $a_{n+1} = 4a_n + 15$ 可改寫成 $a_{n+1} + k = 4(a_n + k)$，則 $k =$ ________，已知 $a_1 = 3$，求一般項 $a_n =$ ________。

類題 32　數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1 = 1$，$2a_{n+1} = a_n + 3$，$n \in N$，求 $a_n =$ ________。

類題 33　如果數列 $\langle a_n \rangle$ 的各項都可以先加 4 再乘上 3 得到下一項，且第一項的值為 2，求第 n 項的通式為 $a_n =$ ________。

詳答參見詳解本 P.5

這題必考

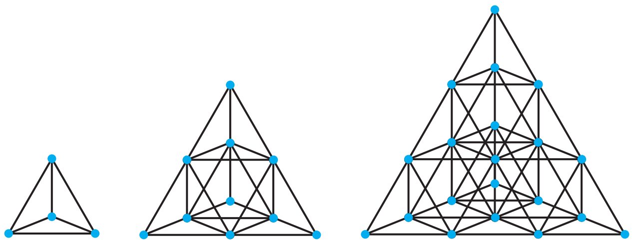
範例 9　圖形的遞迴

圖形的遞迴關係相當有趣，同學要觀察圖形來得到遞迴式。

1. 平面上 n 條直線，最多可分割平面為 a_n 個部分，則其遞迴關係式（含初始條件）為 ________，求一般項 $a_n =$ ________。

解

2. 用單位長的不銹鋼條焊接四面體鐵架，圖中的「•」表示焊接點，由圖知兩層共 4 個焊接點，三層共 10 個焊接點，四層共 20 個焊接點。若 n 層的鐵架共需 a_n 個焊接點，則 a_n 與 a_{n+1} 的遞迴關係式為________。

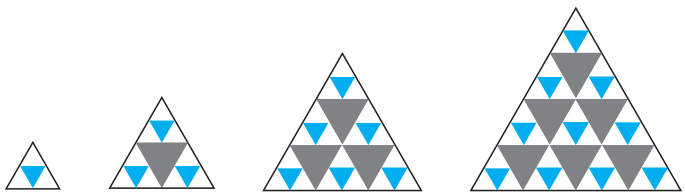


兩層　　三層　　四層

解

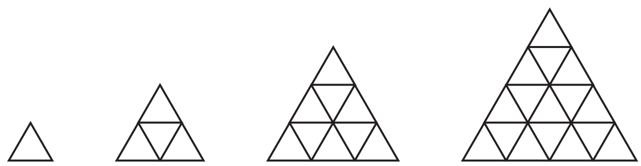
類題 34　$n \geq 2$，平面上 n 個點最多連成的直線數為 a_n，則 $a_{n+1} - a_n =$ ________，求一般項 $a_n =$ ________。

類題 35　用藍灰白三種顏色的三角形地磚依照如右圖的規律拼成若干圖形，試求拼圖三十六需用到________塊白色地磚「△」。



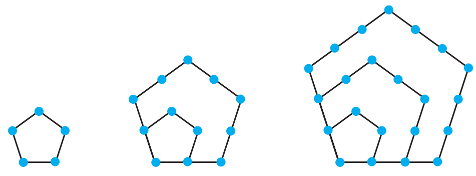
圖一　　圖二　　圖三　　圖四

類題 36　觀察右圖，各相鄰兩點的邊長為 1 單位，則第 n 圖的線段總長度為________。



圖一　　圖二　　圖三　　圖四

類題 37　如右圖，相鄰兩藍點的連線段長為 1 單位，設第 n 圖的線段總長度為 a_n，求：$a_n-a_{n-1}=$ ________，一般項 $a_n=$ ________。



3 數學歸納法

有些對自然數會成立的式子或性質，我們很難直接證明它，如果我們發現：式子對 k 成立的情況下，可經由推導得知對 $k+1$ 式子也會成立，那就像推骨牌一樣，一個推一個繼續下去，我們就確定式子對所有自然數都會成立，稱此證明方法為「數學歸納法」。

1. 數學歸納法的論述有固定模式，步驟如下：

(1)第一步驟：確定起始值成立，稱為起始步驟。

(2)第二步驟：假設對 k 成立，再推導證明對 $k+1$ 時也成立，稱為遞推步驟。

最後再加一句「$\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立，得證」。

注意 (1)前面步驟依題意照抄即可，重點在推導過程。

(2)數學歸納法必定是計算證明題，每個步驟都有部分分數，請同學儘量把握。

(3)每個老師對於數學歸納法的要求和寫法不盡相同，請同學注意配合。

(4)數學歸納法專門證明有關自然數的等式或性質，看到「n 為自然數」就自動聯想。

(5)「起始」與「遞推」兩步驟缺一不可，若遺漏有可能會得到錯誤的結論。

(6)在推得 $n=k+1$ 成立時，必須用到 $n=k$ 已成立的假設，否則就不能稱為「數學歸納法」，直接證明就可以了。

2. 本單元以數學歸納法解決的問題可分成三種類型，其證明論述詳見範例，如下：

(1)遞迴關係。如：若數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2a_n+3, n\in N \end{cases}$，證明：$a_n=2^{n+1}-3$。

(2)等式。如：$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$，$n$ 為自然數。

(3)倍數性質。如：n 為正整數，證明 $3^{2n+1}+2^{n+2}$ 必為 7 的倍數。

這題必考

範例 10 數學歸納法證明

近年來學測指考都不考歸納法的證明，所以就被弱化了！

1. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 2a_n + 5, n \in N \end{cases}$，證明：$a_n = 6 \times 2^n - 5$ 為 $\langle a_n \rangle$ 的一般式。

解

2. 證明：n 為自然數，$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

解

3. n 為自然數，$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ 必為某個質數 p 的倍數，求出 p 後並用數學歸納法證明。

解

小小叮嚀

1. 先猜測再證明，這就是學數學要培養的能力
2. 若不用 $9 = 7 + 2$，也可以用代入的方法來推導
3. 「k 的倍數」可以寫成「$kt, t \in Z$」，不然寫中文也可以

詳答參見詳解本 P.6

類題 38 設對於所有的自然數 n，$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2 \end{cases}$，請用數學歸納法證明：對於所有的自然數 n，$a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1$ 恆成立。

類題 39 證明：n 為自然數，$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

類題 40 n 為自然數，證明：$\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$。

類題 41 n 為自然數，證明：$3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ 恆為 17 的倍數。

類題 42 n 為自然數，證明：$9^{n+1} - 8n - 9$ 是 64 的倍數。

範例 11 歸納法的偵錯題

證明證得煩了，有些老師會編題目讓同學找錯誤，比較有趣。

阿寶在寫 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}+2$ 的證明，他的證明如下：

設 $n=k$ 時原式成立，即 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}+2$ 成立，則

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+2+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}+2=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}+2=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}+2=\frac{(k+1)}{(k+2)}+2$$

故推得 $n=k+1$ 原式成立，由數學歸納法知，原式對每一個正整數 n 成立。

請同學指出他證明的錯誤，在於＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

解

類題 43 小瑄用數學歸納法證明「對任意正整數 n，$n^2+5\geq 4n$ 恆成立」，其證明過程如下：

①當 $n=1$ 時，$n^2+5=6$，$4n=4$，故 $n^2+5\geq 4n$ 成立

②假設 $n=k$ 時不等式成立，即 $k^2+5\geq 4k$

當 $n=k+1$ 時，$(k+1)^2+5=[(k+1)^2-4(k+1)+4]+4(k+1)+1$

$=[(k+1)-2]^2+4(k+1)+1\geq 4(k+1)$

所以 $n=k+1$ 時，不等式亦成立

故由數學歸納法知，對任意正整數 n，$n^2+5\geq 4n$ 恆成立。

但小瑄的老師說他的證明是錯的，請你指出錯誤的地方。＿＿＿＿＿＿＿＿

類題 44 作業簿中有一道題目：「設 n 為自然數，不等式 $2^n\geq n^2$ 從某個正整數 α_0 開始會成立，試求 α_0 之值，並用數學歸納法證明之。」阿宏作答如下：

① $n=1$ 時，$2^1\geq 1^2$，不等式成立，所以 $\alpha_0=1$

② $n=k$ 成立，即 $2^k\geq k^2$

$n=k+1$，則 $2^{k+1}\geq (k+1)^2$ 成立，故由數學歸納法原理得證

請問其中有哪些錯誤的地方？＿＿＿＿

(A)沒有驗證起始的 α_0

(B)所驗證的 α_0 有誤，α_0 並不是 1

(C)未假設 n 為某整數 k 時成立

(D)沒有利用 $n=k$ 成立的假設來推導 $n=k+1$ 時的情形

素養導向試題

「遞迴關係」有趣的地方，就是可以發明規則製造出奇奇怪怪的數列，千年來給數學家增添許多靈感，也相當具有挑戰性。像著名的「費波那契數列 $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$」已有八百年歷史，至今仍有學者不斷發表最新的發現。在這裡，請同學先察覺數字規則，解決下列問題：

一、多選題

______ 1. 實數數列 $\langle a_n\rangle$ 的各項均非 0，設 $a_3=a_2+a_1$，下列選項何者為真？

(A)若 $a_1a_2>0$，則 $a_2a_3>0$

(B)若 $\langle a_n\rangle$ 成等差數列，則 $a_4=a_3+a_2$

(C)若 $\langle a_n\rangle$ 成等差數列，則 $a_4=4a_1$

(D)若 $\langle a_n\rangle$ 成等比數列，則 $a_4=a_3+a_2$

(E)若 $\langle a_n\rangle$ 成等比數列，則公比必為有理數

解

______ 2. 實數數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，其中 n 為自然數，則下列各選項的敘述哪些為真？

(A)若 a_1、a_2 均不為 0，則其他各項也都不為 0

(B)若 a_1、a_2 均為負數，則其他各項也都是負數

(C)若 a_1、a_2 均為整數，則其他各項也都是整數

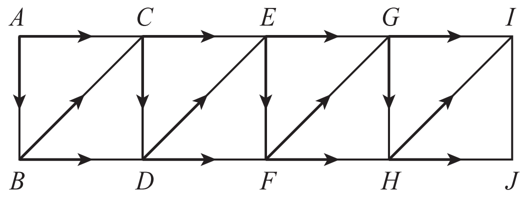
(D)若 a_1、a_2 均為無理數，則其他各項也都是無理數

(E)若 a_1、a_2 的乘積小於 0，則其他相鄰兩項的乘積也都小於 0

解

二、填充題

3. 由 A 出發，遵照箭頭指示走到 J，如右圖，請問共有________種走法。



解

詳答參見詳解本 P.7

4. 從教室到廁所的樓梯共 10 階，若每步可走一階或二階，請問走完此樓梯的登階過程共有________種。

解

再講清楚

到第二章第二節還會學到用排列的方法來解這個問題

5. 丟一個銅板，直到出現連續兩個正面就停止，否則就繼續丟。若共丟 10 次才結束，請問出現的正反過程共有________種情形。

解

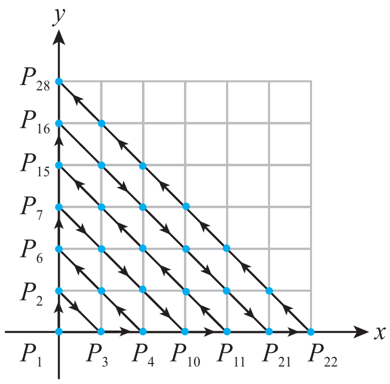
資優挑戰園地

1. 將正整數依序以括號分組（規律：第 k 組有 $(2k-1)$ 個連續正整數），(1)，$(2,3,4)$，$(5,6,7,8,9)$，⋯，$(a_n,\cdots,b_n)$，⋯，若第 n 組的第 1 個數字為 a_n，最後 1 個數字為 b_n，第 n 組的數字總和為 S_n，則下列選項哪些正確？________

(A) $a_5=17$　(B) $b_5=20$　(C) $a_{10}=82$　(D) $b_{10}=100$　(E) $S_{10}=1729$

解

2. 坐標平面上，把坐標為 (a, b)（a、b 是整數且 $a \geq 0$、$b \geq 0$）的點 P_1、P_2、P_3、…依右圖所示連成一串，從原點 $P_1(0, 0)$ 起算，若點 $P_k(25, 31)$，求 $k =$ ________ 。



解

3. 印度古廟內有一套共三根鐵柱的「河內塔」，有 64 個純金圓盤在 A 鐵柱上，若經由 B 鐵柱全移到 C 鐵柱，一次只能移動一個圓盤，且過程中只有小圓盤能壓住大圓盤，設一年可移動圓盤 3200 萬次（移一次約一秒），則要________億年時間才能完成這項工作。（$10^{0.3010} \approx 2$，$10^{0.759} \approx 5.741$）

解

4. 數列 $\langle a_n \rangle$，若 $a_1 = 1$，$a_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，證明：$\langle a_n \rangle$ 為等比數列。

解

5. 若 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$，證明：$\langle a_n\rangle$ 為費氏數列 $1,1,2,3,5,8,13,\cdots$。

解

歷 年 大 考 精 選

1. 某君於九十年初，在甲、乙、丙三家銀行各存入十萬元，各存滿一年後，分別取出。已知該年各銀行之月利率如右表，且全年十二個月皆依機動利率按月以複利計息。假設存滿一年，某君在甲、乙、丙三家銀行存款的本利和分別為 a、b、c 元，問下列哪些式子為真？________

	甲銀行	乙銀行	丙銀行
1 ～ 4 月	0.3%	0.3%	0.3%
5 ～ 8 月	0.3%	0.4%	0.2%
9 ～ 12 月	0.3%	0.2%	0.4%

(A) $a>b$　(B) $a>c$　(C) $b>c$　(D) $a=b=c$

91 指考甲

2. 假設實數 a_1、a_2、a_3、a_4 是一個等差數列，且滿足 $0<a_1<2$ 及 $a_3=4$。若定義 $b_n=2^{a_n}$，則以下哪些選項是對的？________

(A) b_1、b_2、b_3、b_4 是一個等比數列　(B) $b_1<b_2$　(C) $b_2>4$　(D) $b_4>32$　(E) $b_2\times b_4=256$

95 學測

3. 一個邊長為 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 a_n 根火柴棒，那麼 $a_{n+1}-a_n=$ ________。

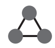
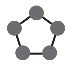
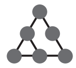
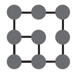
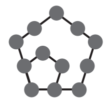
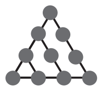
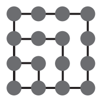
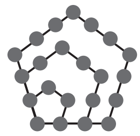
86 年社

詳答參見詳解本 P.8

4. 遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=12$，則 $a_5=$ ______。

106 學測

5. 用大小一樣的鋼珠排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠	●	●	●
每邊 2 個鋼珠			
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n=$ ______，$m=$ ________。

97 指考甲

6. 設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 之公差為正實數 α。試選出正確的選項。________

(A)若 $b_n=-a_n$，則 $b_1>b_2>b_3>\cdots$

(B)若 $c_n=a_n^2$，則 $c_1<c_2<c_3<\cdots$

(C)若 $d_n=a_n+a_{n+1}$，則 $d_1, d_2, d_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列

(D)若 $e_n=a_n+n$，則 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ 是公差為 $\alpha+1$ 的等差數列

(E)若 f_n 為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列

108 學測

1-2 級數求和

把數列加起來就是級數，同學已學過「等差級數」，應該不會感到陌生。級數求和的解題技巧比較繁雜多變，相關的題型相當豐富，想考高分就必須多記題型及解法，請同學由淺而深一步一步來學習。

範例研習特區

1 等差級數與等比級數

1. 級數：為數列 $\langle a_n \rangle$ 各項之和，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 為級數，前 n 項和習慣記為 S_n。
2. 等差級數：等差級數的公差為 d，則前 n 項之和為：

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\times n=\frac{[2a_1+(n-1)d]}{2}\times n$$，$\frac{a_1+a_n}{2}$ 為全體的算術平均。

3. 奇數項的等差級數 $a_1+\cdots+a_n$，其正中間項（即中位數）之值恰為全體的算術平均數，所以級數和等於正中間項 × 總項數。如：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=a_4\times 7$。
4. 等比級數：若公比 $r\neq 1$，則等比級數的和為：

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\underset{r<1\text{ 時用}}{\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}=\underset{r>1\text{ 時用}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}$$

1. 等差級數：前 n 項和 $S_n=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

證 $S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-3)d]+[a_1+(n-2)d]+[a_1+(n-1)d]\cdots①$

倒寫，$S_n=[a_1+(n-1)d]+[a_1+(n-2)d]+[a_1+(n-3)d]+\cdots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1\cdots②$

①＋②得 $2S_n=\underbrace{[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+\cdots+[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]}_{\text{共 } n \text{ 個}}$

$=[2a_1+(n-1)d]\times n$

$\therefore S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]}{2}\times n$，另由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\times n$，得證

2. 等比級數：前 n 項和 $S_n=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

證 $S_n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+0\cdots①$

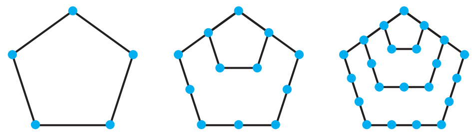
同乘 r 得 $rS_n=0+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots②$

①－②得 $S_n-rS_n=a-ar^n$，即 $S_n(1-r)=a(1-r^n)$ $\therefore S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

這題必考

範例 1　等差級數（複習）　國中學過等差級數，這邊再複習一下吧！

1. 圖形規則如右圖所示，求圖三十有________個藍圓點。



解

2. 若等差數列的第 8 項為 35，且前 20 項的和等於前 30 項的和，求首項為________，公差為________。

解

3. 等差數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_{10}=73$，$a_{25}=28$，求：
(1) $n=$ ________時，前 n 項和 S_n 有最大值為________。
(2)若 $S_n<0$，最小的 n 值為________。

解

原來如此
所有正數的項相加，就是和的最大值

類題 1　1 到 200 中，6 的倍數共有________項，其和為________。

類題 2　等差數列其第 6 項至第 10 項之和為 95，第 11 項至第 17 項之和為 217，求其首項為________，公差為________。

類題 3 等差級數的首項為正數，已知前 5 項的和與前 15 項的和相等，則第________項開始為負數。

類題 4 等差數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_8 = 123$，$a_{15} = 53$，求：
(1) $n =$ ________時，前 n 項和 S_n 有最大值為________。
(2)若 $S_n < 0$，最小的 n 值為________。

詳答參見詳解本 P.9

類題 5 某戲院共 15 排座位，後一排比前一排多 2 個座位，已知最後一排有 40 個座位，則該戲院共有________個座位。

這題必考

範例 2 等比級數

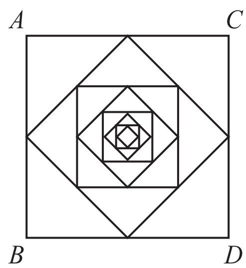
等比求和公式一定要會用，還要懂證明！

1. 等比級數 $16 - 8 + 4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{128} =$ ________。

解

2. 右圖中正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，依序連接各邊中點得較小的正方形，則圖中所有正方形的面積總和為________。

解



3. 等比級數各項為實數，前 6 項之和為前 3 項之和的 9 倍，求公比為________。

解

4. 有一等比數列，首項為 6，末項為 -768，和為 -510，若此數列的公比為 r，項數為 n，則 $r+n=$________。

解

傳授絕招

由 $a_n=a_1r^{n-1}$ 得 $a_nr=a_1r^n$，所以

$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{a_1r^n-a_1}{r-1}=\frac{a_nr-a_1}{r-1}$$

由 S_n、a_1、a_n 可用此式直接求 r

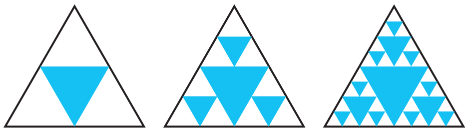
5. 若等比級數的前 n 項和為 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$，請問滿足 $|S_n-2|\le\frac{1}{10000}$ 的最小正整數 $n=$________。

解

類題 6　等比級數共有 10 項，第 9 項為 $\frac{1}{4}$，第 10 項為 $\frac{1}{8}$，求該 10 項之和為________。

類題 7　若等比級數 $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\cdots+$ 第 n 項，則 n 至少為________才可使其和大於 2000。

類題 8 在邊長 1 的正三角形中塗藍，規則如右圖，求圖五的藍色區域面積為________。



類題 9 等比級數的公比為 3，末項為 486，和為 728，求項數為________。

類題 10 等比級數共 $2n$ 項，若奇數項和為 255，偶數項和為 510，首項為 3，則公比為________。

類題 11 五個實數 a,b,c,d,e 成等比，若 $a+b=4$，$d+e=-108$，求 $c=$________。

這題必考

範例 3 等差等比求和（進階）

等差數列的正中間項就是算術平均數，很好用！

1. 等差數列 $\langle a_n\rangle$，已知 $a_7+a_{11}+a_{15}+a_{19}+a_{23}=55$，求：

(1) $a_{15}=$________ (2) $a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18}=$________。

解

歸納心得

$2+5+8=5\times 3$

$2+5+8+11+14=8\times 5$

$2+5+8+11+14+17+20=11\times 7$

$\therefore$ 奇數項的等差級數之和

$=$ 正中間項 $\times$ 總項數

2. 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$，第 n 項之比為 $a_n:b_n=(n+1):(2n+3)$，求前 19 項和之比值為 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{18}+a_{19}}{b_1+b_2+\cdots+b_{18}+b_{19}}=$________。

解

3. 等差級數前 10 項和 $S_{10}=5$，前 20 項和 $S_{20}=12$，求前 40 項和 $S_{40}=$ ________。

解

傳授絕招

每 10 項合併成一項，則新數列仍成等差

4. 等比級數前 n 項和 $S_n=48$，前 $2n$ 項和 $S_{2n}=60$，求前 $3n$ 項和 $S_{3n}=$ ________。

解

傳授絕招

每 n 項合併成一項，則新數列仍成等比。相當於 $n=1$ 代入的特例

詳答參見詳解本 P.10

類題 12　有一等差數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_{20}+a_{67}=15$，則 $a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{74}+a_{75}=$ ________。

類題 13　等差數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$，第 n 項之比為 $a_n:b_n=(3n+2):(2n+5)$，求前 11 項和之比為________。

類題 14　等差數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$，已知 $(a_1+a_2+\cdots+a_n):(b_1+b_2+\cdots+b_n)=(n+3):(3n+1)$，求 $a_{16}:b_{16}=$________。

類題 15　等差級數前 n 項和 $S_n=2$，前 $2n$ 項和 $S_{2n}=-8$，求前 $3n$ 項和 $S_{3n}=$ ________。

類題 16　等比級數前 n 項和 $S_n=12$，前 $2n$ 項和 $S_{2n}=36$，求前 $4n$ 項和 $S_{4n}=$ ________。

這題必考

範例 4 多次存款求本利和 | 零存整付與分期付款是等比級數的應用，非常實際重要。

1. 銀行提供儲蓄方案，每年年初存入 5000 元，年利率 20%，每半年複利一次，求 10 年後全部領出可得本利和為________元。（已知 $1.1^{20} \approx 6.719$，元以下四捨五入）

解

原來如此

1. 看成存 10 次在 10 家不同銀行，10 年後一次領出，就是等比級數
2. 因為半年複利一次，所以一年為兩期，期利率為 10%

2. 數學老師買房子向銀行辦理貸款借了一百萬元，一個月後開始還款，年利率為 6%，按月複利計息，若希望在 10 年期滿恰好還清，則每個月應該固定還給銀行________元。（整數以下四捨五入，請同學用手機先查一下，$1.005^{120} \approx$ ________）

解

引以為戒

1. 絕大部分的人借錢都不會算利息，只好任人宰割
2. 將答案乘上 120，再減 100 萬，算算看銀行賺了多少利息？ ________

利息好多呀！開銀行真好賺耶！

20 幾年前房貸利率 8% 就已經很優惠了，現在不到 2% 付款輕鬆很多

那刷信用卡的循環利率有多高呢？

大約 10% 上下，以前由銀行坐地喊價是 18%，被金管會認定是高利貸，現在降了不少！

類題 17 某人參加儲蓄存款，年利率 6%，每年複利一次，每年年初存入 10000 元，求 10 年後所得本利和為________元。（已知 $1.06^{10} \approx 1.7908$）

類題 18　小明借了十萬元，次月開始還款，每月複利計息，月利率為 1%，若要在一年後還清，請問每個月固定要還________元。（$1.01^{12} \approx 1.1268$，整數以下四捨五入）

類題 19　若老師向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6% 複利計算，則老師需要________年（無條件進位取整數）才可以還清。
（$\log 1.006 = 0.0026$，$\log 2.5 = 0.3980$）

2 級數性質與求和公式

1. **拆併性質**：設 p、q 為常數，則：
$$(pa_1+qb_1)+(pa_2+qb_2)+\cdots+(pa_n+qb_n)=p(a_1+a_2+\cdots+a_n)+q(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

2. 連續整數 $1,2,3,\cdots,n$ 的求和公式如下：
(1)等差求和：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
(2)平方求和：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(3)立方求和：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
公式(2)及(3)已在第 1 節「數列與遞迴關係」的範例 10，用數學歸納法完成證明。

3. **衍生公式**：利用上述公式可以推得
(1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$。
(2) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$。
例 $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+\cdots+99\times 100=\dfrac{99\times 100\times 101}{3}=333300$。

4. **由前 n 項和 S_n 求 a_n**：若已知前 n 項和 S_n，顯然 $a_1=S_1$、$a_2=S_2-S_1$、$a_3=S_3-S_2$，所以可得一般項為 $\begin{cases} a_1=S_1 \\ a_n=S_n-S_{n-1}，n\geq 2 \end{cases}$。

範例 5 級數的拆併性質

有限項相加可以拆併整理，這樣才能代求和公式。

1. 已知 $a_1+a_2+\cdots+a_n=23$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=10$，求 $(3a_1-4b_1)+(3a_2-4b_2)+\cdots+(3a_n-4b_n)=$ ______ 。

解

> **原來如此**
> 舊課綱習慣用縮寫符號 Σ 來表示級數和，如 $\sum\limits_{n=5}^{8}a_n=a_5+a_6+a_7+a_8$

2. 求和 $(3^0-2^2+11)+(3^1-2^3+16)+(3^2-2^4+21)+\cdots+(3^{n-1}-2^{n+1}+5n+6)+\cdots+(3^7-2^9+46)=$ ______ 。

解

3. 乘開整理得 $(5\times\underline{\underline{1}}+2)(3\times\underline{\underline{1}}-4)+(5\times\underline{\underline{2}}+2)(3\times\underline{\underline{2}}-4)+(5\times\underline{\underline{3}}+2)(3\times\underline{\underline{3}}-4)+\cdots+(5\times\underline{\underline{10}}+2)(3\times\underline{\underline{10}}-4)=p(\underline{\underline{1}}^2+\underline{\underline{2}}^2+\underline{\underline{3}}^2+\cdots+\underline{\underline{10}}^2)+q(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{2}}+\underline{\underline{3}}+\cdots+\underline{\underline{10}})+r$，請問 $p=$ ______，$q=$ ______，$r=$ ______ 。

解

詳答參見詳解本 P.11

類題 20 已知 $a_1+a_2+\cdots+a_n=15$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=8$，求 $(2a_1+3b_1)+(2a_2+3b_2)+\cdots+(2a_n+3b_n)=$ ______ 。

類題 21 若 $(2a_1+5b_1)+(2a_2+5b_2)+\cdots+(2a_n+5b_n)=55$，且 $(3a_1-4b_1)+(3a_2-4b_2)+\cdots+(3a_n-4b_n)=2$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$ ______，$b_1+b_2+\cdots+b_n=$ ______ 。

類題 22 求和 $(2^1-9\times 1-100)+(2^2-9\times 2-100)+(2^3-9\times 3-100)+\cdots$
$+(2^{10}-9\times 10-100)=$ ________。

類題 23 乘開整理得 $(5\times 1^2+3)(2\times 1-1)+(5\times 2^2+3)(2\times 2-1)+(5\times 3^2+3)(2\times 3-1)$
$+\cdots+(5\times 20^2+3)(2\times 20-1)=p(1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3)+q(1^2+2^2+3^2+\cdots+$
$20^2)+r(1+2+3+\cdots+20)+s$，請問序組 $(p,q,r,s)=$ ________。

連續整數 $1,2,3,4,\cdots,n$：

(1)等差求和公式：$1+2+3+4+\cdots+n=$ ________。

(2)平方求和公式：$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=$ ________。

(3)立方求和公式：$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=$ ________。

這題必考

範例 6　求和公式的運用 I

請同學背好上面的公式，讓我們開始計算吧！

1. 求 $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+14^2+16^2+18^2+20^2+22^2+24^2=$ ________。

解

應用公式

$(ab)^n=a^nb^n$

2. 求 $10^3+11^3+12^3+13^3+14^3+15^3+16^3+17^3+18^3+19^3+20^3=$ ________。

解

小小叮嚀

要從 1^3 開始才可以代公式

3. 求 $1^2(1+1)+2^2(2+1)+3^2(3+1)+\cdots+n^2(n+1)+\cdots+12^2(12+1)=$ ________。

解

類題 24　求 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+17^2+18^2=$ ______，$19^2+20^2+21^2+22^2+\cdots+30^2=$ ______。

類題 25　求 $3^2+6^2+9^2+12^2+\cdots+27^2+30^2=$ ______。

類題 26　求 $5^3+10^3+15^3+20^3+25^3+\cdots+45^3+50^3=$ ______。

類題 27　求 $22^3+24^3+26^3+28^3+30^3+\cdots+48^3+50^3=$ ______。

類題 28　求 $1\times(1+2)+2(2+2)+3(3+2)+4(4+2)+\cdots+n(n+2)+\cdots+48(48+2)$ $=$ ______。

這題必考

範例 7　求和公式的運用 II

等差數列對應項乘積可以求和，先各項拆併完再代公式。

1. 設等差數列 $\langle a_n\rangle=\langle 2n-3\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle=\langle n+1\rangle$，則前 20 項對應相乘可以求和，即

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{20}b_{20}=(-1)\times 2+1\times 3+3\times 4+\cdots+37\times 21$

$=(2\times\underline{\underline{1}}-3)(\underline{\underline{1}}+1)+(2\times\underline{\underline{2}}-3)(\underline{\underline{2}}+1)+(2\times\underline{\underline{3}}-3)(\underline{\underline{3}}+1)+\cdots+(2\times\underline{\underline{20}}-3)(\underline{\underline{20}}+1)$

$=$ ______。

解

2. 求 11 到 31 連續奇數的平方和為 $11^2+13^2+15^2+\cdots+29^2+31^2=$ ______。

解

3. (1)證明：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$。

(2)試求：$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+100\times101=$ ______。

解

小小叮嚀

1. 這個公式很好背，遇到會用的話可省下不少時間
2. 可推廣到一般情形，如
$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)$
$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

類題 29　數列 $\langle a_n\rangle=\langle 2n-3\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle=\langle n-1\rangle$，求 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{10}b_{10}=$ ______。

詳答參見詳解本 P.12

類題 30　求 $1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+n(2n+1)+\cdots+20\times41=$ ______。

類題 31　求前 10 個正奇數的平方和為 $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots+19^2=$ ______。

類題 32　$21\times22+22\times23+23\times24+\cdots+51\times52=$ ______。

類題 33　求 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+100)=$ ______。

這題常考

範例 8　圖形數字的計數

配合圖形規則的數字計算，在大考頗受命題老師的喜愛。

1. 觀察右列 3×3 與 4×4 方格中的數字規律，如果在 10×10 的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 100 個數字之總和為________。　88 年社

1	2	3
1	2	2
1	1	1

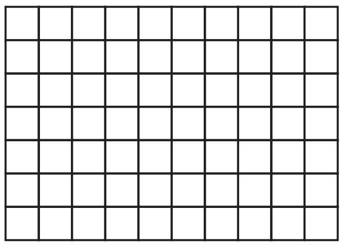
1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

解

小小叮嚀

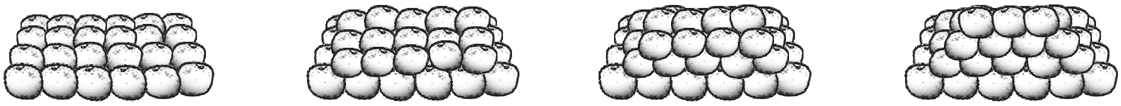
這一題用土法煉鋼直接算也不會太慢

2. 方格紙如右圖，11 條鉛直線和 8 水平線皆等間隔，請問在此圖形中總共有________個正方形。



解

類題 34　下圖表示長方形垛的疊法。某水果販將橘子堆成長方形垛，若最底層長邊有 10 個橘子，短邊有 5 個，則此長方形垛最多有________個橘子。　84 學測



類題 35　方格紙由 12 條水平線和 14 條鉛直線構成，其間距皆為 1 單位，則共形成________個正方形。

類題 36　觀察右列 2×2、3×3、4×4 方格中的數字規則，如果在 15×15 的方格上，依照此規則填入數字，則所填入的數字總和為________。

1	2
2	3

1	2	3
2	3	4
3	4	5

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

這題必考

範例 9　利用消項來求和

「反通分」與「拆項對消」是連加求和的特殊解法。

1. $\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\dfrac{1}{7\times10}+\cdots+\dfrac{1}{97\times100}=$________。

解

小小叮嚀

化成兩個分數相減，要記得修正

2. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+100}=$________。

解

傳授絕招

如果把分母加起來就完了！必須利用 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，如 $1+2=\dfrac{2\times3}{2}$，才能拆項對消

3. 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$________。

解

原來如此

$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

即有理化分母的技巧

類題 37　求 $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{17\times19}=$________。

詳答參見詳解本 P.13

類題 38 $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{4\times6}+\cdots+\dfrac{1}{18\times20}=$ ________。

類題 39 $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\dfrac{1}{4^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{10^2-1}=$ ________。

類題 40 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}=$ ________。

這題必考

範例 10　由前 n 項和 S_n 求 a_n

由和的通式來求一般項 a_n，是常考的基本題型。

1. 數列 $\langle a_n\rangle$，已知前 n 項和 $S_n=n^2+n+2$，$n\in N$，求：

(1) $S_5=$ ________　(2) $S_{2n+3}=$ ________　(3) $a_{10}=$ ________　(4) $a_n=$ ________。

解

傳授絕招

把 S_n 看成是 n 的函數，可把 n 用數字或符號取代，像 n 用 $(n-1)$ 代就是 S_{n-1}

由 $S_n=n^2+n+2$ 推出的 $\langle a_n\rangle$ 是不是等差呢？

不是的，因為 S_n 有常數項 2，所以首項會比等差的時候多出 2，$\langle a_n\rangle$ 應從第二項才開始成等差，也就是在 $S_n=pn^2+qn$ 才可推得 $\langle a_n\rangle$ 為等差。

2. 數列 $\langle a_n\rangle$，滿足 $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=n^2+n$，求 $a_n=$ ________。

解

類題 41　數列 $\langle a_n\rangle$，已知前 n 項和 $S_n=3n^2+4n-1$，求 $a_1=$ ________，$a_{10}=$ ________，$a_n=$ ________，$a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=$ ________。

類題 42　若 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+n-3$，則 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=$ ________。

類題 43　數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2n^2-3n$，求 $a_{20}=$ ________，$a_n=$ ________。

類題 44　數列的前 n 項和為 n^2-2n，若第 k 項為 999，則 $k=$ ________。

素養導向試題

同學在學過各種級數求和公式之後，一定要常用才不會忘掉，解題時也要保持耐心，數字繁雜時才不會心慌意亂。根據經驗，「公式背錯、題目看錯與計算出錯」是同學失分的三大主因，請盡力避免。然而，這些失誤也提供老師出題的靈感，可利用出錯的答案再循線逆推，求出正確的結果，相當有趣。請回下列問題：

◎填充題

1. 小明計算等差級數 $29+\cdots+371$ 時，因為漏數頭尾兩個數，所以比正確的項數少了兩項，得到的和介於 2100 與 2300 之間。若他沒有再犯其它錯誤，請問該級數正確的和是________。

解

詳答參見詳解本 P.14

2. 小華在計算等比級數 $S=a+2a+4a+8a+\cdots+1024a$ 時，誤以為只有 10 項，利用求和公式算出來的數字是 3069，若他沒有犯其它的錯誤，試求出 $a=$________，正確的級數和為________。

解

3. 小美在計算等比級數 $S_{10}=a-ar+ar^2-ar^3+\cdots+ar^8-ar^9$ 時，誤把公比 $-r$ 看成 r，所得的和恰為正確答案的 3 倍，請問 $r=$________。

解

4. 從 1 到 n 的連續整數平方和為 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，小芳誤記為 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$，結果在使用公式計算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$ 時得到錯誤的答案 1771，請問 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$ 的正確的和應為________。

解

資優挑戰園地

1. $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 為兩等差數列，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，已知 $S_n : T_n = (3n+2) : (7n+5)$，則：

   (1) $\dfrac{a_8}{b_8} =$ ________　(2) $\dfrac{a_3 + a_4}{b_2 + b_5} =$ ________　(3) $\dfrac{a_5 + a_{11}}{b_2 + b_8 + b_{14}} =$ ________。

   解

2. 化簡 $0.\underbrace{6}_{1\text{個}} + 0.\underbrace{66}_{2\text{個}} + 0.\underbrace{666}_{3\text{個}} + \cdots + 0.\underbrace{66\cdots6}_{n\text{個}} =$ ________。

   解

3. 化簡 $\dfrac{1}{1} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2^2} + \dfrac{7}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{n-1}} =$ ________。（這種數列的分子成等差，分母成等比）

   解

4. 數列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \cdots$，前 200 項之和為________。

   解

5. 化簡 $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=$______。

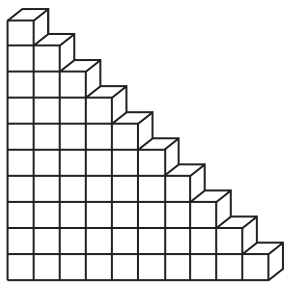
解

歷年大考精選

1. 有一個 101 項的等差數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{101}$，其和為 0，且 $a_{71}=71$，請問下列選項哪些正確？______
(A) $a_1+a_{101}>0$ (B) $a_2+a_{100}<0$ (C) $a_3+a_{99}=0$
(D) $a_{51}=51$ (E) $a_1<0$
85 學測

2. 某次網球比賽共有 128 位選手參加，採單淘汰制，每輪淘汰一半的選手，剩下一半的選手進入下一輪。在第 1 輪被淘汰的選手可獲得 1 萬元，在第 2 輪被淘汰的選手可獲得 2 萬元，在第 k 輪被淘汰的選手可獲得 2^{k-1} 萬元，而冠軍則可獲得 128 萬元。試問全部比賽獎金共______萬元。
91 學測

3. 將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如右圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊，…，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？______



(A) 75 平方公分 (B) 90 平方公分
(C) 110 平方公分 (D) 130 平方公分
(E) 150 平方公分
101 學測

4. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元，依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？______
(A) 10,000 元 (B) 1,000,000 元 (C) 100,000,000 元
(D) 1,000,000,000 元 (E) 1,000,000,000,000 元
104 學測

5. 設 $\langle a_n\rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 80，前五個奇數項的和為 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=120$，請選出首項 a_1 的正確範圍。______
(A) $a_1<80$ (B) $80\le a_1<90$ (C) $90\le a_1<100$
(D) $100\le a_1<110$ (E) $110\le a_1$。
105 學測

1 數列與級數

1-1 數列與遞迴關係

範例研習特區

範例 1

1.【小心注意】×

$n\times 3^{n+3}$

2. $a_7=\dfrac{(7-5)^{7+1}}{(-1)^7\cdot(3\times7+15)}=\dfrac{2^8}{(-1)\cdot 36}=-\dfrac{64}{9}$

3. 第 1 列的末項為 1，第 2 列的末項為 $3=1+2$

第 3 列的末項為 $6=1+2+3$

得第 99 列的末項為 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\times100}{2}=4950$

∴第 100 列的前幾項為 4951、4952、$\boxed{4953}$、⋯

故所求為 4953

4. (1) $\dfrac{1}{1},\cdots,\dfrac{28}{28}$，共 $1+2+3+\cdots+28=\dfrac{28\times29}{2}=406$ 項

$\therefore\ \underset{407項}{\dfrac{1}{29}},\underset{408項}{\dfrac{2}{29}}\cdots,\underset{419項}{\dfrac{13}{29}}$（加 12）　$\therefore\ \dfrac{13}{29}$ 為第 419 項

(2)第 100 項前有完整的 $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{n}{n}$

有 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 項　$\therefore\ \dfrac{n(n+1)}{2}\le 100$

$\Rightarrow$ 看出 $n=13$，$\dfrac{13\times14}{2}=91$

∴得 $\dfrac{1}{1},\cdots,\underset{91項}{\dfrac{13}{13}},\underset{92項}{\dfrac{1}{14}},\dfrac{2}{14},\cdots,\underset{100項}{\dfrac{9}{14}}$（加 8）

類 題

1 (1) $\dfrac{1}{64}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　2 (1) 416　(2) $\dfrac{10}{4}$　3 306　4 263

1 (1)首項 1，公比為 $-\dfrac{1}{2}$，$a_7=a_1r^6=1\times(\dfrac{-1}{2})^6=\dfrac{1}{64}$

(2) $n=5$ 代入，$a_5=\dfrac{(10-11)^{19}}{(-2)^5+15+15}=\dfrac{-1}{-32+30}=\dfrac{1}{2}$

2 $\dfrac{1}{1}$ 為第 1 群；$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{1}$ 為第 2 群；$\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{1}$ 為第 3 群

(1) $\dfrac{10}{20}$ 的分子和分母之和為 30，在第 29 群

前 28 群共 $1+2+3+\cdots+28=\dfrac{28\times29}{2}=406$ 項

第 29 群為 $\underset{407項}{\dfrac{1}{29}},\underset{408項}{\dfrac{2}{28}},\cdots,\underset{416項}{\dfrac{10}{20}}$　$\therefore\ \dfrac{10}{20}$ 為第 416 項

(2)前 n 群有 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\le 88$ 項　$\therefore\ n=12$

前 12 群共 $1+2+\cdots+12=\dfrac{12\times13}{2}=78$ 項

第 13 群為 $\underset{79項}{\dfrac{1}{13}},\underset{80項}{\dfrac{2}{12}},\underset{81項}{\dfrac{3}{11}},\cdots,\underset{88項}{\dfrac{10}{4}}$，故第 88 項為 $\dfrac{10}{4}$

3 $\underbrace{\dfrac{1}{1}}_{1},\underbrace{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{3}}_{3},\underbrace{\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{5}}_{5},\dfrac{1}{7},\cdots$

$\dfrac{1}{35}$ 之前共有 $1+3+5+\cdots+33=\dfrac{(1+33)\times17}{2}=289$ 項

$\therefore\ \underset{290項}{\dfrac{1}{35}},\underset{291項}{\dfrac{2}{35}},\underset{292項}{\dfrac{3}{35}},\cdots,\underset{306項}{\dfrac{17}{35}}$　$\therefore\ \dfrac{17}{35}$ 為第 306 項

4 前 22 個括號共有

$1+2+3+4+\cdots+22=\dfrac{(1+22)\times22}{2}=253$ 個數

∴第 23 個括號內的數為 $(254,255,256\cdots)$

所求 $=254+9=263$

範例 2

1. $a_{10}=a_1+9d=37\cdots①$，$a_{25}=a_1+24d=82\cdots②$

②－①得 $15d=45\ \Rightarrow\ d=3$

代回①得 $a_1+27=37\ \Rightarrow\ a_1=10$

$\therefore\ a_n=10+(n-1)\times3=3n+7$

則 $a_{40}=3\times40+7=127$

2. $\dfrac{a}{9}+\dfrac{40+b}{99}=\dfrac{(120+c)-1}{99}$

同乘 99 得 $11a+(40+b)=119+c$

即 $11a+b-c=79\cdots①$，且 $2b=a+c\cdots②$

由②知 $c=2b-a$ 代入①

$11a+b-(2b-a)=12a-b=79$

若 $a=7$，則 $b=5$，$c=3$

若 $a=8$，則 $b=17$，不合

類 題

5 63　6 22；$29-7n$　7 57；-4；-79　8 9；2

5 共 12 個數，$a_1=21$

$a_{12}=21+11d=87\ \Rightarrow\ d=6$

所求 $a_8=a_1+7d=21+7\times6=63$

6 $-20=8+4d\quad\therefore\ d=-7$

則 $8=x+2d=x-14$，得 $x=22$

$\therefore\ a_n=x+(n-1)d=22+(n-1)\times(-7)=29-7n$

7 $a_{11}=a_1+10d=17\cdots①$

$a_{23}=a_1+22d=-31\cdots②$

②－①得 $12d=-48\ \Rightarrow\ d=-4$，代①得 $a_1=57$

$a_{35}=a_1+34d=57+34\times(-4)=-79$

8 $a_2+a_5=(a+d)+(a+4d)=2a+5d=28\cdots①$

$a_3+a_6+a_{10}=(a+2d)+(a+5d)+(a+9d)$

$=3a+16d=59\cdots②$

②×2－①×3 得 $17d=34\quad\therefore\ d=2$

代回①得首項 $a=9$

範例 3

1. $\begin{cases} a_6 = a_1 \cdot r^5 = 120 \cdots ① \\ a_9 = a_1 \cdot r^8 = 405 \cdots ② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①}$ 得 $r^3 = \dfrac{405}{120} = \dfrac{27}{8}$ $\quad \therefore r = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$

代入①得 $a_1 \cdot (\dfrac{3}{2})^5 = 120 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 120 \cdot \dfrac{32}{243} = \dfrac{1280}{81}$

2. 設首項為 a，公比為 r，則

$a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2) = -90 \cdots ①$

$ar^3 + ar^4 + ar^5 = ar^3(1 + r + r^2) = 720 \cdots ②$

② ÷ ①得 $r^3 = \dfrac{720}{-90} = -8 \quad \therefore r = -2$

代回①得 $a \cdot (1 - 2 + 4) = -90$，得 $a = -30$

3. $a_1 , a_{10} , a_{19} , a_{28} , a_{37}$ 也成等比，設公比為 r

則 $r = \dfrac{a_{10}}{a_1} = \dfrac{-6000}{10000} = -0.6$

$\therefore a_{37} = 10000 \cdot (-0.6)^4 = 1296$

4. 則 $(2x + 2)^2 = x \cdot (3x + 3)$

即 $4x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 3x \quad \therefore x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 1)(x + 4) = 0$，得 $x = -1$ 或 -4

則 $\begin{cases} \text{若 } x = -1\text{，得數列為 } -1 , 0 , 0 , \cdots , \text{不合} \\ \text{若 } x = -4\text{，得數列為 } -4 , -6 , -9 , -\dfrac{27}{2} , -\dfrac{81}{4} \end{cases}$

$\therefore$ 所求為 $-\dfrac{81}{4}$

類 題

9 $\dfrac{64}{81}$；4 **10** 6；1536 **11** $-\dfrac{1536}{5}$；$\dfrac{1}{2}$；$-\dfrac{6}{5}$ **12** 43.2 **13** $\dfrac{5}{3}$

9 即 $x , y , \dfrac{16}{9} , -\dfrac{8}{3} , z \quad \therefore$ 公比為 $(-\dfrac{8}{3}) \div \dfrac{16}{9} = -\dfrac{3}{2}$

則 $y = \dfrac{16}{9} \div (-\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{32}{27}$

$x = (-\dfrac{32}{27}) \div (-\dfrac{3}{2}) = \dfrac{64}{81}$

$z = (-\dfrac{8}{3}) \times (-\dfrac{3}{2}) = 4$

10 $a_4 = ar^3 = 12 \cdots ①$，$a_7 = ar^6 = 24 \cdots ②$

相除得 $r^3 = 2$，代入①得 $a \cdot 2 = 12 \quad \therefore a = 6$

$a_{25} = ar^{24} = a \cdot (r^3)^8 = 6 \cdot 2^8 = 6 \times 256 = 1536$

11 則 $a_4 + a_6 = ar^3 + ar^5 = ar^3(1 + r^2) = -48 \cdots ①$

$a_8 + a_{10} = ar^7 + ar^9 = ar^7(1 + r^2) = -3 \cdots ②$

② ÷ ①得 $r^4 = \dfrac{-3}{-48} = \dfrac{1}{16}$

$\therefore r = \pm\dfrac{1}{2}$（取正，因公比大於 0）$= \dfrac{1}{2}$

代回①得 $a \cdot \dfrac{1}{8}(1 + \dfrac{1}{4}) = -48$

$\therefore a = (-48) \times 8 \times \dfrac{4}{5} = -\dfrac{1536}{5}$

第 9 項為 $ar^8 = -\dfrac{1536}{5} \times (\dfrac{1}{2})^8 = -\dfrac{6}{5}$

12 10 年前為 $a_1 = 25$

現在為 $a_2 = 30$ $\quad \Rightarrow \quad$ 公比為 $\dfrac{30}{25} = \dfrac{6}{5}$

10 年後為 $a_3 = 30 \times \dfrac{6}{5} = 36$

20 年後為 $a_4 = 36 \times \dfrac{6}{5} = 43.2$ 萬人

13 $x + 20 , x + 50 , x + 100$ 成等比

則 $(x + 50)^2 = (x + 20)(x + 100)$

即 $x^2 + 100x + 2500 = x^2 + 120x + 2000 \quad \therefore x = 25$

得 $45 , 75 , 125$ 成等比，公比為 $\dfrac{75}{45} = \dfrac{5}{3}$

範例 4

1. (A)×；若 $a_1 = 2$，公差為 -0.01，知 $a_{100} > 0$ 且 $a_{1000} < 0$

(B)○；因 a_1 與 a_{1000} 均為正數

所以 $a_1 \sim a_{1000}$ 各項均為正數

(C)○；由 $a_{100} = a_1 \times r^{99} > 0$ 知 $r^{99} > 0$

$\therefore r > 0$，則 $\langle a_n \rangle$ 各項均為正數

(D)×；設 $a_1 = a$ 且公比為 r

若 $a + ar = a(1 + r) < 0$，則 $r < -1$

所以 $a_2 + a_3 = ar + ar^2 = \underbrace{ar}_{+-}\underbrace{(1 + r)}_{-} > 0$ 才對

(E)×；反例：等比數列 4 , 6 , 9 滿足條件，但 4 不整除 6

故選(B)(C)

2. 設三數為 $a - d , a , a + d$

則其和為 $(a - d) + a + (a + d) = 3a = 45 \quad \Rightarrow \quad a = 15$

則 $15 - d , 15 , 15 + d$ 各加 2、3、7 為 $17 - d , 18 , 22 + d$

滿足 $18^2 = (17 - d)(22 + d) \quad \Rightarrow \quad 324 = 374 - 5d - d^2$

$\Rightarrow \quad d^2 + 5d - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad (d + 10)(d - 5) = 0$

得 $d = -10$ 或 5 $\quad \therefore$ 原來三數為 25 , 15 , 5 或 10 , 15 , 20

類 題

14 (1)(A)(B)(E) (2)(B)(C)(F) **15** (B)(D) **16** 3 , 12 , 21 **17** 464

14 (1)用 $\langle a_n \rangle = 1 , 2 , 3 , 4$，$\langle b_n \rangle = 2 , 4 , 6 , 8$

檢查得(A)(B)(E)

(2)用 $\langle a_n \rangle = 1 , 2 , 4 , 8$，$\langle b_n \rangle = 1 , 3 , 9 , 27$

檢查得(B)(C)(F)

15 如 1 , 2 , 3

(A)×；為 1 , 4 , 9

(B)○；為 $2^1 , 2^2 , 2^3$

(C)×；為 1 , 2 , 6

(D)○；為 $1 \times 4 \times 27 , 1 \times 4 \times 9 , 1 \times 4 \times 3$

16 設此三數為 $a - d , a , a + d$

和 $= (a - d) + a + (a + d) = 3a = 36$，得 $a = 12$

$\therefore$ 三數為 $12 - d , 12 , 12 + d$

依次加上 1、4、43 $\quad \Rightarrow \quad 13 - d , 16 , 55 + d$ 為等比

$\therefore 256 = (13 - d)(55 + d) \quad \Rightarrow \quad d^2 + 42d - 459 = 0$

$\Rightarrow \quad (d - 9)(d + 51) = 0$

① $d = -51$ 時，三數為 63 , 12 , −39（不合）

② $d = 9$ 時，三數為 3 , 12 , 21

17 即 $\begin{cases}2\cdot 8=(a-b)+(a+3b)\\ 2^2=a\cdot 2b\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a+b=8\cdots①\\ ab=2\quad\cdots②\end{cases}$

則 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=8[(a+b)^2-3ab]=8[8^2-3\times 2]=464$

範例 5

1.共 6 期

(1)單利本利和 = 本金 + 利息 $=1600+1600\times 50\%\times 6$

$=1600+4800=6400$元

(2)複利本利和 $=1600(1+50\%)^6=1600\times(\frac{3}{2})^6$

$=1600\times\frac{729}{64}=25\times 729=18225$ 元

2.設年利率 $x\%=\frac{x}{100}$

$\therefore [100000(1+\frac{x}{100})-60000]\times(1+\frac{x}{100})=55000$

令 $1+\frac{x}{100}=t$ $\Rightarrow$ $(100000t-60000)t=55000$

$\Rightarrow$ $100000t^2-60000t-55000=0$

$\Rightarrow$ $20t^2-12t-11=0$ $\Rightarrow$ $(10t-11)(2t+1)=0$

$\therefore t=1+\frac{x}{100}=\frac{11}{10}$ 或 $-\frac{1}{2}$（不合） $\Rightarrow$ $1+\frac{x}{100}=\frac{11}{10}$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{100}=\frac{1}{10}$，得 $x=10$ $\therefore$年利率為 10%

類 題

18 (1) 11000、12000、13000、14000

(2) 11000、12100、13310、14641

19 20%

20 (1) 10000 (2) 11589

19 設月利率為 $x\%$

$[200(1+x\%)-120]\cdot(1+x\%)=144$

令 $1+\frac{x}{100}=t$，則 $200t^2-120t-144=0$

即 $25t^2-15t-18=(5t-6)(5t+3)=0$

$\therefore t=1+\frac{x}{100}=\frac{6}{5}$ 或 $\frac{-3}{5}$（負不合），得 $\frac{x}{100}=\frac{1}{5}=20\%$

20 (1)利息 $=10000\times 10\%\times 10=10000$ 元

(2)利息 = 本利和 − 本金 $=10000(1+0.08)^{10}-10000$

$=10000\times 2.1589-10000=11589$ 元

範例 6

1.此為等差數列，公差為 −3

$\therefore a_n=29+(n-1)\times(-3)=32-3n$

前 20 項之和為

$S_{20}=\frac{2\times 29+19\times(-3)}{2}\times 20=(58-57)\times 10=10$

2.此為等比數列，公比為 $\sqrt{2}$

前 20 項之和為

$S_{20}=\frac{3(\sqrt{2}^{\,20}-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{3\times 1023}{\sqrt{2}-1}=\frac{3069}{\sqrt{2}-1}=3069(\sqrt{2}+1)$

3. $a_2=\frac{7}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{3}{7}$，$a_3=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

$a_4=\frac{7}{2}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$，$a_5=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

奇數項（首項除外）為 $\frac{6}{7}$，偶數項為 $\frac{3}{7}$

$\therefore a_{101}=\frac{6}{7}$，$a_{202}=\frac{3}{7}$，所求 $=\frac{6}{7}+\frac{3}{7}=\frac{9}{7}$

類 題

21 $3n-2$ 22 $5\times 2^{n-1}$ 23 $\frac{3}{5}$；12 24 $\frac{20}{39}$

25 1；3；12；60

21 此為等差數列，公差為 3

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

22 此為等比數列，公比為 2

$\therefore a_n=5\times 2^{n-1}$

23 $a_2=\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，$a_3=\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$，$a_4=\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

a_3 以後均為 $\frac{3}{5}$ $\therefore a_{20}=\frac{3}{5}$

前 20 項之和 $=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times 18=\frac{60}{5}=12$

24 $a_2=\frac{1-3}{1-4}=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{1-3\times\frac{2}{3}}{1-4\times\frac{2}{3}}=\frac{-1}{-\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$

$a_4=\frac{1-3\times\frac{3}{5}}{1-4\times\frac{3}{5}}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{7}{5}}=\frac{4}{7}$

可猜測 $a_n=\frac{n}{2n-1}$ $\therefore a_{20}=\frac{20}{39}$

《驗證》 $a_{n+1}=\frac{1-3a_n}{1-4a_n}=\frac{1-\frac{3n}{2n-1}}{1-\frac{4n}{2n-1}}=\frac{\frac{-n-1}{2n-1}}{\frac{-2n-1}{2n-1}}=\frac{n+1}{2n+1}$

25 $a_2=a_1=1$

$a_3=a_1+2a_2=1+2\times 1=3$

$a_4=a_1+2a_2+3a_3=1+2\times 1+3\times 3=12$

$a_5=a_1+2a_2+3a_3+4a_4=1+2\times 1+3\times 3+4\times 12=60$

範例 7

1.① 1，2，4，7，11，16，22，29，37，46，⋯

加 6 加 7 加 8 加 9

∴第 10 項為 46

② $\left.\begin{aligned}&a_1=1\\&a_2=a_1+1\\&a_3=a_2+2\\&a_4=a_3+3\\&\quad\vdots\\&a_n=a_{n-1}+(n-1)\end{aligned}\right\}$ 相加

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+[1+1+2+3+\cdots+(n-1)]$

即 $a_n=1+\frac{(n-1)\times n}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$

2. $n=1$ 代入 $\Rightarrow$ $a_2=\frac{1}{2}a_1$
$n=2$ 代入 $\Rightarrow$ $a_3=\frac{2}{3}a_2$
$n=3$ 代入 $\Rightarrow$ $a_4=\frac{3}{4}a_3$ 相乘
$\vdots$
$n=9$ 代入 $\Rightarrow$ $a_{10}=\frac{9}{10}a_9$

$\therefore a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\times a_9\times a_{10}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10}\times a_1\times a_2\times\cdots\times a_9$

∴兩邊約分得 $a_{10}=\frac{1}{10}\times a_1=\frac{7}{10}$，同理可看出 $a_n=\frac{7}{n}$

類題

26 210　27 n^2-4n+4　28 24　29 $2n(n+1)$

26 $a_1=1$
$a_2=a_1+2=1+2$
$a_3=a_2+3=1+2+3$
$a_4=a_3+4=1+2+3+4$
$\therefore a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，則 $a_{20}=\frac{20\times21}{2}=210$

27 $a_2=a_1+(-1)$
$a_3=a_2+1$
$a_4=a_3+3$ 相加並化簡
$\vdots$
$a_n=a_{n-1}+[2(n-1)-3]$

$\therefore a_n=a_1+[\underbrace{(-1)+1+3+\cdots+(2n-5)}_{共(n-1)項}]$
$=1+\frac{(-1)+(2n-5)}{2}\times(n-1)=n^2-4n+4$

28 $a_2=1\times a_1=1$
$a_3=2\times a_2=2\times1=2$
$a_4=3\times a_3=3\times2=6$
$a_5=4\times a_4=4\times6=24$

29 $a_1=4$
$a_2=\frac{3}{1}a_1$
$a_3=\frac{4}{2}a_2$
$\vdots$
$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$

相乘，得 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}\times a_n$
$=a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}\times4\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n-1}$

即 $a_n=4\times\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{4}}{2}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{n}{\cancel{n-2}}\times\frac{n+1}{\cancel{n-1}}$
$=4\times\frac{n(n+1)}{1\times2}=2n(n+1)$

範例 8

1. 即 a_1+1、a_2+1、a_3+1、…、a_n+1 為等比數列且公比為 2
$\therefore a_n+1=(a_1+1)\times2^{n-1}=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$
$\therefore a_n=2^{n+1}-1$

2. 設 $a_n+k=\frac{2}{3}(a_{n-1}+k)$，乘開為 $a_n+k=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3}k$
$\therefore -\frac{k}{3}=5$，得 $k=-15$，即 $a_n-15=\frac{2}{3}(a_{n-1}-15)$
$\therefore a_1-15$、a_2-15、a_3-15、…、a_n-15
為等比數列且公比為 $\frac{2}{3}$
則 $a_n-15=(a_1-15)\times(\frac{2}{3})^{n-1}=-14\times(\frac{2}{3})^{n-1}$
$\therefore a_n=15-14\times(\frac{2}{3})^{n-1}$

3. 設移動 n 個盤子到另一根桿子需移動 a_n 次
則 $a_1=1$
$a_2=1+1+1=3$
$a_3=3+1+3=7$
$a_4=7+1+7=15$
$a_5=15+1+15=31$
$a_6=31+1+31=63$
$a_7=63+1+63=127$
$a_8=127+1+127=255$
看出 $a_{n+1}=2a_n+1$，並猜出 $a_n=2^n-1$
《另解》設 $a_{n+1}+k=2(a_n+k)$　$\therefore k=1$
即 a_1+1、a_2+1、a_3+1、…、a_n+1 成等比
公比為 2　$\therefore a_n+1=(a_1+1)\cdot2^{n-1}=2^n$，得 $a_n=2^n-1$

類題

30 2045　31 5；$2\times4^n-5$　32 $3-\frac{4}{2^n}$　33 $8\cdot3^{n-1}-6$

30 因 $a_1+3, a_2+3, a_3+3,\cdots, a_n+3$ 成等比且公比為 2
$\therefore a_{10}+3=(a_1+3)\cdot2^9=4\times512=2048$，得 $a_{10}=2045$

31 $a_{n+1}+k=4a_n+4k$　$\therefore 3k=15$，得 $k=5$
$a_2+5=4(a_1+5)$
$a_3+5=4(a_2+5)$
$a_4+5=4(a_3+5)$ 相乘
$\vdots$
$a_n+5=4(a_{n-1}+5)$
$\therefore a_n+5=4^{n-1}(a_1+5)=4^{n-1}\times8=2\times4^n$
$\therefore a_n=2\times4^n-5$

32 設 $2(a_{n+1}+k)=(a_n+k)$，乘開比較原式得 $-k=3$，$k=-3$
$\therefore 2(a_{n+1}-3)=a_n-3$
$2(a_2-3)=a_1-3$
$2(a_3-3)=a_2-3$
$\vdots$
$2(a_n-3)=a_{n-1}-3$
相乘約分得 $2^{n-1}(a_n-3)=a_1-3=-2$
$\therefore a_n=\frac{-2}{2^{n-1}}+3=3-\frac{4}{2^n}$

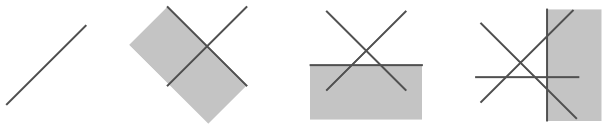
33 即 $a_{n+1}=3(a_n+4)=3a_n+12$ …①
設 $a_{n+1}+k=3(a_n+k)$，乘開為 $a_{n+1}=3a_n+2k$
與①比較得 $2k=12$　$\therefore k=6$

即 $a_{n+1}+6=3(a_n+6)$，則 $\langle a_n+6\rangle$ 成等比

得 $a_n+6=(a_1+6)\times 3^{n-1}$ $\quad\therefore a_n=8\cdot 3^{n-1}-6$

範例 9

1.



$n=1$ $\qquad n=2$ $\qquad n=3$ $\qquad n=4$

$a_1=2$

$a_2=a_1+2=2+2$

$a_3=a_2+3=2+2+3$

$a_4=a_3+4=2+2+3+4$

$\therefore a_{n+1}=a_n+(n+1)$

其遞迴關係式為 $\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=a_n+(n+1)\text{，}n\in N\end{cases}$

得 $a_n=2+2+3+4+\cdots+n=1+(1+2+3+\cdots+n)$

$$=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

2. $a_1=1$

$a_2=a_1+(1+2)$

$a_3=a_2+(1+2+3)$

$a_4=a_3+(1+2+3+4)$

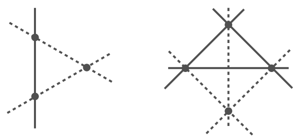
$a_{n+1}=a_n+[1+2+3+\cdots+(n+1)]$

$\therefore a_{n+1}=a_n+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

類 題

34 n；$\dfrac{n^2-n}{2}$ $\quad$ 35 1998 $\quad$ 36 $\dfrac{3n^2+3n}{2}$ $\quad$ 37 $3n+2$；$\dfrac{3n^2+7n}{2}$

34 $a_2=1$



$n=3$ $\qquad n=4$

$a_3=a_2+2=1+2$

$a_4=a_3+3=1+2+3$

$\vdots$

$a_{n+1}=a_n+n$ $\quad\therefore a_{n+1}-a_n=n$

得 $a_n=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)\times n}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$（即 C_2^n）

35 $a_1=3$

$a_2=3+6$

$a_3=3+6+9$

$a_4=3+6+9+12$

$a_{36}=3(1+2+3+\cdots+36)=3\times\dfrac{36\times 37}{2}=1998$

36 $a_1=3$

$a_2=a_1+6=3+6$

$a_3=a_2+9=3+6+9$

$a_4=a_3+12=3+6+9+12$

$\Rightarrow\quad a_n=3+6+9+\cdots+3n$

$$=3(1+2+3+\cdots+n)=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n^2+3n}{2}$$

37 $a_1=5$

$a_2=a_1+\underset{\text{延伸}}{2}+6$

$a_3=a_2+\underset{\text{延伸}}{2}+9$

$\Rightarrow\quad a_n=a_{n-1}+2+3n$ $\quad\therefore a_n-a_{n-1}=3n+2$

則 $a_2=a_1+8$

$a_3=a_2+11$

$a_4=a_3+14$

$\vdots$

$a_n=a_{n-1}+(3n+2)$

相加化簡得 $a_n=a_1+[8+11+14+\cdots+(3n+2)]$

$$=5+\frac{8+(3n+2)}{2}\times(n-1)=\frac{3n^2+7n}{2}$$

範例 10

1. ① $n=1$ 時，$a_1=6\times 2-5=7$ 成立

②設 $n=k$ 時成立，即 $a_k=6\times 2^k-5$

則 $n=k+1$ 時

$a_{k+1}=2a_k+5$

$=2(6\times 2^k-5)+5=2(6\times 2^k)-5=6\times 2^{k+1}-5$

③$\therefore n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立

由數學歸納法原理得證

2. ① $n=1$ 時，左式 $=1^2$，右式 $=\dfrac{1\times 2\times 3}{6}=1$

$\therefore$左式 $=$ 右式，成立

②設 $n=k$ 時成立

即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

則 $n=k+1$ 時

左式 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1)[(2k^2+k)+6(k+1)]}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

右式 $=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ $\quad\therefore$左式 $=$ 右式

③$\therefore n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立

由數學歸納法原理得證

3. ①找 p，代 $n=1$，得 $3^{2+1}+2^{1+2}=35=5\times 7$

代 $n=2$，得 $3^5+2^4=259=7\times 37$

$\therefore$猜測 $p=7$

②已知代 $n=1$ 時，$3^{2n+1}+2^{n+2}$ 為 7 的倍數

設 $n=k$ 時成立，即 $3^{2k+1}+2^{k+2}=7m$，m 為自然數

則 $n=k+1$ 時

原式 $=3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}=3^{2k+1}\cdot 3^2+2^{k+2}\cdot 2^1$

$=(7\cdot 3^{2k+1}+2\cdot 3^{2k+1})+2\times 2^{k+2}$

$=7\cdot 3^{2k+1}+2\cdot(3^{2k+1}+2^{k+2})$

$=7\cdot 3^{2k+1}+2\cdot 7m=7$ 的倍數

③ $\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立
由數學歸納法原理得證

類題

38～42見詳解

38 ① $n=1$ 時，$a_1=2\times3^0-1=1$，成立
②設 $n=k$ 時成立，即 $a_k=2\cdot3^{k-1}-1$
則 $n=k+1$ 時
$a_{k+1}=3a_k+2=3(2\cdot3^{k-1}-1)+2=2\cdot3^k-1$
③ $\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立
由數學歸納法原理得證

39 ① $n=1$ 時，左式 $=1^3=1$，右式 $=\left[\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2=1$
$\therefore$左式 = 右式，成立
②設 $n=k$ 時成立，即 $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$
則 $n=k+1$ 時
左式 $=1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$
$=\dfrac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\dfrac{(k+1)^2\cdot[k^2+4(k+1)]}{4}$
$=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$
右式 $=\left[\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right]^2=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$
$\therefore$左式 = 右式
③ $\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立
由數學歸納法原理得證

40 ① $n=1$ 時，左式 $=\dfrac{1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，右式 $=2-\dfrac{1+2}{2^1}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore$左式 = 右式，成立
②設 $n=k$ 時成立，即 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}=2-\dfrac{k+2}{2^k}$
則 $n=k+1$ 時
左式 $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}=(2-\dfrac{k+2}{2^k})+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$
$=2-\dfrac{(2k+4)-(k+1)}{2^{k+1}}=2-\dfrac{k+3}{2^{k+1}}=2-\dfrac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$
= 右式
③ $\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立
由數學歸納法原理得證

41 ① $n=1$ 時，$3\times5^3+2^4=375+16=391=17\times23$，成立
②設 $n=k$ 時成立，即 $3\times5^{2k+1}+2^{3k+1}=17t$，$t$ 為整數
則 $n=k+1$ 時
原式 $=3\times5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}=3\times5^{2k+1}\times5^2+2^{3k+1}\times2^3$
$=3\times5^{2k+1}\times(17+8)+2^{3k+1}\times8$
$=17(3\times5^{2k+1})+8(3\times5^{2k+1}+2^{3k+1})$
$=17(3\times5^{2k+1})+8\times17t=17$ 的倍數
③ $\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立
由數學歸納法原理得證

42 ① $n=1$ 時，得 $9^2-8-9=64$，成立
②設 $n=k$ 時成立，即 $9^{k+1}-8k-9=64m$
m 為自然數，即 $9^{k+1}=64m+8k+9$
則 $n=k+1$ 時
原式 $=9^{(k+1)+1}-8(k+1)-9=9^{k+1}\cdot9^1-8k-17$
$=9\cdot(64m+8k+9)-8k-17$
$=64\cdot9m+64k+64=64$ 的倍數
③ $\therefore$ $n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立
由數學歸納法原理得證

範例 11

未代入 $n=1$ 使等式成立，即未驗證起始步驟
故數學歸納法無法成立。

類題

43見詳解　44(B)(C)(D)

43 證明 $n=k+1$ 時，沒有用到 $n=k$ 成立的假設，所以不算是數學歸納法。

44 因 $2^3<3^2$，所以 $\alpha_0\neq1$，可代值猜測 $\alpha_0=4$
確定 $n=4$ 成立後，應「假設」$n=k$ 成立
再利用「$2^k\geq k^2$ 且 $k\geq4$」推導 $n=k+1$ 時成立
但阿宏作答過程未「假設」$n=k$ 成立，又未對 $n=k+1$ 加以推導，故選(B)(C)(D)

素養導向試題

1. (A)○；若 a_1 與 a_2 同號，則由 $a_3=a_1+a_2$ 知 a_3 與 a_1、a_2 也同號　$\therefore$ $a_2a_3>0$
(B)(C)；若 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，則 $(a_1+2d)=(a_1+d)+a_1$
得 $a_1=d$
$a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$
$\therefore$ $a_4\neq a_3+a_2$ 且 $a_4=4a_1$。知(B)×(C)○
(D)(E)；若 $\langle a_n\rangle$ 為等比數列，則 $a_1r^2=a_1r+a_1$
得 $r^2=r+1$
所以 $r=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 為無理數
由 $r^2=r+1$ 同乘 a_1r 得 $a_1r^3=a_1r^2+a_1r$
所以 $a_4=a_3+a_2$ 成立。知(D)○(E)×
2. (A)×；反例：$\langle a_n\rangle=-4,2,-2,0,-2,-2,-4,\cdots$ 的第 4 項為 0
(B)○；因 $a_3=a_1+a_2$，則 $a_3<0$，依此類推知 $a_4<0,a_5<0,\cdots$
(C)○；因整數加整數必得整數
(D)×；反例：$\langle a_n\rangle=1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},2,3+\sqrt{2},\cdots$ 的第 3 項為有理數
(E)×；反例：$-3,1,-2,-1,-3,-4,\cdots$的 $a_1a_2<0$，但 $a_3a_4>0$
3. A 到 B 有 1 種，A 到 C 有 2 種
A 到 D 有 $\underbrace{1}_{\text{由}B\text{到}D}+\underbrace{2}_{\text{由}C\text{到}D}=3$ 種
A 到 E 有 $\underbrace{2}_{\text{由}C\text{到}E}+\underbrace{3}_{\text{由}D\text{到}E}=5$ 種
A 到 F 有 $3+5=8$ 種，A 到 G 有 $5+8=13$ 種

A 到 H 有 $8+13=21$ 種

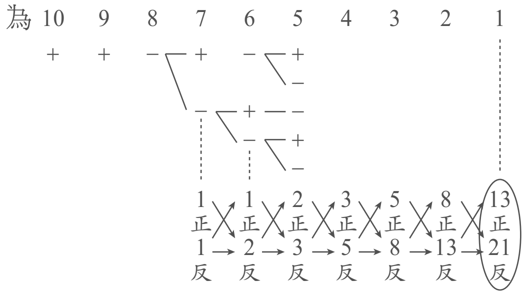
A 到 I 有 $13+21=34$ 種

A 到 J 有 $21+34=55$ 種

4. 設登完 n 階樓梯的方法有 a_n 種，則

$\langle a_n \rangle = 1, 2, \underset{1+2}{\underset{\uparrow}{3}}, \underset{2+3}{\underset{\uparrow}{5}}, \underset{3+5}{\underset{\uparrow}{8}}, \underset{5+8}{\underset{\uparrow}{13}}, \underset{8+13}{\underset{\uparrow}{21}}, \underset{13+21}{\underset{\uparrow}{34}}, \underset{21+34}{\underset{\uparrow}{55}}, \underset{34+55}{\underset{\uparrow}{89}}$

5. 從第 10 次反推



$\therefore$ 共有 $13+21=34$ 種過程

資優挑戰園地

1. 第四組為 $(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)$，得 $b_n = n^2$

由 $\begin{cases} a_3 = b_2 + 1 \\ a_4 = b_3 + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a_n = b_{n-1} + 1 = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

$S_n = \dfrac{(n^2-2n+2)+n^2}{2} \cdot (2n-1) = (n^2-n+1)(2n-1)$

(A)○；$a_5 = 25 - 10 + 2 = 17$　　(B)×；$b_5 = 25$

(C)○；$a_{10} = 100 - 20 + 2 = 82$　　(D)○；$b_{10} = 100$

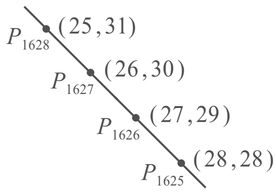
(E)○；$S_{10} = (100-10+1) \cdot 19 = 1729$

故選(A)(C)(D)(E)

2. $25+31=56$

$\therefore (25, 31)$ 與 $(28, 28)$ 在同一斜線上

由 $(0, 0) \longleftrightarrow P_1$
　 $(1, 1) \longleftrightarrow P_5$　加 4
　 $(2, 2) \longleftrightarrow P_{13}$　加 8
　 $(3, 3) \longleftrightarrow P_{25}$　加 12



知 $(28, 28)$ 為第

$1+4+8+12+\cdots+4\times 28 = 1 + 4\times(1+2+\cdots+28)$

$= 1 + 4 \times \dfrac{28\times 29}{2} = 1625$

$\therefore (25, 31)$ 為 P_{1628}，得 $k = 1628$

3. 共需移 $2^{64}-1$ 次

所需年數 $= \dfrac{2^{64}-1}{32000000} \approx 2^{59} \times 10^{-6} \approx (10^{0.3010})^{59} \times 10^{-6}$

$= 10^{11.759} = 10^{11} \times 10^{0.759} \approx 5.741 \times 10^{11}$

$\therefore$ 需 5.741×10^{11} 年 $= 5741 \times 10^{8}$ 年 $= 5741$ 億年

4. $\because \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，欲證：$a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$n \in N$

① $n=1$ 時，$a_2 = a_1 \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，成立

② 設 $n=k$ 時成立，即 $a_{k+1} = a_k \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，則 $n=k+1$ 時

$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k = a_{k+1} + \dfrac{a_{k+1}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = a_{k+1}(1 + \dfrac{2}{1-\sqrt{5}})$

$= a_{k+1} \cdot (1 + \dfrac{2(1+\sqrt{5})}{-4}) = a_{k+1} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore n=k$ 成立，可推得 $n=k+1$ 也成立

由數學歸納法原理得證

5. $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = 1$

$a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2\right]$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} - \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{4\sqrt{5}}{4} = 1$

$\therefore n=1$ 與 $n=2$ 成立

化簡 $a_n + a_{n+1}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right] + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\right]$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}\right] - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\right]$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n \cdot (\dfrac{3+\sqrt{5}}{2})\right] - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n \cdot (\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})\right]$

$(\because (\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2})^2 = \dfrac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}\right] = a_{n+2}$

$\therefore \langle a_n \rangle$ 為費氏數列，得證

歷年大考精選

1. 甲的本利和 $a = 100000(1+0.003)^{12}$

乙的本利和 $b = 100000(1+0.003)^4(1+0.004)^4(1+0.002)^4$

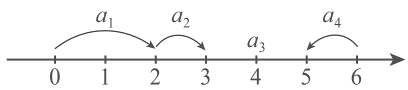
丙的本利和 $c = 100000(1+0.003)^4(1+0.002)^4(1+0.004)^4$

$\because (1.003+0.001)(1.003-0.001) = 1.003^2 - 0.001^2 < 1.003^2$

$\therefore (1.004)^4(1.002)^4 < (1.003)^8$，得 $a > b = c$

$\therefore$ 選(A)(B)

2. 當 a_1 由 $0 \to 2$ 時



a_2 由 $2 \to 3$

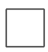
a_4 由 $6 \to 5$

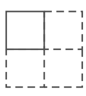
$\therefore b_1$、b_2、b_3、b_4 為遞增的等比數列

(A)○　(B)○　(C)○；b_2 由 $2^2 \to 2^3$

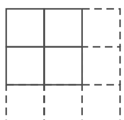
(D)○；b_4 由 $2^6 \to 2^5$　(E)○；$b_2 \times b_4 = b_3^2 = (2^4)^2 = 256$

$\therefore$ 選(A)(B)(C)(D)(E)

3. 　$a_1 = 4$



$a_2 = 4 + \underline{8}$
$\hookrightarrow a_2 - a_1 = 8 = 4 \times 2$



$a_3 = 4 + 8 + \underline{12}$
$\hookrightarrow a_3 - a_2 = 12 = 4 \times 3$

$\therefore a_{n+1} - a_n = 4(n+1)$

4. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $a\neq 0$

遞迴式代 $n=2$ 得 $a_2=a_1+f(0)$，即 $2=1+c\cdots①$

代 $n=3$ 得 $a_3=a_2+f(1)$，即 $5=2+(a+b+c)\cdots②$

代 $n=4$ 得 $a_4=a_3+f(2)$，即 $12=5+(4a+2b+c)\cdots③$

由①②③得 $a=b=c=1$

$\therefore a_5=a_4+f(3)=12+(9a+3b+c)=25$

5. $\triangle_2=1+2$，$\triangle_3=1+2+3$，$\triangle_4=1+2+3+4$

$\square_2=2^2$，$\square_3=3^2$，$\square_4=4^2$

$⬠_2=1+4$，$⬠_3=1+4+7$，$⬠_4=1+4+7+10$

$\Rightarrow\quad \triangle_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\square_n=n^2$

$⬠_n=1+4+7+\cdots+$ 第 n 項

$=\dfrac{2\times 1+(n-1)\times 3}{2}\times n=\dfrac{3n^2-n}{2}$

$\therefore m=\dfrac{n(n+1)}{2}+n^2=\dfrac{3n^2-n}{2}+9$

得 $(n^2+n)+2n^2=3n^2-n+18$

$\therefore n=9$，$m=\dfrac{9\times 10}{2}+81=126$

6. (A)○；$\because$ 公差為正數 $\therefore a_1<a_2<a_3<\cdots$

$\because b_n=-a_n\quad \therefore b_1>b_2>b_3>\cdots$

(B)×；反例：$\langle a_n\rangle=-3,-2,-1,0,1,2,\cdots$

則 $\langle c_n\rangle=9,4,1,0,1,4,\cdots$

(C)×；$d_n=a_n+a_{n+1}=[a_1+(n-1)\alpha]+[a_1+n\alpha]$

$=2a_1+(2n-1)\alpha$

$\langle d_n\rangle$ 為等差且公差為 2α 才對

(D)○；$e_n=[a_1+(n-1)\alpha]+n=a_1-\alpha+n(\alpha+1)$

公差為 $\alpha+1$

(E)×；反例：$\langle a_n\rangle=1,2,3,4,\cdots$，則 $\langle f_n\rangle=1,\dfrac{3}{2},\dfrac{6}{3},\dfrac{10}{4},\cdots$

故 $\langle f_n\rangle$ 的公差為 $\langle a_n\rangle$ 公差的一半，即 $\dfrac{\alpha}{2}$

1-2 級數求和

範例研習特區

1. 等差級數：前 n 項和

$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)}{2}\times n=\dfrac{[2a_1+(n-1)d]}{2}\times n$ 。

2. 等比級數：前 n 項和

$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ 。

範例 1

1. 圖一有 $1+4$ 個，圖二有 $1+4+7$ 個

圖三有 $1+4+7+10$ 個

圖四有 $1+4+7+10+13$ 個

$\therefore$ 圖三十有 $1+4+7+10+13+16+\cdots+$ 第 31 項

$=\dfrac{2\times 1+30\times 3}{2}\times 31=1426$ 個

2. $a_8=a_1+7d=35\cdots①$

$\dfrac{2a_1+19d}{2}\times 20=\dfrac{2a_1+29d}{2}\times 30$

即 $4a_1+38d=6a_1+87d$，得 $2a_1+49d=0\cdots②$

由①②得 $d=-2$，$a_1=49$

3. $\begin{cases}a_{10}=a_1+9d=73\cdots①\\ a_{25}=a_1+24d=28\cdots②\end{cases}$

② − ①得 $15d=-45\quad\Rightarrow\quad d=-3$，$a_1=100$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=100+(n-1)(-3)=103-3n$

(1) $100,97,94,91,\cdots,4,\underset{a_{34}}{\underset{\downarrow}{1}},\underset{a_{35}}{\underset{\downarrow}{-2}},-5,\cdots$

$\therefore$ 前 34 項和 $=\dfrac{100+1}{2}\times 34=1717$

為 $a_1+a_2+\cdots$ 的最大值

故當 $n=34$ 時，前 34 項和 S_{34} 有最大值為 1717

(2) $S_n=\dfrac{200+(n-1)(-3)}{2}\times n=\dfrac{203-3n}{2}\times n<0$

$\Rightarrow\quad 203-3n<0\quad\Rightarrow\quad n>\dfrac{203}{3}=67.\cdots$

$\therefore n$ 最小值為 68

類 題

1 33；3366 **2** 5；2 **3** 11 **4** (1) 20；1960 (2) 40 **5** 390

1 ① $\dfrac{200}{6}=33.\cdots\quad\therefore$ 6 的倍數共有 33 項

②和為 $\dfrac{2\times 6+32\times 6}{2}\times 33=102\times 33=3366$

2 $a_6+\cdots+a_{10}=\dfrac{(a_1+5d)+(a_1+9d)}{2}\times 5=95$

$\therefore 2a_1+14d=38\cdots①$

$a_{11}+\cdots+a_{17}=\dfrac{(a_1+10d)+(a_1+16d)}{2}\times 7=217$

$\therefore 2a_1+26d=62\cdots②$

② − ①得 $12d=24\quad\Rightarrow\quad d=2$，代回①得 $a_1=5$

3 設首項為 $a_1>0$，公差為 d

$\because \dfrac{(2a_1+4d)\times 5}{2}=\dfrac{(2a_1+14d)\times 15}{2}$

$\Rightarrow\quad 2a_1+19d=0\quad\Rightarrow\quad a_1=-\dfrac{19}{2}d$ 且 $d<0$

希望 $a_n=-\dfrac{19d}{2}+(n-1)d=(n-\dfrac{21}{2})d<0$

$\therefore n-\dfrac{21}{2}>0\quad\Rightarrow\quad n>10.5$，$n$ 最小為 11

4 $\begin{cases}a_8=a_1+7d=123\\ a_{15}=a_1+14d=53\end{cases}\quad\Rightarrow\quad d=-10$，$a_1=193$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=193-10(n-1)=203-10n$

(1) $\because$ 前 20 項為正

$\therefore n=20$ 時，S_n 有最大值為 $\dfrac{193+3}{2}\times 20=1960$

(2) $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\times n=\dfrac{386+(n-1)\times(-10)}{2}\times n$

$=\dfrac{(396-10n)n}{2}<0$

$\therefore 396-10n<0 \Rightarrow n>39.6$，得最小的 n 值為 40

5 40 當首項，公差為 -2，項數為 15

$\therefore$所求 $=\dfrac{2\times40+14\times(-2)}{2}\times15=390$

範例 2

1. 首項為 16，公比為 $-\dfrac{1}{2}$，共 12 項

$S_{12}=\dfrac{16[1-(-\frac{1}{2})^{12}]}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{16(1-\frac{1}{4096})}{\frac{3}{2}}=\dfrac{\frac{4095}{256}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1365}{128}$

2. 邊長依序為 $1,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},\cdots$

所求 $=1^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+$ 第 8 項

$=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+$ 第 8 項

$=\dfrac{1\times[1-(\frac{1}{2})^8]}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\dfrac{1}{256})=\dfrac{255}{128}$

3. $S_6=S_3\times9 \quad \therefore \dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}\times9$

約去 $\dfrac{a}{r-1}$，得 $(r^3+1)(r^3-1)=(r^3-1)\times9$

約去 r^3-1，得 $r^3+1=9 \quad \therefore r^3=8$，得 $r=2$

4. $a_1=6$，$a_n=6\cdot r^{n-1}=-768$

$\therefore r^{n-1}=-128$，同乘 r，得 $r^n=-128r$

則 $S_n=\dfrac{6(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{6(-128r-1)}{r-1}=-510$

即 $-128r-1=-85(r-1)$，得 $-43r=86 \Rightarrow r=-2$

代回，$(-2)^{n-1}=-128$，得 $n-1=7 \quad \therefore n=8$

所求 $=(-2)+8=6$

5. $S_n=\dfrac{1\times(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=2-\dfrac{2}{2^n}$

$\therefore |S_n-2|=\dfrac{2}{2^n}$，希望 $\dfrac{2}{2^n}\le\dfrac{1}{10000}$，即 $20000\le 2^n$

由 $2^{12}=4096$，$2^{13}=8192$，$2^{14}=16384$，$2^{15}=32768$

最小的 $n=15$

類題

6 $\dfrac{1023}{8}$ **7** 15 **8** $\dfrac{781\sqrt{3}}{4096}$ **9** 6 **10** 2 **11** -18

6 改以 $\dfrac{1}{8}$ 為首項，$\dfrac{1}{4}$ 為第二項，則公比為 $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$

所求 $=\dfrac{\frac{1}{8}(2^{10}-1)}{2-1}=\dfrac{1}{8}\times1023=\dfrac{1023}{8}$

7 前 n 項和 $=\dfrac{\frac{1}{16}(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{2^n}{16}-\dfrac{1}{16}>2000$

$\therefore n$ 代 14，得 $\dfrac{2^{14}}{16}-\dfrac{1}{16}=1024-\dfrac{1}{16}$，不合

n 代 15，得 $\dfrac{2^{15}}{16}-\dfrac{1}{16}=2048-\dfrac{1}{16}$，合 $\quad\therefore n$ 至少為 15

8 所求 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\dfrac{1}{2})^2+[\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\dfrac{1}{4})^2]\times3+[\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\dfrac{1}{8})^2]\times9$

$+[\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\dfrac{1}{16})^2]\times27+[\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\dfrac{1}{32})^2]\times81$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}[\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{9}{64}+\dfrac{27}{256}+\dfrac{81}{1024}]$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{3}{4})^5]}{1-\frac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-\dfrac{243}{1024})=\dfrac{781\sqrt{3}}{4096}$

9 把末項當首項，則公比變為 $\dfrac{1}{3}$，設項數為 n

則和 $=\dfrac{486[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=729(1-\dfrac{1}{3^n})=729-\dfrac{729}{3^n}=728$

$\therefore 3^n=729 \Rightarrow n=6$，共 6 項

10 奇數項和 $=\dfrac{3(r^{2n}-1)}{r^2-1}=255\cdots$①

偶數項和 $=\dfrac{3r(r^{2n}-1)}{r^2-1}=510\cdots$②，②÷①得 $r=\dfrac{510}{255}=2$

11 設公比為 r，則 $a+b=a+ar=a(1+r)=4\cdots$①

$d+e=ar^3+ar^4=ar^3(1+r)=-108\cdots$②

②÷①得 $r^3=\dfrac{-108}{4}=-27 \quad \therefore r=-3$

代①得 $a\cdot(-2)=4 \quad \therefore a=-2$

則 $c=ar^2=(-2)\times9=-18$

範例 3

1. (1) $\because a_7,a_{11},a_{15},a_{19},a_{23}$，共 5 項也成等差，正中間項為 a_{15}

$\therefore a_7+a_{11}+a_{15}+a_{19}+a_{23}=5a_{15}=55$，得 $a_{15}=11$

(2) $\because a_{14}+a_{16}=2a_{15}$，$a_{12}+a_{18}=2a_{15}$

$\therefore$所求 $=4a_{15}=4\times11=44$

2. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}=a_{10}\times19$

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{19}=b_{10}\times19$

$\therefore (a_1+\cdots+a_{19}):(b_1+\cdots+b_{19})=a_{10}\times19:b_{10}\times19$

$=a_{10}:b_{10}=(10+1):(20+3)=11:23$

$\therefore$所求 $=\dfrac{11}{23}$

3. 每 10 項加成一項，為 $A_1,A_2,A_3,A_4,\cdots$

則 $A_1=5$，$A_1+A_2=12 \quad \therefore A_2=7$

所求 $=A_1+A_2+A_3+A_4=5+7+9+11=32$

4. 每 n 項加成一項，為 $A_1,A_2,A_3,\cdots$

則 $A_1=48$，$A_1+A_2=60 \quad \therefore A_2=12$

所求 $=A_1+A_2+A_3=48+12+3=\underline{\underline{63}}$

$r=\dfrac{1}{4}$

類題

12 480　13 $20:17$　14 $17:47$　15 -30　16 180

12 $\because 20+67=87$，且 $12+75=13+74=\cdots=43+44=87$

$\therefore a_{12}+a_{75}=a_{13}+a_{74}=\cdots=a_{43}+a_{44}=15$

所求 $=\underbrace{15+15+\cdots+15}_{12\text{ 到 }43\text{ 共 }32\text{ 個數}}=15\times 32=480$

13 $(a_1+a_2+\cdots+a_{11}):(b_1+b_2+\cdots+b_{11})$

$=a_6\times 11:b_6\times 11=a_6:b_6$

$=(3\times 6+2):(2\times 6+5)=20:17$

14 $a_{16}:b_{16}=a_{16}\times 31:b_{16}\times 31$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{31}):(b_1+b_2+\cdots+b_{31})$

$=(31+3):(3\times 31+1)=34:94=17:47$

15 令 $n=1$，$a_1=2$，$a_1+a_2=-8$　$\therefore a_2=-10$

$d=a_2-a_1=(-10)-2=-12$

$a_3=a_2+d=-10-12=-22$

$\therefore S_{3n}=a_1+a_2+a_3=2+(-10)+(-22)=-30$

16 令 $n=1$，$a_1=12$，$a_1+a_2=36$

$\therefore a_2=24$，$r=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{24}{12}=2$

$a_3=24\times 2=48$，$a_4=48\times 2=96$

$\therefore S_{4n}=a_1+a_2+a_3+a_4=12+24+48+96=180$

範例 4

1.所求

$=5000(1+0.1)^{20}+5000(1+0.1)^{18}+\cdots+5000(1+0.1)^2$

$=5000(1.1^2+1.1^4+1.1^6+\cdots+1.1^{20})$

$=5000\times\dfrac{1.21(1.21^{10}-1)}{1.21-1}\approx 5000\times\dfrac{121(6.719-1)}{21}$

≈ 164762

2.$1.005^{120}\approx$ 1.8194

【引以為戒】332240

設每個月還 x 元，月利率為 $6\%\div 12=0.005$

1 個月後還 x 元，仍欠 $1000000(1+0.005)-x$ 元

2 個月後還 x 元，仍欠

$(1000000\times 1.005-x)\cdot 1.005-x=1000000\cdot 1.005^2-1.005x-x$

3 個月後還 x 元，仍欠

$(1000000\times 1.005^2-1.005x-x)\times 1.005-x$

$=1000000\times 1.005^3-1.005^2x-1.005x-x$

$\vdots$

所以 120 個月後還 x 元，仍欠 $1000000\times 1.005^{120}$

$\underbrace{-1.005^{119}x-1.005^{118}x-\cdots-1.005^2x-1.005x-x}_{\text{代等比級數公式，共120項，首項為}x\text{，公比為}1.005}=0$

還清

移項為 $1000000\times 1.005^{120}=\dfrac{x(1.005^{120}-1)}{1.005-1}$

將 $1.005^{120}\approx 1.8194$ 代入

得 $1000000\times 1.8194=\dfrac{x\cdot 0.8194}{0.005}$

$\therefore x=\dfrac{1819400\times 0.005}{0.8194}=\dfrac{1819400\times 50}{8194}\approx 11102$ 元

類題

17 139708　18 8886　19 13

17 所求

$=10000(1+0.06)^{10}+10000(1+0.06)^9+\cdots+10000(1+0.06)$

$=\dfrac{10000\times 1.06\times(1.06^{10}-1)}{1.06-1}\approx\dfrac{1060000(1.7908-1)}{6}$

$=139708$

18 設所求為 x 元

1 個月後還 x 元，仍欠 $100000\times 1.01-x$ 元

2 個月後還 x 元，仍欠

$(100000\times 1.01-x)\times 1.01-x=100000\times 1.01^2-1.01x-x$

12 個月後還 x 元，仍欠

$100000\times 1.01^{12}-1.01^{11}x-1.01^{10}x-\cdots-1.01x-x=0$ 元

所以 100000×1.01^{12}

$=x+1.01x+1.01^2x+\cdots+1.01^{11}x=\dfrac{x(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$

將 $1.01^{12}\approx 1.1268$ 代入，得 $100000\times 1.1268=\dfrac{x\times 0.1268}{0.01}$

$\therefore x=\dfrac{112680\times 0.01}{0.1268}=\dfrac{11268000}{1268}\approx 8886$ 元

19 1 個月後，剩 $100(1.006)-1$ 萬元

2 個月後，剩 $100\cdot(1.006)^2-1.006-1$ 萬元

3 個月後，剩 $100\cdot(1.006)^3-(1.006)^2-1.006-1$ 萬元

$\therefore n$ 個月後還清，得

$100\cdot(1.006)^n-(1.006)^{n-1}-(1.006)^{n-2}-\cdots-1.006-1=0$

即 $100\cdot(1.006)^n=1+1.006+(1.006)^2+\cdots+(1.006)^{n-1}$

$=\dfrac{1\cdot(1.006^n-1)}{1.006-1}$

$\Rightarrow\ 0.6\cdot(1.006)^n=(1.006)^n-1\ \Rightarrow\ (1.006)^n=\dfrac{5}{2}$

$\because 10^{0.0026}=1.006$ 且 $10^{0.3980}=2.5$　$\therefore(10^{0.0026})^n=10^{0.3980}$

則 $0.0026\times n=0.3980$，得 $n=\dfrac{0.3980}{0.0026}\approx 153.1$

$\therefore$需 154 個月才可還清，而 $\dfrac{154}{12}\approx 12.8$，故共需 13 年

範例 5

1.$(3a_1-4b_1)+(3a_2-4b_2)+\cdots+(3a_n-4b_n)$

$=3(a_1+a_2+\cdots+a_n)-4(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=3\cdot 23-4\cdot 10=29$

2.所求 $=(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^7)-(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^9)$

$+(11+16+21+\cdots+46)$

$=\dfrac{1\times(3^8-1)}{3-1}-\dfrac{4\times(2^8-1)}{2-1}+\dfrac{11+46}{2}\times 8$

$=3280-1020+228=2488$

3.原式

$=(15\times 1^2-14\times 1-8)+(15\times 2^2-14\times 2-8)$

$+(15\times 3^2-14\times 3-8)+\cdots+(15\times 10^2-14\times 10-8)$

$=15(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)-14(1+2+3+\cdots+10)-8\times 10$

$\therefore p=15$，$q=-14$，$r=-80$

類題

20 54　**21** 10；7　**22** 551　**23** $(10,-5,6,-60)$

20 所求 $=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+3(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=2\times15+3\times8=54$

21 設 $a_1+a_2+\cdots+a_n=x$，$b_1+b_2+\cdots+b_n=y$，則

$(2a_1+5b_1)+(2a_2+5b_2)+\cdots+(2a_n+5b_n)$

$=2x+5y=55\cdots$①

$(3a_1-4b_1)+(3a_2-4b_2)+\cdots+(3a_n-4b_n)$

$=3x-4y=2\cdots$②

由①②得 $x=10$，$y=7$

22 所求 $=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10})-9(1+2+3+\cdots+10)-\underbrace{(100+100+\cdots+100)}_{10\text{個}}$

$=\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}-9\times55-100\times10=2046-495-1000=551$

23 原式 $=(10\times1^3-5\times1^2+6\times1-3)+(10\times2^3-5\times2^2+6\times2-3)+\cdots+(10\times20^3-5\times20^2+6\times20-3)$

$=10(1^3+2^3+\cdots+20^3)-5(1^2+2^2+\cdots+20^2)+6(1+2+\cdots+20)-3\times20$

$\therefore p=10$，$q=-5$，$r=6$，$s=-60$

得 $(p,q,r,s)=(10,-5,6,-60)$

⑴ $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

⑵ $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

⑶ $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

範例 6

1\. 所求 $=2^2\times1^2+2^2\times2^2+2^2\times3^2+2^2\times4^2+\cdots+2^2\times12^2$

$=4(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+12^2)$

$=4\times\dfrac{12\times13\times25}{6}=4\times650=2600$

2\. 所求 $=(1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3)$

$=(\dfrac{20\times21}{2})^2-(\dfrac{9\times10}{2})^2=44100-2025=42075$

3\. 所求 $=(1^3+1^2)+(2^3+2^2)+(3^3+3^2)+\cdots+(12^3+12^2)$

$=(1^3+2^3+3^3+\cdots+12^3)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2)$

$=(\dfrac{12\times13}{2})^2+\dfrac{12\times13\times25}{6}=6084+650=6734$

類題

24 2109；7346　**25** 3465　**26** 378125　**27** 820800

28 40376

24 ①所求 $=\dfrac{18\times19\times37}{6}=2109$

②所求 $=\dfrac{30\times31\times61}{6}-\dfrac{18\times19\times37}{6}=9455-2109=7346$

25 所求 $=3^2(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+9^2+10^2)$

$=9\times\dfrac{10\times11\times21}{6}=3465$

26 所求 $=5^3(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots+9^3+10^3)$

$=125\times(\dfrac{10\times11}{2})^2=125\times3025=378125$

27 所求 $=2^3(11^3+12^3+13^3+14^3+15^3+\cdots+24^3+25^3)$

$=8\left[(\dfrac{25\times26}{2})^2-(\dfrac{10\times11}{2})^2\right]$

$=8(325^2-55^2)=8\times380\times270=820800$

28 所求 $=(1^2+2\times1)+(2^2+2\times2)+(3^2+2\times3)+(4^2+2\times4)+\cdots+(48^2+2\times48)$

$=(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+48^2)+2(1+2+3+4+\cdots+48)$

$=\dfrac{48\times49\times97}{6}+2\times\dfrac{48\times49}{2}=38024+2352=40376$

範例 7

1\. 原式 $=(2\times1^2-1-3)+(2\times2^2-2-3)+(2\times3^2-3-3)+\cdots+(2\times20^2-20-3)$

$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)-(1+2+3+\cdots+20)-\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{20\text{個}}$

$=2\times\dfrac{20\times21\times41}{6}-\dfrac{20\times21}{2}-3\times20$

$=5740-210-60=5470$

2\. 首項為 11^2，第 n 項為

$[11+(n-1)\times2]^2=(2n+9)^2=4n^2+36n+81$，共 11 項

所求 $=(4\times1^2+36\times1+81)+(4\times2^2+36\times2+81)+(4\times3^2+36\times3+81)+\cdots+(4\times11^2+36\times11+81)$

$=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+11^2)+36(1+2+3+\cdots+11)+81\times11$

$=4\times\dfrac{11\times12\times23}{6}+36\times\dfrac{11\times12}{2}+891$

$=2024+2376+891=5291$

3\. ⑴左式 $=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(n^2+n)$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}=$ 右式

⑵所求 $=\dfrac{100\times101\times102}{3}=10100\times34=343400$

類題

29 525　**30** 5950　**31** 1330　**32** 43772　**33** 171700

29 所求 $=(2\times1-3)(1-1)+(2\times2-3)(2-1)+(2\times3-3)(3-1)+\cdots+(2\times10-3)(10-1)$

$=(2\times 1^2-5\times 1+3)+(2\times 2^2-5\times 2+3)$
$\quad +(2\times 3^2-5\times 3+3)+\cdots+(2\times 10^2-5\times 10+3)$
$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$
$\quad -5(1+2+3+\cdots+10)+3\times 10$
$=2\times\dfrac{10\times 11\times 21}{6}-5\times\dfrac{10\times 11}{2}+30$
$=770-275+30=525$

30 所求 $=1\times(2\times 1+1)+2(2\times 2+1)+3(2\times 3+1)$
$\quad +\cdots+20(2\times 20+1)$
$=(2\times 1^2+1)+(2\times 2^2+2)+(2\times 3^2+3)$
$\quad +\cdots+(2\times 20^2+20)$
$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)+(1+2+3+\cdots+20)$
$=2\times\dfrac{20\times 21\times 41}{6}+\dfrac{20\times 21}{2}=5740+210=5950$

31 所求 $=(2\times 1-1)^2+(2\times 2-1)^2+(2\times 3-1)^2$
$\quad +\cdots+(2\times 10-1)^2$
$=(4\times 1^2-4\times 1+1)+(4\times 2^2-4\times 2+1)$
$\quad +(4\times 3^2-4\times 3+1)+\cdots+(4\times 10^2-4\times 10+1)$
$=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)-4(1+2+3+\cdots+10)+10$
$=4\times\dfrac{10\times 11\times 21}{6}-4\times\dfrac{10\times 11}{2}+10$
$=1540-220+10=1330$

32 所求 $=(1\times 2+2\times 3+\cdots+51\times 52)$
$\quad -(1\times 2+2\times 3+\cdots+20\times 21)$
$=\dfrac{51\times 52\times 53}{3}-\dfrac{20\times 21\times 22}{3}$
$=46852-3080=43772$

33 所求 $=\dfrac{1\times 2}{2}+\dfrac{2\times 3}{2}+\dfrac{3\times 4}{2}+\cdots+\dfrac{100\times 101}{2}$
$=\dfrac{1}{2}(1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+100\times 101)$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{100\times 101\times 102}{3}=171700$

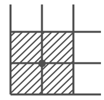
範例 8

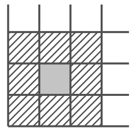
1. 100 個數中，10 有 1 個
9 有 3 個 （數字每少 1，個數加 2 個）
8 有 5 個
⋮ ⋮
2 有 17 個
1 有 19 個

《方法一》
所求 $=1\times 19+2\times 17+\cdots+9\times 3+10\times 1$
$=1\times(-2\times 1+21)+2(-2\times 2+21)$
$\quad +\cdots+9(-2\times 9+21)+10(-2\times 10+21)$
$=-2(1^2+2^2+\cdots+9^2+10^2)+21(1+2+\cdots+9+10)$
$=-2\times\dfrac{10\times 11\times 21}{6}+21\times\dfrac{10\times 11}{2}$
$=-770+1155=385$

《方法二》
所求 $=1\times 19+2\times 17+3\times 15+4\times 13+5\times 11+6\times 9$
$\quad +7\times 7+8\times 5+9\times 3+10\times 1$
$=19+34+45+52+55+54+49+40+27+10$
$=385$

2. 邊長 1 的正方形有 7×10 個
邊長 2 的正方形有 6×9 個（找中心點）
邊長 3 的正方形有 5×8 個（找中心方格）
⋮





所求 $=7\times 10+6\times 9+5\times 8+4\times 7+3\times 6$
$\quad +2\times 5+1\times 4$
$=70+54+40+28+18+10+4=224$

類 題

34 130 **35** 638 **36** 3375

34 即 $10\times 5+9\times 4+8\times 3+7\times 2+6\times 1$
$=50+36+24+14+6=130$

35 所求 $=11\times 13+10\times 12+9\times 11+\cdots+1\times 3$
$=11(11+2)+10(10+2)+9(9+2)+\cdots+1\times(1+2)$
$=(11^2+10^2+9^2+\cdots+1^2)+2(11+10+9+\cdots+1)$
$=\dfrac{11\times 12\times 23}{6}+2\times\dfrac{11\times 12}{2}=506+132=638$

36 第一列之和為 $1+2+3+\cdots+15=\dfrac{15\times 16}{2}=120$
加 15
第二列之和為 $2+3+4+\cdots+16=120+15=135$
加 15
第三列之和為 $3+4+5+\cdots+17=135+15=150$
∴各列之和成等差，共 15 項，公差為 15
所求 $=\dfrac{2\times 120+14\times 15}{2}\times 15=3375$

範例 9

1. 原式 $=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4})\times\dfrac{1}{3}+(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7})\times\dfrac{1}{3}+(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10})\times\dfrac{1}{3}$
$\quad +\cdots+(\dfrac{1}{97}-\dfrac{1}{100})\times\dfrac{1}{3}$
$=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{4}}+\cancel{\dfrac{1}{4}}-\cancel{\dfrac{1}{7}}+\cancel{\dfrac{1}{7}}-\cancel{\dfrac{1}{10}}+\cdots+\cancel{\dfrac{1}{97}}-\dfrac{1}{100})$
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{99}{100}=\dfrac{33}{100}$

2. 所求 $=\dfrac{1}{\frac{1\times 2}{2}}+\dfrac{1}{\frac{2\times 3}{2}}+\dfrac{1}{\frac{3\times 4}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\frac{100\times 101}{2}}$
$=\dfrac{2}{1\times 2}+\dfrac{2}{2\times 3}+\dfrac{2}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{2}{100\times 101}$
$=2(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+2(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+2(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+2(\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{101})$
$=2(1-\dfrac{1}{101})=\dfrac{200}{101}$

3. 將分母有理化
所求 $=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1}+\cdots+\dfrac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$
$=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$
$=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1}=\dfrac{1-10}{-1}=9$

類題

37 $\frac{9}{19}$　38 $\frac{531}{760}$　39 $\frac{36}{55}$　40 5

37 所求 $=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})\times\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{17}-\frac{1}{19})\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{19})=\frac{1}{2}\times\frac{18}{19}=\frac{9}{19}$

38 所求 $=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\times\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{17}-\frac{1}{19})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{18}-\frac{1}{20})\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{17}}-\frac{1}{19})+(\cancel{\frac{1}{18}}-\frac{1}{20})]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20})=\frac{1}{2}\times\frac{531}{380}=\frac{531}{760}$

39 所求 $=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{9\times11}$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11})=\frac{1}{2}\times\frac{72}{55}=\frac{36}{55}$

40 所求 $=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2}$

$=\frac{\cancel{\sqrt{3}}-1+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}}+\cdots+\sqrt{121}-\cancel{\sqrt{119}}}{2}$

$=\frac{\sqrt{121}-1}{2}=\frac{11-1}{2}=5$

範例 10

1.(1) $n=5$ 代入 S_n，得 $S_5=5^2+5+2=32$

(2) n 用 $2n+3$ 取代

得 $S_{2n+3}=(2n+3)^2+(2n+3)+2=4n^2+14n+14$

(3) $n=10$ 代入

$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=10^2+10+2=112\ \cdots①$

$n=9$ 代入，$S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9=9^2+9+2=92\ \cdots②$

①－②得 $a_{10}=112-92=20$

(4)① $n=1$ 時，$S_1=1^2+1+2$

得 $a_1=4$（$n=1$ 要另外處理）

② $n>1$ 時，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2+n+2\cdots③$

$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$

$=(n-1)^2+(n-1)+2=n^2-n+2\cdots④$

③－④得 $a_n=(n^2+n+2)-(n^2-n+2)=2n$

∴由①②得 $a_n=\begin{cases}4，當\ n=1\\2n，當\ n\geq2\end{cases}$

2.① $n=1$ 時，$a_1=1^2+1=2$

② $n>1$ 時，照抄

$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}+(2n-1)a_n=n^2+n\ \cdots$❶

n 用 $(n-1)$ 代 $\Rightarrow$ $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}$

$=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n\ \cdots$❷

❶－❷得 $(2n-1)a_n=(n^2+n)-(n^2-n)=2n$

$\Rightarrow$ $a_n=\frac{2n}{2n-1}$，此式代 $n=1$ 也是 2

∴由①②知 $a_n=\frac{2n}{2n-1}$，$n\geq1$

類題

41 6；61；$\begin{cases}6，當\ n=1\\6n+1，當\ n\geq2\end{cases}$；1001　42 197

43 $\frac{15}{4}$；$4-\frac{5}{n}$　44 501

41 ① $a_1=S_1=3+4-1=6$

② $a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(300+40-1)-(243+36-1)$

$=339-278=61$

③若 $n\geq2$

則 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2+4n-1)-[3(n-1)^2+4(n-1)-1]$

$=6n+1$

∴ $a_n=\begin{cases}6，當\ n=1\\6n+1，當\ n\geq2\end{cases}$

④ $a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$

$=S_{20}-S_9=(1200+80-1)-(243+36-1)$

$=1279-278=1001$

42 $a_1=S_1=1^2+1-3=-1$

$n\geq2$ 時，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+n-3)-[(n-1)^2+(n-1)-3]=2n$

所求 $=(-1)+\underbrace{6+10+\cdots+38}_{9\text{ 項成等差}}=(-1)+\frac{(6+38)\times9}{2}=197$

43 ① $a_1+2a_2+\cdots+20a_{20}=2\times20^2-3\times20=740\cdots$❶

$a_1+2a_2+\cdots+19a_{19}=2\times19^2-3\times19=665\cdots$❷

❶－❷得 $20a_{20}=740-665=75$　∴ $a_{20}=\frac{75}{20}=\frac{15}{4}$

② $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=2n^2-3n\cdots$❶

$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}$

$=2(n-1)^2-3(n-1)=2n^2-7n+5\cdots$❷

❶－❷得 $na_n=4n-5$　∴ $a_n=4-\frac{5}{n}$，代 $n=1$，合

44 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2-2n\cdots①$

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2-2(n-1)=n^2-4n+3\cdots②$

①－②得 $a_n=2n-3$

若 $a_k=2k-3=999$，則 $k=\frac{1002}{2}=501$

素養導向試題

1.設正確的項數為 n，誤數為 $(n-2)$ 項

所以 $2100<\frac{29+371}{2}\times(n-2)<2300$，即 $\frac{21}{2}<n-2<\frac{23}{2}$

得 $\frac{25}{2}<n<\frac{27}{2}$　∴ $n=13$

則所求 $=\frac{29+371}{2}\times13=200\times13=2600$

2. 錯誤的和為 $\frac{a(2^{10}-1)}{2-1}=3069$ $\therefore a=\frac{3069}{1023}=3$

則正確的和為 $\frac{3(2^{11}-1)}{2-1}=3\times 2047=6141$

3. 錯誤的和為 $\frac{a(1-r^{10})}{1-r}$，正確的和為 $\frac{a[1-(-r)^{10}]}{1-(-r)}$

$\therefore \frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})}{1+r}\cdot 3$，約分得 $\frac{1}{1-r}=\frac{3}{1+r}$

$1+r=3-3r$，得 $4r=2$，$r=\frac{1}{2}$

4. 由 $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}=1771$

$\therefore k(k+1)(k+2)=1771\times 6$

$=(7\times 11\times 23)\times 6=21\times 22\times 23$，得 $k=21$

則所求 $=\frac{21\times 22\times 43}{6}=3311$

資優挑戰園地

1. (1) 8 為 1 ～ 15 的正中間數，則 $a_8\times 15=S_{15}$，$b_8\times 15=T_{15}$

$\therefore \frac{a_8}{b_8}=\frac{S_{15}}{T_{15}}=\frac{3\times 15+2}{7\times 15+5}=\frac{47}{110}$

(2) $a_3+a_4=a_2+a_5=a_1+a_6$ $\therefore (a_3+a_4)\times 3=S_6$

$b_2+b_5=b_3+b_4=b_1+b_6$ $\therefore (b_2+b_5)\times 3=T_6$

則 $\frac{a_3+a_4}{b_2+b_5}=\frac{S_6}{T_6}=\frac{3\times 6+2}{7\times 6+5}=\frac{20}{47}$

(3) $a_5+a_{11}=2a_8$，$b_2+b_8+b_{14}=3b_8$

$\therefore \frac{a_5+a_{11}}{b_2+b_8+b_{14}}=\frac{2a_8}{3b_8}=\frac{2}{3}\times\frac{47}{110}=\frac{47}{165}$

2. 所求 $=(0.9+0.99+0.999+\cdots+\underbrace{0.9\cdots 9}_{n\text{個}})\times\frac{6}{9}$

$=[(1-\frac{1}{10})+(1-\frac{1}{10^2})+(1-\frac{1}{10^3})+\cdots+(1-\frac{1}{10^n})]\times\frac{2}{3}$

$=[n-(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n})]\times\frac{2}{3}$

$=[n-\frac{\frac{1}{10}(1-\frac{1}{10^n})}{1-\frac{1}{10}}]\times\frac{2}{3}=(n-\frac{1}{9}+\frac{1}{9\times 10^n})\times\frac{2}{3}$

$=\frac{2n}{3}-\frac{2}{27}+\frac{2}{27\times 10^n}$

3. 令 $S=\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}\cdots$①　同乘 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}\cdots$②

①－②得 $\frac{S}{2}=1+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+\frac{1\times(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$=3-\frac{2n+3}{2^n}$

再同乘 2 得 $S=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$

4. 1 到 n 數完共 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 項

希望 $\frac{n(n+1)}{2}\le 200$，代數字得 $n=19$ 合，$n=20$ 太大

$\therefore$ 1 ～ 19 數完共 190 項

所求 $=1\times 1+2\times 2+3\times 3+\cdots+19\times 19+20\times 10$

$=\frac{19\times 20\times 39}{6}+200=2670$

5. 原式 $=(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3})\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4})\cdot\frac{1}{2}+$

$\cdots+[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1\cdot 2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}})+(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}})+$

$\cdots+(\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

歷年大考精選

1. $\because a_1+a_2+\cdots+a_{101}=a_{51}\cdot 101=0$ $\therefore a_{51}=0$ $\because a_{71}=71$

∴前 50 項為負，後 50 項為正，呈遞增且前後互為相反數

(A)×；應為 $a_1+a_{101}=0$ (B)×；應為 $a_2+a_{100}=0$ (C)○

(D)×；應為 $a_{51}=0$ (E)○ ∴選(C)(E)

2. 第 1 輪淘汰 64 位，花 $64\times 1=64$ 萬，剩 64 人

第 2 輪淘汰 32 位，花 $32\times 2=64$ 萬，剩 32 人

第 3 輪淘汰 16 位，花 $16\times 4=64$ 萬，剩 16 人

第 4 輪淘汰 8 位，花 $8\times 8=64$ 萬，剩 8 人

第 5 輪淘汰 4 位，花 $4\times 16=64$ 萬，剩 4 人

第 6 輪淘汰 2 位，花 $2\times 32=64$ 萬，剩 2 人

第 7 輪淘汰 1 位，花 $1\times 64=64$ 萬，剩 1 人，花 128 萬

∴所求 $=64\times 7+128=576$ 萬元

3. 前後的表面積為 $1+2+3+\cdots+10=\frac{1+10}{2}\times 10=55$

所求 $=\underbrace{10}_{左}+\underbrace{10}_{右}+\underbrace{10}_{上}+\underbrace{10}_{下}+\underbrace{55}_{前}+\underbrace{55}_{後}=150$，故選(E)

4. $1+2+4+\cdots+2^{29}=\frac{1\times(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$

$1024\times 1024\times 1024-1\approx 1000\times 1000\times 1000$

$=1000000000$，故選(D)

5. 設公比為 r，則 $S_{10}=\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=80\cdots$①

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2}=120\cdots$②

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}}{\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2}}=\frac{80}{120}$，即 $1+r=\frac{2}{3}$ $\therefore r=-\frac{1}{3}$，代回①

得 $\frac{a_1(1-\frac{1}{3^{10}})}{1+\frac{1}{3}}=80$ $\therefore a_1(1-\frac{1}{3^{10}})=80\times\frac{4}{3}=\frac{320}{3}\approx 106.7$

∴因 $1-\frac{1}{3^{10}}\approx 0.999$，$a_1\approx 107$，故選(D)

對話式®

高中數學

第2冊 講義

葉晉宏

課後練習本

班級：________ 姓名：________ 座號：________

1 數列 $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\cdots$，試問 $\frac{5}{20}$ 為第________項。

解

2 將正整數分群如下：(1)、$(2,3,4)$、$(5,6,7,8,9)$、$(10,11,12,13,14,15,16)$、$(17,\cdots)$、$\cdots$，則第 10 群的第 10 個數為________。

解

3 設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的第 4 項為 x，第 11 項為 y，請以 x、y 表示公差為________，第 8 項為 $a_8=$ ________。

解

4 在 2 與 162 兩數之間插入三個實數 x、y、z，使五個數成等比數列，則公比為________。

解

5 等比數列 $\langle a_n\rangle$，已知 $a_1+a_3=6$，$a_2+a_4=12$，則首項 = ________，公比 = ________。

解

6 若等比數列 $\langle a_n\rangle$ 各項均為非零實數，且公比小於 0，則下列哪些選項內的數列仍為等比，但公比大於 0？________（多選）

(A) $\langle a_{2n}\rangle$　(B) $\langle a_{3n}\rangle$　(C) $\langle a_{4n}\rangle$　(D) $\langle a_n^{\,2}\rangle$　(E) $\langle a_{(n^2)}\rangle$

解

7 四個正整數，若前三數成等比，後三數成等差，首尾兩數之和為 28，中間兩數之和為 24，則此四數為________。（兩組）

解

1 若數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，且$a_1=1$，$a_2=2$，求$a_{10}=$________，$a_{101}=$________。

解

2 數列$\langle a_n \rangle$，$a_1=\dfrac{32}{243}$，$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$，則$a_{10}=$________。

解

3 數列$\langle a_n \rangle$的$a_1=-1$，$a_2=1$，且$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，求$a_5=$________，$a_{10}=$________。

解

4 數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$，求$a_5=$________，$a_n=$________。

解

5 數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_{n+1}=5a_n-3$，則$\langle a_n \rangle$每項同加k，可使$a_1+k, a_2+k, \cdots, a_n+k$變成等比數列，求$k=$________。

解

6 數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+1$，求$a_5=$________，$a_n=$________。

解

7 用黑白兩色的小三角形，按照規律交錯拼成若干個正三角形圖案，正三角圖案各邊的小三角形數每次增加兩個，如右圖所示。設第k個圖有a_k個黑色小三角形，則數列$\langle a_n \rangle$的遞迴定義式為________。

解

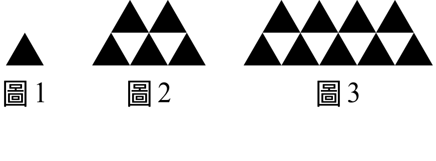


圖1 圖2 圖3

1 已知某個有關正整數 n 的性質（或等式）在 $n=8$ 時是成立的，且若該性質對 n 成立，則可以推得對 $n+5$ 也成立，則該性質對下列哪一個 n 值必會成立？________

(A) $n=100$　(B) $n=101$　(C) $n=102$　(D) $n=103$　(E) $n=104$

解

2 數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴定義式為 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{3} \\ a_n = \dfrac{1}{2-a_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$

⑴請寫出前四項　⑵請猜測一般式 a_n 的通式並用數學歸納法證明。

解

3 請用數學歸納法證明：對所有正整數 n，$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$。

解

4 對所有自然數 n，證明：$\dfrac{1\cdot2^1}{2\cdot3}+\dfrac{2\cdot2^2}{3\cdot4}+\dfrac{3\cdot2^3}{4\cdot5}+\cdots+\dfrac{n\cdot2^n}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-1$。

解

5 對於所有自然數 n，已知 $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 恆為質數 p 的倍數，試求 p 值並用數學歸納法證明。

解

1-2 等差、等比與級數

1 等差數列$\langle a_n \rangle$，$a_{10}=23$，$a_{25}=-22$，求前________項的和為最大，此最大的和為________。

解

2 一凸多邊形，各內角成等差，公差為 4°，最大內角為 172°，則邊數為________。

解

3 二等差數列，第 n 項的比為 $(2n+3):(6n+4)$，則前 25 項和之比為________。

解

4 求級數 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}^{\,2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}^{\,3}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}^{\,4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2}^{\,19}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}^{\,20}}=$________。

解

5 等比級數各項為實數，若前 10 項之和是前 5 項之和的 33 倍，求公比為________，若首項為 3，求第 6 項之值為________。

解

6 ⑴一等差數列，前 n 項和為 $S_n=100$，前 $2n$ 項和為 $S_{2n}=400$，求前 $3n$ 項和 $S_{3n}=$________。
⑵一等比數列，前 n 項和為 $S_n=15$，前 $2n$ 項和為 $S_{2n}=105$，求前 $3n$ 項和 $S_{3n}=$________。

解

7 數列$\langle a_n \rangle$，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$，則 $a_n=$________。

解

1 數列 $\langle a_n\rangle=\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right\rangle$，求前 1023 項的和 $a_1+a_2+\cdots+a_{1023}=$ ________ 。

解

2 $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{4\times6}+\cdots+\dfrac{1}{21\times23}=$ ________ 。

解

3 $\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\cdots+\dfrac{1}{30^2+30}=$ ________ 。

解

4 $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=$ ________ 。

解

5 有一數列 $\langle a_n\rangle$，前 n 項和 $S_n=n^2-7n-6$，則：(1) $a_1=$ ________ (2) $a_2=$ ________

(3) $\langle a_n\rangle$ 是不是等差數列？________ (4) $\sum\limits_{k=1}^{20}|a_k|=$ ________ 。

解

6 等比級數的前 n 項和為 $S_n=\dfrac{2(3^n-1)}{5}$，求首項為________，公比為________。

解

7 數列 $\langle a_n\rangle$，若 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$，則 $a_n=$ ________ 。

解

1-2 級數求和Ⅱ

1 已知 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=15$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=27$，設數列 $\langle c_n\rangle=\langle 2a_n-3b_n+4\rangle$，求 $c_1+c_2+\cdots+c_{10}=$ ________。

解

2 設 $a_1+a_2+\cdots+a_{50}=20$，$(a_1+3)^2+(a_2+3)^2+\cdots+(a_{50}+3)^2=800$，求 $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{50}{}^2=$ ________。

解

3 默寫求和公式：

(1) $1+2+3+\cdots+n=$ ________　(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=$ ________

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$ ________。

解

4 利用求和公式求：

(1) $1+\underbrace{(2+2)}_{2\text{ 個}}+\underbrace{(3+3+3)}_{3\text{ 個}}+\underbrace{(4+4+4+4)}_{4\text{ 個}}+\cdots+\underbrace{(12+12+\cdots+12)}_{12\text{ 個}}=$ ________

(2) $21^3+22^3+23^3+24^3+\cdots+39^3+40^3=$ ________。

解

5 設 $a_n=(2n-3)(n+1)$，求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=$ ________。

解

6 求和 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+50)=$ ________。

解

7 級數 $1\times1+2\times3+3\times5+4\times7+\cdots+20\times39$ 共有________項，第 n 項為________，總和為________。

解

第 1 回

1. $\frac{5}{20}$ 在分子、分母和為 25 的那一組內

到分子、分母和為 24 的算完

共 $1+2+3+4+\cdots+23=276$ 項

$\therefore \underset{\overset{\downarrow}{277}}{\frac{24}{1}},\underset{\overset{\downarrow}{278}}{\frac{23}{2}},\underset{\overset{\downarrow}{279}}{\frac{22}{3}},\ldots,\underset{\overset{\downarrow}{277+19=296}}{\frac{5}{20}}$

故為第 296 項

2. 第 10 群之前有 $1+3+5+7+\cdots+17=81$ 個

加 1 變第二項

$\therefore$ 第 10 群為 $(82,83,\cdots,91,\cdots)$，故所求為 91

加 9 變第十項

3. $a_4=a_1+3d=x\cdots①$，$a_{11}=a_1+10d=y\cdots②$

②－①得 $7d=y-x\quad\therefore d=\frac{y-x}{7}$

代回①，$a_1=x-3d=x-\frac{3(y-x)}{7}=\frac{10x-3y}{7}$

$\therefore a_8=a_1+7d=\frac{10x-3y}{7}+\frac{7(y-x)}{7}=\frac{3x+4y}{7}$

4. 此五數為 2、x、y、z、162

$\therefore 162=2r^4\quad\Rightarrow\quad r^4=81\quad\Rightarrow\quad r^2=9\quad\Rightarrow\quad r=\pm3$

5. $\begin{cases}a+ar^2=6 & \cdots①\\ ar+ar^3=12 & \cdots②\end{cases}$，$\frac{②}{①}$ 得 $\frac{ar(1+r^2)}{a(1+r^2)}=\frac{12}{6}\quad\Rightarrow\quad r=2$

代入①得 $a+4a=6\quad\Rightarrow\quad a=\frac{6}{5}$

6. (A) $\langle a_{2n}\rangle=a_2,a_4,a_6,a_8,\cdots$，公比為 r^2，合

(B) $\langle a_{3n}\rangle=a_3,a_6,a_9,a_{12},\cdots$，公比為 r^3，不合

(C) $\langle a_{4n}\rangle=a_4,a_8,a_{12},\cdots$，公比為 r^4，合

(D) $\langle a_n^2\rangle=a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,\cdots$，公比為 r^2，合

(E) $\langle a_{(n^2)}\rangle=a_1,a_4,a_9,a_{16},\cdots$，非等比數列，不合

∴選(A)(C)(D)

7. 設四數為 x、y、$24-y$、$28-x$

則 $\begin{cases}y^2=x(24-y) & \cdots①\\ 48-2y=y+(28-x) & \cdots②\end{cases}$

由②得 $x=3y-20$，代入①得 $y^2=(3y-20)(24-y)$

$\Rightarrow\quad y^2-23y+120=0\quad\Rightarrow\quad (y-8)(y-15)=0$

❶若 $y=8$，則 $x=4$，得四數為 4、8、16、24

❷若 $y=15$，則 $x=25$，得四數為 25、15、9、3

第 2 回

1. $\langle a_n\rangle=1,2,1,-1,-2,-1,1,2,1,-1,-2,-1,\cdots$

每 6 項為一循環

$\therefore a_{10}=-1$，$a_6=a_{12}=a_{18}=\cdots=a_{96}=-1$，得 $a_{101}=-2$

2. $\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}\quad\therefore\langle a_n\rangle$ 為等比數列，公比為 $\frac{3}{2}$

$\therefore a_{10}=a_1\times r^9=\frac{32}{243}\times(\frac{3}{2})^9=\frac{2^5}{3^5}\times\frac{3^9}{2^9}=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$

3. $\langle a_n\rangle=-1,1,0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots$

$\therefore a_5=1$，$a_{10}=13$

4. $\left.\begin{aligned}a_2&=\frac{2}{3}a_1\\ a_3&=\frac{3}{4}a_2\\ a_4&=\frac{4}{5}a_3\\ a_5&=\frac{5}{6}a_4\end{aligned}\right\}$ 相乘得 $a_2\times a_3\times a_4\times a_5=\frac{2}{3}a_1\times\frac{3}{4}a_2\times\frac{4}{5}a_3\times\frac{5}{6}a_4$

約分得 $a_5=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}a_1=\frac{2}{6}a_1=\frac{1}{3}$

同理可得 $a_n=\frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}a_1=\frac{2}{n+1}a_1=\frac{2}{n+1}$

5. 即 $a_{n+1}+k=5(a_n+k)\quad\therefore 4k=-3$，得 $k=-\frac{3}{4}$

6. $\langle a_n\rangle=2,7,22,67,202,\cdots\quad\therefore a_5=202$

設 $a_{n+1}+k=3(a_n+k)\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=3a_n+3k-k$，得 $3k-k=1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$，則 $\left\langle a_n+\frac{1}{2}\right\rangle$ 成等比，公比為 3

$\therefore a_n+\frac{1}{2}=(a_1+\frac{1}{2})\times3^{n-1}=\frac{5}{2}\times3^{n-1}$，則 $a_n=\frac{5\times3^{n-1}-1}{2}$

7. $a_1=1$，$a_2=a_1+2+3$，$a_3=a_2+\underset{\overset{\uparrow}{6-2}}{4}+\underset{\overset{\uparrow}{6-1}}{5}$，$a_4=a_3+\underset{\overset{\uparrow}{8-2}}{6}+\underset{\overset{\uparrow}{8-1}}{7}$

$\therefore a_n=a_{n-1}+(2n-2)+(2n-1)=a_{n-1}+(4n-3)$

所求為 $\begin{cases}a_1=1\\ a_n=a_{n-1}+(4n-3),n\geq2\end{cases}$

第 3 回

1. 已知 $n=8$ 成立，則由遞推的特性知 $n=8,13,18,23,28,\cdots,98,103,108$ 均會成立，故選(D)

2. (1) $a_1=\frac{2}{3}$，$a_2=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5}$，$a_4=\frac{1}{2-\frac{4}{5}}=\frac{5}{6}$

(2) 猜測 $a_n=\frac{n+1}{n+2}$，當 $n=1$ 時已成立，設 $n=k$ 時成立

即 $a_k=\frac{k+1}{k+2}$，則 $a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{k+1}{k+2}}=\frac{1}{\frac{k+3}{k+2}}=\frac{k+2}{k+3}$

對 $n=k+1$ 也成立，故猜測對所有自然數都成立

3. $n=1$ 時，左式 $=1\times2=2$，右式 $=\frac{1\times2\times3}{3}=2$，成立

設 $n=k$ 成立

即 $1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ 為真…①

則 $n=k+1$ 時

左式 $=1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$\underset{\overset{\uparrow}{①}}{=}\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

右式 $=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

∴左式＝右式，成立，知 $n=k$ 成立可推得 $n=k+1$ 也成立，由數學歸納法原理得證

4. $n=1$ 時，左式 $=\frac{1\cdot2^1}{2\cdot3}=\frac{1}{3}$，右式 $=\frac{2^2}{3}-1=\frac{1}{3}$

∴左式＝右式，成立

設 $n=k$ 時成立

即 $\dfrac{1\cdot 2^1}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 2^2}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{2^{k+1}}{k+2}-1$

則 $n=k+1$ 時

$$\text{左式}=\frac{1\cdot 2^1}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{k\cdot 2^k}{(k+1)(k+2)}+\frac{(k+1)\cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}$$
$$=(\frac{2^{k+1}}{k+2}-1)+\frac{(k+1)\cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2^{k+1}\cdot(k+3)+(k+1)\cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}-1$$
$$=\frac{2^{k+1}\cdot(2k+4)}{(k+2)(k+3)}-1=\frac{2^{k+2}}{k+3}-1$$

右式 $=\dfrac{2^{k+2}}{k+3}-1$ $\quad\therefore$ 左式 = 右式 $\quad\therefore n=k$ 成立

可推得 $n=k+1$ 也成立，由數學歸納法原理得證 0

5\. 令 $f(n)=4^{2n+1}+3^{n+2}$，$f(1)=4^3+3^3=64+27=91=7\times 13$

$f(2)=4^5+3^4=1024+81=1105=13\times 85$，猜測 $p=13$

再開始證明：已驗證 $f(1)=91$ 成立，設 $n=k$ 時成立

即 $f(k)=4^{2k+1}+3^{k+2}=13\times a_k$，其中 a_k 是整數

則 $f(k+1)=4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}=4^{2k+1}\cdot 4^2+3^{k+2}\cdot 3$

$$=(13\times a_k-3^{k+2})\cdot 16+3^{k+2}\cdot 3=13\times\underbrace{(16a_k-13\times 3^{k+2})}_{\text{也是整數，記為 } a_{k+1}}$$

$=13$ 的倍數

$\therefore n=k$ 成立可保證 $n=k+1$ 也成立

知 $f(n)$ 恆為 13 的倍數，得證

第 4 回

1\. $a_{10}=a_1+9d=23$，$a_{25}=a_1+24d=-22$

$\therefore d=-3$，$a_1=50$，$a_n=50+(n-1)\times(-3)=53-3n$

$\therefore \langle a_n\rangle=50,47,44,\cdots,\underset{a_{16}}{\underset{\parallel}{5}},\underset{a_{17}}{\underset{\parallel}{2}},-1,-4,\cdots$

$\therefore$ 前 17 項和最大為 $\dfrac{50+2}{2}\times 17=442$

2\. 設此凸多邊形有 n 邊

內角和 $=(n-2)\times 180^\circ=\dfrac{2\times 172^\circ+(n-1)\times(-4^\circ)}{2}\times n$

$\Rightarrow\quad 180n-360=174n-2n^2\quad\Rightarrow\quad n^2+3n-180=0$

$\Rightarrow\quad (n+15)(n-12)=0\quad\therefore n=12$

3\. $\because\ a_1+a_2+\cdots+a_{25}=a_{13}\times 25$，$b_1+b_2+\cdots+b_{25}=b_{13}\times 25$

$\therefore$ 所求 $=25a_{13}:25b_{13}=a_{13}:b_{13}$

$=(2\times 13+3):(6\times 13+4)=29:82$

4\. 每兩項合併，仍為等比

$$\text{所求}=\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}^{\,2}}+\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}^{\,4}}+\cdots+\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}^{\,20}}=\frac{\sqrt{2}-3}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1023}{1024}(\sqrt{2}-3)$$

5\. $S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}$，$S_5=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}$

$$\therefore\ \frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^5-1)}{r-1}}=\frac{r^{10}-1}{r^5-1}=\frac{(r^5+1)(r^5-1)}{r^5-1}=r^5+1=33$$

$\therefore r^5=32\quad\Rightarrow\quad r=2$，$a_6=ar^5=3\times 32=96$

6\. 用速解法，令 $n=1$

(1) $S_1=a_1=100$，$S_2=a_1+a_2=400\quad\Rightarrow\quad a_2=300$

$\therefore S_{3n}=S_3=a_1+a_2+a_3=100+300+500=900$

(2) $S_1=a_1=15$，$S_2=a_1+a_2=105\quad\Rightarrow\quad a_2=90$

$\therefore S_{3n}=S_3=a_1+a_2+a_3=15+90+540=645$

7\. $\left.\begin{aligned}a_2&=a_1+2^1\\a_3&=a_2+2^2\\a_4&=a_3+2^3\\&\ \vdots\\a_n&=a_{n-1}+2^{n-1}\end{aligned}\right\}$ 相加

$\Rightarrow\quad \cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\cdots+\cancel{a_{n-1}}+a_n$

$=a_1+\cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\cdots+\cancel{a_{n-1}}+(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})$

$\therefore a_n=a_1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$

$=\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

第 5 回

1\. 所求 $=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1023}+\sqrt{1024}}$

$=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1}+\cdots+\dfrac{\sqrt{1023}-\sqrt{1024}}{-1}$

$=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{1024}}{-1}=\dfrac{1-32}{-1}=31$

2\. 所求 $=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{22})$

$+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{21}-\dfrac{1}{23})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{22}-\dfrac{1}{23})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{714}{506}=\dfrac{357}{506}$

3\. 所求 $=\dfrac{1}{1(1+1)}+\dfrac{1}{2(2+1)}+\dfrac{1}{3(3+1)}+\cdots+\dfrac{1}{30(30+1)}$

$=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{31})$

$=1-\dfrac{1}{31}=\dfrac{30}{31}$

4\. 所求 $=\dfrac{1}{\frac{1\times 2}{2}}+\dfrac{1}{\frac{2\times 3}{2}}+\dfrac{1}{\frac{3\times 4}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=2(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+2(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+2(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=2(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$

5\. (1) $a_1=S_1=1-7-6=-12$

(2) $a_2=S_2-S_1=(4-14-6)-(-12)=-4$

(3) 當 $n\geq 2$ 時，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-7n-6)$

$-[(n-1)^2-7(n-1)-6]=2n-8$

$\therefore\langle a_n\rangle=-12,-4,-2,0,2,4,\cdots$，不是等差數列

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}|a_k|=12+4+2+0+\underbrace{(2+4+\cdots+32)}_{16\text{ 項}}$

$=18+\dfrac{2+32}{2}\times 16=290$

6\. $a_1=S_1=\dfrac{2(3-1)}{5}=\dfrac{4}{5}$

$S_2=a_1+a_2=\dfrac{4}{5}+a_2=\dfrac{2(9-1)}{5}=\dfrac{16}{5}\quad\Rightarrow\quad a_2=\dfrac{12}{5}$

$\therefore$ 公比 $\dfrac{a_2}{a_1}=3$

7. $n \geq 2$ 時

$a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = n(n+1)(n+2) \cdots$ ①

$a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)n(n+1) \cdots$ ②

① − ②得 $na_n = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = 3n(n+1)$

$\therefore a_n = 3n+3$，檢查 $a_1 = 1 \times 2 \times 3 = 3 \times 1 + 3$，合

∴對任意自然數 n，$a_n = 3n+3$

第 6 回

1. 所求 $= (2a_1 - 3b_1 + 4) + (2a_2 - 3b_2 + 4) + \cdots + (2a_{10} - 3b_{10} + 4)$

$= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) - 3(b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}) + \underbrace{(4 + 4 + \cdots + 4)}_{10\text{個}}$

$= 2 \times 15 - 3 \times 27 + 40 = 30 - 81 + 40 = -11$

2. $(a_1 + 3)^2 + (a_2 + 3)^2 + \cdots + (a_{50} + 3)^2$

$= (a_1{}^2 + 6a_1 + 9) + (a_2{}^2 + 6a_2 + 9) + \cdots + (a_{50}{}^2 + 6a_{50} + 9)$

$= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_{50}{}^2) + 6(a_1 + a_2 + \cdots + a_{50}) + \underbrace{(9 + 9 + \cdots + 9)}_{50\text{個}}$

$= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_{50}{}^2) + 6 \times 20 + 450 = 800$

$\therefore a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_{50}{}^2 = 800 - 120 - 450 = 230$

3. (1) $\dfrac{n(n+1)}{2}$　(2) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　(3) $[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$

4. (1)所求 $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 12^2 = \dfrac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650$

(2)所求 $= (1^3 + 2^3 + \cdots + 40^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 20^3)$

$= (\dfrac{40 \times 41}{2})^2 - (\dfrac{20 \times 21}{2})^2 = 672400 - 44100 = 628300$

5. $a_n = 2n^2 - n - 3$

所求 $= (2 \times 1^2 - 1 - 3) + (2 \times 2^2 - 2 - 3) + (2 \times 3^2 - 3 - 3) + \cdots + (2 \times 10^2 - 10 - 3)$

$= 2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) - \underbrace{(3 + 3 + 3 + \cdots + 3)}_{10\text{個}}$

$= 2 \times \dfrac{10 \times 11 \times 21}{6} - \dfrac{10 \times 11}{2} - 30 = 770 - 55 - 30 = 685$

6. 第 n 項為 $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$

所求 $= (\dfrac{1^2}{2} + \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2}{2}) + (\dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3}{2}) + \cdots + (\dfrac{50^2}{2} + \dfrac{50}{2})$

$= \dfrac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + 50^2) + \dfrac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + 50)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{50 \times 51 \times 101}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{50 \times 51}{2} = \dfrac{42925}{2} + \dfrac{1275}{2}$

$= 22100$

7. 各項前半部為 $1, 2, 3, 4, \cdots, 20$，共有 20 項

後半部為 $1, 3, 5, 7, \cdots, 39$　∴第 n 項為 $n(2n-1) = 2n^2 - n$

總和 $= (2 \times 1^2 - 1) + (2 \times 2^2 - 2) + (2 \times 3^2 - 3) + \cdots + (2 \times 20^2 - 20)$

$= 2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 20)$

$= 2 \times \dfrac{20 \times 21 \times 41}{6} - \dfrac{20 \times 21}{2} = 5740 - 210 = 5530$

第 7 回

1. (1) T　(2) F：舉反例：質數 2 為偶數

(3) F：若 $x = 0$，則 $x^2 \not> 0$

2. (1)本班最多九個同學國文及格

(2) x 不是 3 的倍數且不是 5 的倍數　(3) $x \geq 1$ 或 $y < 2$

3. 即 $x^2 = 1$ 為真且 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 為真

得 $x = \pm 1$ 且 $x = 1$ 或 2，取交集得 $x = 1$

4. (1) ΔABC 為直角三角形 $\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $\angle BAC = 90°$，選(B)

(2) $x > 2$ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $x > 1$，選(A)　(3) $a^2 > 0$ $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $a \neq 0$，選(C)

(4) $a^2 > b^2$ $\underset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ $a^3 > b^3$

（反例：$a = -2$，$b = -1$ 與 $a = -1$，$b = -2$），選(D)

5. $x^2 > 4$ 的解為「$x < -2$ 或 $x > 2$」，故選(A)(D)(E)

6.「$x = 1$」 $\Rightarrow$ 「$x^2 + ax + b = 0$」成立

代入得 $1 + a + b = 0$ …①

「$x = 2$」 $\Rightarrow$ 「$x^2 + bx + a = 0$」成立

代入得 $4 + 2b + a = 0$ …②，解①②得，$a = 2$，$b = -3$

第 8 回

1. (1) $\{1, 2, 3\}$　(2) ϕ

(3) $\{1, 4, 9\}$　(4) $\{\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}\}$

2. (A)為 $\{3, 5, 7, \cdots\}$，不合　(B)為 $\{1, 3, 5, \cdots\}$，合

(C)為 $\{0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, \cdots\}$，不合　(D)為 $\{1, \dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{5}{2}, \cdots\}$，不合

(E)為 $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$，合　∴選(B)(E)

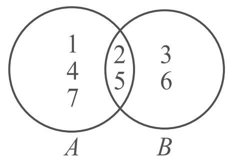
3. $A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore A \cap B = \{-6, 4, 5, 6\}$

$A - B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

4. 依題意把 1、2、3、4、5、6、7 擺進去（如右圖）

得 $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$，$B = \{2, 3, 5, 6\}$



5. $x = -1$ 代入 $x^2 - ax - 4 = 0$，得 $a = 3$

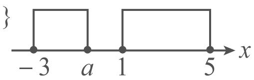
則 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\} = \{4, -1\}$

$x = -1$ 代入 $x^2 + 3x + b = 0$，得 $b = 2$

則 $B = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-2, -1\}$

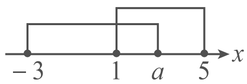
$\therefore (a, b) = (3, 2)$，$A \cup B = \{-1, 4, -2\}$

6. (1) $\because A \cap B = \phi$　$\therefore -3 < a < 1$



(2) $\because A \cup B = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$

$\therefore 1 \leq a \leq 5$

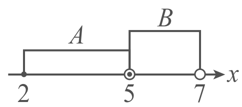


7. $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$，由 $A \cap B$、$A \cup B$

得 B 如右圖

$\therefore B$ 中元素 x 滿足 $(x-5)(x-7) < 0$

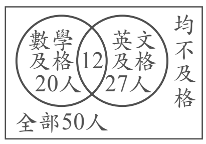
即 $x^2 - 12x + 35 < 0$，得 $(a, b) = (-12, 35)$

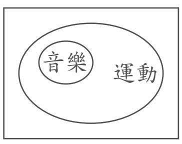


第 9 回

1. ①均不及格有 $50 - 20 - 27 + 12 = 15$ 人

②所求 $= 20 - 12 = 8$ 人



2. ①若 

，則 x 最大為 53

② x 最小為 $53 + 72 - 100 = 25$