目　次

1 數與式

1-1（上） 乘法公式與有理數

「數」是數學的主體，要學的東西既多且雜，雖然在國中小已經學過，但請別以為這個單元是在老調重彈。為了讓甫進高中的同學順利銜接課程，本書編排許多國中複習的範例，因此將「1-1 實數」拆成上、下兩節，相信這樣子安排可以對同學的學習有所助益。

國中複習銜接

國一上	正負數與數線	◎介紹負號及負數的運算 ◎數線的三要素為原點、方向及單位長
國一上	分數的運算	有理數為兩個整數的比值，主要在學習運算、化簡、去括號的規則，以及數值大小的比較

1 以下各分數的計算結果，何者正確？＿＿＿＿ 詳答參見詳解本 P.1

(A) $\frac{4}{7}+(-\frac{3}{5})=\frac{1}{35}$　(B) $-\frac{5}{12}+(-\frac{7}{18})=-\frac{27}{36}$

(C) $2\frac{5}{7}-(-3\frac{3}{4})=5\frac{13}{28}$　(D) $(-3\frac{7}{12})-(-1\frac{5}{18}-\frac{7}{12})=-1\frac{13}{18}$　鷺江國中

解

練習 1 計算 $(14\frac{3}{8}+2\frac{1}{9})-(12\frac{3}{8}-4\frac{1}{9})=$＿＿＿＿。　苓雅國中

練習 2 計算 $(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times\cdots\times(1-\frac{1}{10})=$＿＿＿＿。

(A) $\frac{1}{10}$　(B) $\frac{1}{100}$

(C) $\frac{99}{100}$　(D) $\frac{1}{1000}$　竹北國中

國二上	二次的乘法公式	介紹 (a^2-b^2) 的分解與 $(a\pm b)^2$ 乘開的運用。乘法公式是恆等式，代入數或式必定成立，可幫助我們進行因式分解

2 因式分解 $(x+y)(x-y)+4(y-1)=$ ______。 桃園國中

解

練習 3 若將 $4(x-1)^2-20(x-1)(x+2)+25(x+2)^2$ 因式分解得 $(ax+b)^2$，則 $\dfrac{b}{a}=$ ______。

龍津國中

練習 4 因式分解 $x^2-y^2+z^2-2xz=$ ______。 復興國中

範例研習特區

1 三次的乘法公式

1. 分配律：如 $(a+b+c)(p+q)=ap+aq+bp+bq+cp+cq$，乘開共 $3\times2=6$ 項。

可推廣到一般情形，如 $\underbrace{(a+b+c)}_{3\text{ 項}}\cdot\underbrace{(x+y)}_{2\text{ 項}}\cdot\underbrace{(p+q+r+s)}_{4\text{ 項}}$，乘開共 $3\times2\times4=24$ 項。

2. 二次的乘法公式（複習）

(1) 平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

(2) 和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

(3) 差的平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

(4) 三項和的平方：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$。可推廣到 n 項和的平方為 $(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2=\underbrace{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+\cdots+{x_n}^2}_{\text{各項平方相加}}+2\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)}_{\text{兩兩相乘後相加}}$。

3. 三次的乘法公式

(1) 和的立方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

(2) 差的立方：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

(3) 立方和：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

(4) 立方差：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

4. 較少用到的乘法公式

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$。

(2) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$，特別地，若 $b=1$ 可得 $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$。

範例 1　推導三次乘法公式　乘法公式怎麼來的？就只是分配律乘開而已！

1. 試求 $(2a-3b+5c)(-p+6q+4r+s)$ 展開後共________項，其中 bq 項的係數為________，cr 項的係數為________。

解

2. 試求 $(a+3b+4c)(2p-5q)(-3x+y-z)$ 展開後共________項，其中 aqx 項的係數為________，bpz 項的係數為________，cpq 項的係數為________。

解

3. 利用分配律展開 $(a+b)^3=$________，可得「和的立方」公式，再利用移項推導「立方和」公式 $a^3+b^3=$________。

解

類題 1　試求 $(3a+2b+c-5d)(p+2q-7r+4s-t)$ 展開後共________項，其中 as 項的係數為________，bq 項的係數為________。

類題 2　試求 $(a+2b+c)(p-3q+6r+s)(-x+2y-9z)$ 展開後共________項，其中 arz 項的係數為________，bqy 項的係數為________，cxy 項的係數為________。

類題 3　利用分配律展開 $(a-b)^3=$________，可得「差的立方」公式，並移項提公因式得 $a^3-b^3=$________，即為「立方差」公式。

類題 4 利用分配律展開 $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=$ ______。

類題 5 利用分配律展開 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=$ ______。

這題常考

範例 2 代公式乘開或分解

直接利用乘法公式求展開式或因式分解，不用分配律。

1. 乘開 $(2x-5y+z)^2=$ ______。

解

2. 乘開 $(2a+3b)^3=$ ______。

解

3. 乘開 $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=$ ______。

解

4. 因式分解 $x^6+8=$ ______ $=$ ______。

解

再講清楚

一般都在係數為整數的環境下因式分解，若允許係數為無理數，則可以分解得更加徹底

類題 6 乘開：(1) $(4xy+2z)^2=$ ______ (2) $(2x+5y-3z)^2=$ ______。

詳答參見詳解本 P.2

類題 7　乘開：(1) $(3a-b)^3=$ ______　(2) $(x^2+\frac{2}{x})^3=$ ______

(3) $(2x+y^2)(4x^2-2xy^2+y^4)=$ ______。

類題 8　因式分解：(1) $8x^3-27=$ ______　(2) $x^3+2x^2+2x+1=$ ______

(3) $x^6-64=$ ______。

範例 3　代公式求值 I

有許多麻煩的求值問題，如果使用乘法公式會方便許多。

1. 化簡 $\sqrt{258\frac{1}{256}}=$ ______。

解

2. $a=\sqrt{5}+2\pi$，$b=\pi-\sqrt{5}$，$c=4+3\pi$，則 $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=$ ______。

解

3. 自然數 $x=10n+5$ 是 5 的倍數，利用乘法公式說明 x^2 的速求法。如 $65^2=$ ______，$195^2=$ ______。

解

傳授絕招

這個速求法還可以推廣：

(1) $97\times93=$ ______

(2) $246\times244=$ ______

請同學記起來用！

4. 利用乘法公式求 $(5.1)^3=$ ______。

解

類題 9 化簡 $\sqrt{223\frac{1}{225}}=$ ______。

類題 10 $a=\sqrt{7}+\pi$，$b=2\pi-\sqrt{7}$，$c=1-3\pi$，則 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$ ______。

類題 11 利用速求法求 $35^2=$ ______，$75^2=$ ______，$95^2=$ ______。

類題 12 利用乘法公式求：

(1) $4.2^2=$ ______ (2) $8.01^2=$ ______ (3) $19^3=$ ______ (4) $41^3=$ ______。

類題 13 化簡 $\dfrac{819^3-319^3}{819^2+819\cdot 319+319^2}+\dfrac{89^3+111^3}{89^2-89\cdot 111+111^2}=$ ______。

這題常考

範例 4 代公式求值 II

求值問題在高中很重要！以後會和其它主題結合出題。

1. 若 $a+b=5$，$ab=2$，請問：

(1) $a^2+b^2=$ ______ (2) $a^3+b^3=$ ______ (3) $a^4+b^4=$ ______。

解

再講清楚

還可以把次數提高，名校常考，如：

$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^3-a^3b^2$

$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

2. 若 $a+b=5$，$ab=3$，且 $a>b$，則 $a-b=$ ______，$a=$ ______。

解

3. 若 $x^2-4x+1=0$，請問：(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=$ ________ (2) $x^3+\frac{1}{x^3}=$ ________。

解

類題 14 若 $a-b=7$，$ab=3$，請問：

(1) $a^2+b^2=$ ________ (2) $a^3-b^3=$ ________ (3) $a^4+b^4=$ ________。

類題 15 設 a、b 為正實數，若 $a-b=3$，$ab=5$，則 $a+b=$ ________，$a=$ ________。

類題 16 若 $x^2-4x-1=0$，請問：(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=$ ________ (2) $x^3-\frac{1}{x^3}=$ ________。

類題 17 若 $a+b=5$，$a^2+b^2=33$，請問：(1) $ab=$ ________ (2) $a^3+b^3=$ ________。

2 有理數與分式

1. **有理數**：整數 a 與 b，$b\neq 0$，形如 $\frac{a}{b}$ 的數稱為有理數，如 $\frac{2}{3}$、$-\frac{9}{11}$、$\frac{5}{1}$，所以**每個整數**也都是有理數。每個有理數的分母與分子都可約分成最簡形式，並可用直尺、圓規在數線上找到精確位置。

   注意 一般口語所說的「分數」泛指 $\frac{\triangle}{\square}$ 形式的數，如 $\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\frac{1}{\pi}$ 都有分母與分子，但這些並不是有理數。

2. 有理數化成小數：**一個有理數必可化成有限小數或循環小數**。在十進位系統下，若最簡有理數的**分母只有 2 或 5 的因數**，則該有理數可化成有限小數。若分母有 2、5 以外的因數，則必定化成循環小數。如 $\frac{3}{16}=0.1875$，$\frac{5}{6}=0.8333\cdots=0.8\overline{3}$。

3. 小數化成有理數：有限小數可以直接化成分數，而循環小數可透過解方程式化成分數，並可得到速算法，請詳見範例。

4. 有理數的稠密性：**相異有理數之間，至少有一個有理數存在**（如兩數的平均），稱為有理數的稠密性。由此可知，兩相異有理數之間有無限多個有理數，即有理數的點在數線上是密集的（但並未填滿，有許多空隙是無理數的點）。

5. 有理數四則運算的封閉性：兩個有理數可以相加、相減、相乘、相除，而且經四則運算後，仍然是有理數（若相除必須除數不為 0）。

6. 分式的運算：若用文字符號取代分母、分子的數值，所得的算式稱為「分式」。兩分式可以相加、相減、相乘、相除，其運算規則與分數相同。

如 $\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-2}=\frac{3(x-2)+4(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{7x-2}{(x+1)(x-2)}$。

範例 5 分數的化簡

分數的化簡規則在國中就學過了，幫同學溫習一下。

1. 化簡 $(1+\frac{3}{4})(1+\frac{3}{5})(1+\frac{3}{6})(1+\frac{3}{7})\times\cdots\times(1+\frac{3}{50})=$ ________。

解

2. 化簡繁分數 $\dfrac{2\frac{5}{8}\div(\frac{3}{4}+\frac{2}{9})}{\frac{5}{4}\times\frac{8}{3}+\frac{25}{16}\times\frac{72}{10}}=$ ________。

詳答參見詳解本 P.3

解

複習一下

分數化簡的原則：
(1)括號優先 (2)沒括號時先乘除後加減
(3)帶分數化成假分數 (4)化除為乘
(5)內母外子：$\dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{y}{x}}=\frac{bx}{ay}$

類題 18 化簡 $(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{5})(1+\frac{2}{7})(1+\frac{2}{9})\times\cdots\times(1+\frac{2}{99})=$ ________。

類題 19 化簡 $\dfrac{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\times\cdots\times(1+\frac{1}{100})}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\times\cdots\times(1-\frac{1}{100})}=$ ______。

類題 20 化簡 $\dfrac{\frac{125}{72}\times\frac{98}{63}}{\frac{75}{96}\times\frac{56}{81}}=$ ______。

類題 21 化簡 $\dfrac{\frac{4}{3}\times\frac{5}{6}-(\frac{7}{2}\times\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{4})}{\frac{7}{6}+\frac{5}{9}}=$ ______。

範例 6 分式的化簡

把數字用符號代替，運算規則不變，細心即可。

1. 化簡 $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{x}{x-1}=$ ______，並解 $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{x}{x-1}=1$，得 $x=$ ______。

解

2. 化簡 $\dfrac{\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}}{\frac{x}{x+1}+\frac{2x+3}{x-1}}=$ ______，並解 $\dfrac{\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}}{\frac{x}{x+1}+\frac{2x+3}{x-1}}=-1$，得 $x=$ ______。

解

小小叮嚀

解完分式方程式一定要代回檢查，若使分母為 0 就不合

類題 22 化簡 $(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x+2})(2+\dfrac{6}{x-1})=$ ______。

類題 23 化簡 $\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}}=$ ________，並解 $\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}}=2$，得 $x=$ ________。

類題 24 解 $\dfrac{\dfrac{3x}{2x^2-3x-2}}{1-\dfrac{1}{2x+1}}=\dfrac{2}{x}$，得 $x=$ ________。

這題常考

範例 7 分數化成小數

分數化成小數不是有限，就是循環，只能二選一。

1. 下列哪些選項的數值可以化成有限小數？________

(A) $\dfrac{13}{4}$ (B) $\dfrac{79}{625}$ (C) $\dfrac{77}{66}$ (D) $\dfrac{343}{56}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

解

原來如此

最簡有理數若分母只有 2、5 的質因數，就可化成有限小數

2. 請問 $\dfrac{3^{97}}{2^{100}}$ 化成小數後是否為有限小數？________，小數點後最後一個不為 0 的數字是________，位置在小數點後第________位。

解

舉例觀察

1. $6.3214=\dfrac{63214}{10^4}$
2. $0.001234=\dfrac{1234}{10^6}$

3. 將有理數 $\dfrac{18}{55}$ 表成小數會有無限多位，若小數點後第 n 位的數字記為 a_n，其中 n 為自然數。請問 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$ ________。

解

類題 25 下列哪些選項可化為有限小數？________

(A) $\dfrac{7}{32}$　(B) $\dfrac{114}{625}$　(C) $\dfrac{21}{12}$　(D) $\dfrac{15}{72}$　(E) $\dfrac{3^{2012}}{2^{99}\cdot 5^{43}}$

類題 26 請問 $\dfrac{9^{17}}{6^{30}}$ 小數點後共________位數字，最末位數字為________。

類題 27 若 $\dfrac{3}{28}$ 在小數點後第 n 位數字 $f(n)=4$，且 $n>200$，則最小 n 值為________。

類題 28 將 $\dfrac{11}{14}$ 化成小數，小數後第 n 位數字為 $f(n)$，請問：

(1) $f(50)=$ ________　(2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ ________

(3)若 $1\le x\le 50$，滿足 $f(x)=7$ 的整數 x 共有________個，和為________。

詳答參見詳解本 P.4

這題常考

範例 8　循環小數化成分數

循環小數有無限多位，可以化成分數，要能馬上化簡。

1. 循環小數 $0.23\overline{971}$ 化成最簡分數為________。

解

2. 化簡 $0.\overline{73}+1.\overline{36}\times 2.3\overline{8}=$ ________。

解

原來如此

1. 分母為「小數點後幾位循環就幾個 9，幾位不循環就幾個 0」。分子則是「全部－不循環」

2. 特訓（不用化簡）：

(1) $0.\overline{27}=$ ________

(2) $3.1\overline{45}=$ ________

(3) $7.31\overline{426}=$ ________

小小叮嚀

循環小數若不方便計算就化成分數吧！記得先乘除後加減

3. 請將下列分數化成循環小數：

(1) $\frac{2371}{9999}=$ ______ (2) $\frac{2371}{9990}=$ ______ (3) $\frac{2371}{9900}=$ ______ (4) $\frac{2371}{9000}=$ ______。

解

小小叮嚀

前幾題用除法會很慢，請記住規則然後逆推，若不易逆推才用除法

類題 29 將 $0.1\overline{58}$ 化成最簡分數為 ______，$0.1\overline{58}$ 小數點以下第 100 位的數字為 ______。

類題 30 化成最簡分數：(1) $2.\overline{14}=$ ______ (2) $0.2\overline{8}=$ ______ (3) $4.3\overline{21}=$ ______。

類題 31 化成最簡分數：$3.2\overline{5}+4.\overline{3}-[11\times(0.\overline{27})-0.0\overline{6}\div\frac{3}{10}]=$ ______。

類題 32 試選出正確的選項：______

(A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數 (B) $0.\overline{34}>\frac{1}{3}$ (C) $0.\overline{34}>0.343$

(D) $0.\overline{34}<0.35$ (E) $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$

88 學測

類題 33 請將下列分數化成循環小數：

(1) $\frac{1234}{9999}=$ ______ (2) $\frac{1234}{9990}=$ ______ (3) $\frac{1234}{9900}=$ ______ (4) $\frac{1234}{9000}=$ ______。

類題 34 $\frac{12341}{49500}$ 小數點後第 100 位的數字是 ______。

素養導向試題

「循環小數」具備「無限」的特性，因此關於其數值的大小及運算，有些地方讓人覺得不可思議，最有趣的現象就是「$0.\overline{9}$ 與 1 比大小」，與我們從小建立的數感相悖。請回答下列問題：

一、多選題

______ 1. 請問下列各選項的算式，哪些正確？

(A) $0.\overline{3}+0.\overline{4}=0.\overline{7}$　(B) $0.\overline{5}+0.\overline{6}=1.\overline{1}$　(C) $0.\overline{7}+0.\overline{8}=1.\overline{6}$

(D) $0.9+0.\overline{9}=1.9$　(D) $0.9<0.\overline{9}<1$

解

______ 2. 設 a 為 1 到 9 的整數，將 $\frac{a}{10}$ 用小數符號記為 $0.a$，請問下列各選項關於不等關係的敘述，哪些為真？

(A) $0.a<1$ 必成立

(B) $0.\overline{a}<1$ 必成立

(C) $0.a<0.\overline{a}$ 必成立

(D)「$0.4\le 0.\overline{a}\le 0.5$」與「$0.\overline{4}\le 0.a\le 0.\overline{5}$」的解相同

(E)「$0.3\le 0.a\le 0.\overline{3}$」與「$0.3<0.\overline{a}<0.4$」的解相同

解

二、非選題

3. 小明學過「循環小數化成分數」的規則之後，發現利用這個方法，可確定任何一個正整數 n，必可乘上另一個正整數 k，得到的乘積為 $9\cdots90\cdots0$ 的形式。如 $91\times10989=999999$，$22\times45=990$。請問若 404 要乘上正整數 k 得 $\underbrace{9\cdots9}_{a\text{個}}\underbrace{0\cdots0}_{b\text{個}}$，其中 a、b 為非負整數，試求出 k、a、b 之值。（答案不唯一，舉出一組解即可）

解

1-1（下） 根式運算與實數

為解出 $x^2=3$，數學家發明「根號」來表示這個數字，繼而發現這個數字與有理數大相逕庭，有許多性質值得我們進一步來學習探究。根式有不少關於計算化簡的技巧，與高中往後的學習緊密連繫，請同學務必熟練相關的題型。

國中複習銜接

國二上	二次方根與近似值	正數的根號與平方是相反的動作，即 $\sqrt{k}$ 是 $x^2=k$ 的正根，若求不出精確值，則可用逼近法求出近似值
	根式的運算	同類根號可加減合併，同次根號可乘除合併，分母的根式盡量化到分子

1 $\dfrac{3}{\sqrt{6}}\div\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}=$ ______。 內湖國中

解

練習 1 $\dfrac{1}{6}\sqrt{18}-4\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{50}-\sqrt{4\dfrac{1}{2}}=$ ______。 復華中學

詳答參見詳解本 P.5

練習 2 一個長方體的體積為 $\sqrt{21}$ 立方公分，其長為 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ 公分，寬為 $\sqrt{\dfrac{14}{25}}$ 公分，求此長方體的高為 ______ 公分。 北興國中

範例研習特區

1 根式的運算與化簡

1. 平方根：即二次方根，正數 a 的平方根即方程式 $x^2=a$ 的解。如 9 的平方根為 ± 3。

2. 二次根號：正數 a 的平方根有兩個，一正一負，正的平方根可以表為 $\sqrt[2]{a}$，簡寫為 $\sqrt{a}$，中文稱為「a 的正二次根號」，簡稱「根號 a」。在處理邊長或距離時，常需把數字開根號。

3. 根式的運算

(1) 同類根號可加減合併：根號內的被開方數相同，稱為「同類根號」，根號前的係數可加減合併。如 $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=7\sqrt{5}$。

(2) 同次根號可乘除合併：根號的開方次數相同，稱為「同次根號」，根號內的被開方數可乘除合併。如 $\sqrt{5}\times\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{5\times 2}{3}}$。

4. 根式的化簡

(1) 根號內盡量提出：若二次根號內為正整數，則可把因數中的平方數提到根號外面。如 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$。

(2) 分母盡量不帶根號：利用擴分的手法，可把分母的根號移到分子，估計數字會比較方便，稱為「分母有理化」。如 $\dfrac{6}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$。

5. 雙重根號的化簡：大根號包小根號，滿足條件的話則可化簡，若 $a\geq b\geq 0$，則

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$。

如 $\sqrt{\underbrace{3}_{2+1}+2\sqrt{\underbrace{2}_{2\times 1}}}=\sqrt{2}+1$，$\sqrt{\underbrace{10}_{7+3}-2\sqrt{\underbrace{21}_{7\times 3}}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，而 $\sqrt{11+2\sqrt{5}}$ 無法化簡。

範例 1 平方根與根號

正數的平方根有兩個，一正一負，我們發明根號來表示它。

1. (1) $\sqrt{256}$ 的平方根為________ (2)化簡 $\sqrt{0.0324}=$________。

解

動手試試

請按計算機：比 1 大的數開根號會變______，在 0 與 1 之間的數開根號會變______，正數不斷開根號會趨近______

2. 若正數 $6x+7$ 開根號之值為 $2x-1$，則 $x=$________。

解

3. 若自然數 n 滿足 $n<2\sqrt{7+3\sqrt{17}}<n+1$，請問 $n=$________，並判斷 $2\sqrt{7+3\sqrt{17}}$ 最接近的整數是________。

解

類題 1 設 x 為實數，若 $4x-1$ 是 $6x+37$ 的一個平方根，則 $x=$________。

類題 2 已知自然數 n 滿足 $n<\sqrt{217+\sqrt{591}}<n+1$，則 $n=$ ________。

類題 3 請問 $3\sqrt{2+5\sqrt{7}}$ 最接近的整數是 ________。

類題 4 設 n 為自然數，則滿足 $\sqrt{73+\sqrt{n}}<10$ 的最大 n 值為 ________。

範例 2 根式的運算

國中學過同類及同次根式的運算規則。

1. 單項根式化簡：(1) $\sqrt{2^5\times3^4\times7^3}=$ ________ (2) $\sqrt{1080}=$ ________。

解

小小叮嚀
根號內若有平方數則可提出

2. 化簡 $4\sqrt{18}+2\sqrt{27}+3\sqrt{48}-\sqrt{50}=$ ________。

解

複習一下
同類根號可加減

3. 化簡 $\sqrt{5}\times\sqrt{30}\div\sqrt{24}=$ ________。

解

複習一下
同次根號可乘除

4. 化簡 $(2\sqrt{2}-3\sqrt{6})(5\sqrt{2}+\sqrt{6})=$ ________。

解

類題 5 化簡：(1) $\sqrt{50}=$ ________ (2) $\sqrt{375}=$ ________ (3) $\sqrt{2^4\times5^3\times11}=$ ________。

類題 6 若 $\sqrt{420+m}$、$\sqrt{420-n}$、$\sqrt{420\times p}$ 均為有理數，且 m、n、p 為最小的自然數，則 $m=$ ______，$n=$ ______，$p=$ ______。

類題 7 化簡 $2\sqrt{8}+4\sqrt{27}+5\sqrt{3}-6\sqrt{32}=$ ______。

類題 8 若 $\sqrt{12}\times\sqrt{50}\div\sqrt{15}=\sqrt{m}$，則 $m=$ ______。

類題 9 化簡：(1) $(2\sqrt{3}+5\sqrt{6})(2\sqrt{6}-\sqrt{3})=$ ______。

(2) $(2\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+4\sqrt{6})=$ ______。

(3) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=$ ______。

類題 10 設 n、k 為自然數，且 $50<n<100$，若 $\sqrt{12}+\sqrt{n}=k\sqrt{3}$，則數對 $(n,k)=$ ______。

範例 3 根式的分母有理化

利用擴分可以把分母的根號移到分子。

1. 請將單項根式的分母有理化：(1) $\dfrac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=$ ______ (2) $\sqrt{\dfrac{63}{20}}=$ ______。

解

2. 化簡 $\dfrac{100}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ ______，並利用 $\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{2}\approx 1.414$，估計 $\dfrac{100}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 在哪兩個連續整數之間？______，最靠近的整數是______。

解

再講清楚

平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
原本不易估計的根式，把根號移到分子就容易掌握數值的大小

3. 化簡 $\dfrac{26\sqrt{2}+19\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}=$ ________。

解

4. 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$ ________。

解

詳答參見詳解本 P.6

類題 11 請將單項根式的分母有理化：(1) $\dfrac{21\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=$ ________　(2) $\sqrt{\dfrac{75}{32}}=$ ________。

類題 12 估計 $\dfrac{210}{3-\sqrt{2}}$ 在哪兩個連續整數之間？________，最靠近的整數是________。
（$\sqrt{2}\approx 1.414$）

類題 13 化簡：(1) $\dfrac{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$ ________　(2) $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-4\sqrt{5}}=$ ________。

類題 14 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=$ ________。

類題 15 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}=$ ________。

類題 16 化簡：(1) $\dfrac{\dfrac{5}{\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}=$______ (2) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=$______。

這題常考

範例 4 根式計算的進階問題

高中課程往後有許多主題都會與根式的運算化簡相結合。

1. 化簡 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{10}(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{10}=$______。

解

原來如此

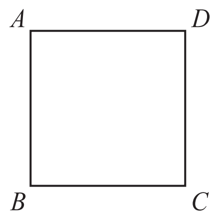
$a^n b^n=(ab)^n$

2. 解方程式 $\dfrac{5x-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2x+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，得 $x=$______。

解

3. 有一邊長為 8 的正方形，今在每一角各剪掉一個小三角形，使其成為正八邊形，則此正八邊形的邊長為______。

解



類題 17 化簡：(1) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^3(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^3=$______。

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{99}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{101}=$______。

類題 18 化簡：(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3=$______ (2) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}=$______。

類題 19　解 $\dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$，得 $x=$ ________。

類題 20　解 $\dfrac{1-x}{2}:\dfrac{x}{\sqrt{2}}=2:\sqrt{7}$，得 $x=$ ________。

類題 21　由正方形切去四個角得到正八邊形，若正八邊形的邊長比正方形的邊長少 6，則原來正方形的邊長為________。

類題 22　若直角三角形的兩股長為 $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 與 $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$，則面積為________，斜邊長為________。

雙重根號的化簡：$a>b>0$，則：

(1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=$ ____________　(2) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=$ ____________。

證 (1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(2) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$。

詳答參見詳解本 P.7

這題常考

範例 5　雙重根號與小數部分

若雙重根號滿足條件則可化簡成兩項的加減。

1. (1)化簡 $\sqrt{11+3+2\sqrt{11\times3}}=$ ________。

(2)化簡 $\sqrt{12-2\sqrt{35}}=$ ________。

(3)請問 $\sqrt{10+2\sqrt{7}}$ 能否化簡？________

解

加強演練

1. $\sqrt{8+3+2\sqrt{8\cdot3}}=$ ____________
2. $\sqrt{10+7-2\sqrt{10\cdot7}}=$ ____________
3. $\sqrt{5+11-2\sqrt{5\cdot11}}=$ ____________

2. 化簡 $\sqrt{8+4\sqrt{3}}+\sqrt{26-\sqrt{192}}=$ ______。

解

傳授絕招

小根號前一定要有 2，多了就擠進去，少了就提出來

3. 若 $\sqrt{41+12\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $a+\frac{1}{b}=$ ______。

解

加強演練

1. $\sqrt{10}$ 的小數部分為 ______
2. $2\sqrt{11}$ 的小數部分為 ______

4. 正數 a 的小數部分為 b，且 $b\neq 0$，若 $a+b^2=11$，則 $b=$ ______，$a=$ ______。

解

再講清楚

1. $ax^2+bx+c=0$，用國中學過的配方得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，稱為公式解
2. 若 $0<b<1$，則 $0<b^2<1$
3. 請同學想想，若這一題的條件改成 $a^2+b^2=11$，則 a 與 b 的關係式變成為 ______

類題 23 化簡：(1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=$ ______　(2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=$ ______
(3) $\sqrt{11-\sqrt{72}}=$ ______。

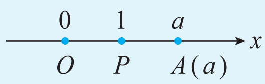
類題 24 化簡：(1) $\sqrt{11-4\sqrt{6}}+\sqrt{21+6\sqrt{6}}=$ ______　(2) $\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=$ ______。

類題 25 若 $\sqrt{11+\sqrt{112}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $\frac{2a+b+1}{a-b-6}=$ ______。

類題 26 正數 a 的小數部分為 b，且 $b\neq 0$，若 $a+b^2=15$，則 $b=$ ______，$a=$ ______。

2 實數與數線

1. 數線與坐標：直線上選定一點為 0，即原點 O，再選線上另一點 P 為 1，稱 $\overline{OP}$ 的長度為「單位長」，O 把數線分成兩邊，P 所在的部分稱為「正向」。數線上每一個點都有一個實數來表示，稱此數為該點的「坐標」。如點 A 的坐標為 a，則記為 $A(a)$。



2. 無理數：不循環的無限小數無法表為分數形式，稱為無理數。若二次根號內的整數不是平方數，則該根式必為無理數，如 $\sqrt{2}$、$\sqrt{15}$，可利用直尺圓規，配合「畢氏定理」或「母子相似性質」在數線上標出精確位置。另外，圓周率 π 也是無理數。

注意 直尺圓規的作圖相當有限，無法標出所有無理數，以前人們想用尺規作圖在數線上標出 $\sqrt[3]{2}$、π，也想要「任意角三等分」，卻許久無法解決，稱為「古希臘三大難題」，現已被證明是不可能用直尺圓規作出來的。

3. 實數與三一律：有理數與無理數統稱為實數，其所對應的點填滿了整條數線。任兩個實數 a 與 b，則 $a>b$、$a=b$、$a<b$ 三者必恰有一個成立，稱為「三一律」。

4. 數系及其代號

(1) 全體自然數（即正整數）用 N 表示，如「3 為自然數」記為 $3\in N$。而 $0\notin N$。

(2) 全體整數用 Z 表示，如「0 為整數」記為 $0\in Z$。而 $\dfrac{3}{2}\notin Z$。

(3) 全體有理數用 Q 表示，如「$\dfrac{3}{2}$ 為有理數」記為 $\dfrac{3}{2}\in Q$。而 $\sqrt{2}\notin Q$。

(4) 全體實數用 R 表示，如「$\sqrt{3}$ 為實數」記為 $\sqrt{3}\in R$。

5. 實數加法與乘法的性質：a 與 b 為實數，則有：

(1) 交換律：$a+b=b+a$，$a\times b=b\times a$。

(2) 結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$。

(3) 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$。

6. 無理數經四則運算後，可能變成有理數。如 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$，$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$。另外可證明：

(1) 有理數和無理數相加減，必為無理數。

(2) 非零有理數與無理數相乘除，必為無理數。

注意 $0\times\sqrt{2}=0$ 是有理數乘無理數得有理數的重要例子。

7. 算幾不等式：兩個正數 a、b 必定滿足 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，其 $\dfrac{a+b}{2}$ 為 a 與 b 的「算術平均數」，$\sqrt{ab}$ 為 a 與 b 的「幾何平均數」，且等號成立的條件為「a 等於 b」。此性質常用來求兩正數相加或相乘的極值，請詳見範例。

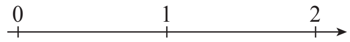
這題常考

範例 6　有理數與無理數

人類可是花了快兩千年才搞懂這些東西呀！

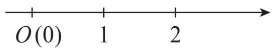
1. 請用直尺圓規在數線上標出 $\dfrac{8}{5}$ 的精確位置。

解

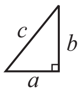
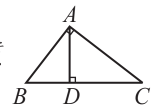


2. 請用直尺圓規在數線上標出 $\sqrt{7}$ 的精確位置。

解



複習一下

1. 畢氏定理  ，$a^2+b^2=c^2$
2. 母子相似性質 

   $\angle BAC=90^\circ$ 且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，則

   $\overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{DC}$（$\because \Delta ABD\sim\Delta CAD$）
3. 比較哪一個方法比較威？

3. 下列敘述正確請畫「○」，錯誤請畫「×」。

______ (1)循環小數 $2.\overline{34}$ 無法用尺規在數線上精準作圖。

______ (2) $1.9<1.\overline{9}<2$。

______ (3) $1.\overline{1}$、$3.\overline{3}$、10 三個數成等比數列。

______ (4)無限小數　$0.1\underbrace{0}_{1\text{個}}1\underbrace{00}_{2\text{個}}1\underbrace{000}_{3\text{個}}1\underbrace{0000}_{4\text{個}}1\underbrace{00000}_{5\text{個}}1\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{n\text{個}}1\cdots$ 具規則性，所以是有理數。

______ (5)若整數 n 使 $\sqrt{2n}$ 為有理數，則 n 必為偶數且 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ 也是有理數。

解

複習一下

1. 若 $2b=a+c$，則 a、b、c 成等差

   稱 $d=b-a=c-a$ 為公差
2. 若 $b^2=ac$，則 a、b、c 成等比

   稱 $r=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ 為公比

4. 判斷下列各敘述的對錯，若敘述有誤，請舉個反例。

______(1)若 a、b 為無理數，則 $a+b$ 必為無理數。

______(2)若 a 為有理數，b 為無理數，則 $a+b$ 必為無理數。

______(3)若 a 為有理數，b 為無理數，則乘積 ab 必為無理數。

______(4) a、b 為無理數，c、d 為有理數，若 $a+c=b+d$，則 $a=b$ 且 $c=d$。

______(5) a、b、c、d 為有理數，若 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，則 $a=c$ 且 $b=d$。

解

小小叮嚀

請同學小心字裡行間的細節，並記住重要的反例，務必把類題做完，這樣才完整

類題 27 請在數線上標出 $\sqrt{11}$ 的精確位置。

類題 28 數線給原點與單位長，下列哪些數可用直尺圓規在數線上標出精確位置？______

(A)圓周率 π　(B) $\sqrt{3741}$　(C) $\sqrt{\sqrt{2}}$　(D) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

(E) $\sqrt[3]{2}$　(F)任意角作角平分線　(G)任意角作三等分線

類題 29 下列敘述正確請畫「○」，錯誤請畫「×」。 詳答參見詳解本 P.8

______(1)一個正整數開根號後，所得結果不是整數就是無理數。

______(2)一個無理數的平方必是有理數。

______(3)一個無理數開根號後，有可能變成有理數。

______(4)兩個相異有理數之間，有無限多個有理數與無限多個無理數。

______(5)兩個相異無理數之間，有無限多個有理數與無限多個無理數。

______(6)數列 $1.\overline{1}$、$2.\overline{63}$、$4.\overline{16}$ 為等差數列。

______(7)若 p 是質數，則 $\sqrt{p}$ 必是無理數。

類題 30 若 a、b 為正有理數，x、y 為正無理數，則下列各選項哪些為真？______

(A) $\sqrt{a}+x$ 必為無理數　(B) $x+y$ 有可能是有理數　(C) $\dfrac{a}{x}$ 必為無理數

(D) $\sqrt{xy}$ 必為無理數　(E) $x\sqrt{y}$ 有可能是有理數

類題 31 請問下列各選項哪些正確？________

(A)若 a 為有理數，b 為無理數，且 $\dfrac{b}{a}$ 有意義，則 $\dfrac{b}{a}$ 必為無理數

(B)若 $3a+2b$ 為有理數，a 為無理數，則 b 必為無理數

(C)若 a、b、$\dfrac{a}{b}$ 都是無理數，則 ab 必為無理數

(D)若 a^9 與 a^5 都是有理數，則 a 為有理數

(E)若 a^{12} 與 a^{14} 都是有理數，則 a 為有理數

這題常考

範例 7 利用有理無理解方程式

先整理式子，再比較係數求未知數，就像強迫中獎。

1. 下列敘述正確請畫「○」，錯誤請畫「×」。

______(1)設 a、b 為有理數，若 $a+2\sqrt{3}=5+b\sqrt{3}$，則 $a=5$ 且 $b=2$。

______(2)設 a、b 為實數，若 $a+2\sqrt{3}=5+b\sqrt{3}$，則 $a=5$ 且 $b=2$。

______(3)找不到有理數 a、b 使得 $a\sqrt{2}=b\sqrt{3}$。

______(4)存在有理數 a、b 使得 $\dfrac{\sqrt{2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{b}$。

解

2. 設 x、y 為有理數，若 $2\sqrt{7}+x\sqrt{16+6\sqrt{7}}=10+y\sqrt{8-\sqrt{28}}$，則數對 $(x,y)=$________。

解

類題 32 設 x、y 為有理數，若 $x\sqrt{2}+y\sqrt{2}+4\sqrt{3}=5\sqrt{2}+x\sqrt{3}$，則數對 $(x,y)=$________。

類題 33 設 x、y 為有理數，若 $x\sqrt{3+2\sqrt{2}}+y\sqrt{11-6\sqrt{2}}=2\sqrt{3-\sqrt{8}}$，則數對 $(x,y)=$________。

這題常考

範例 8　實數比大小（三一律）

數值大小的比較是極為重要的課題，有些小技巧需用心觀察。

1. (1)若 $a>b>x>0$，試比較 $\dfrac{b}{a}$、$\dfrac{b+x}{a+x}$、$\dfrac{b-x}{a-x}$ 的大小為________。

(2) $a=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$，$c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}+\sqrt{11}}$，試比較 a、b、c 的大小為________。

解

歸納心得

1. 先代個數字猜測大小關係，再詳細驗證
2. 真分數若上下同加正數，值變______，靠近______
   假分數若上下同加正數，值變______，靠近______

2. 設 $a=\sqrt{3}-\sqrt{11}$，$b=2-\sqrt{10}$，$c=\sqrt{5}-3$，試比較 a、b、c 的大小為________。

解

再講清楚

這一題是把三個數平方，而類題 37 則是把分子有理化再比大小

3. 若 a、b、k 為非零實數且 $a>b$，請問下列選項哪些為真？________

(A) $3a>2b$　(B) $ka>kb$　(C) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

(D) $a-b>0$　(E) $\dfrac{3a+2b}{5}>\dfrac{4a+3b}{7}$　(F) $\dfrac{a+b}{3}>\dfrac{3a+2b}{7}$

解

小小叮嚀

1. 注意到沒？幾乎都是用負數在造反例
2. 選項(E)與分點坐標有關，第 1 章第 2 節再介紹
3. 選項(F)若只是代數字，有可能會誤判

類題 34　若 $a>b>x>0$，下列何者為最大？________

(A) $\dfrac{a}{b}$　(B) $\dfrac{a+x}{b+x}$　(C) $\dfrac{a+2x}{b+2x}$　(D) $\dfrac{2a+x}{2b+x}$　(E) $\dfrac{a-x}{b-x}$

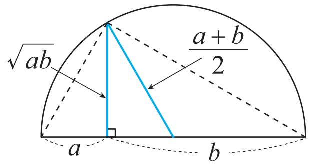
類題 35 設 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}+\pi}{\sqrt{2}+\pi}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}+2\pi}{\sqrt{2}+2\pi}$，試比較 a、b、c 的大小為________。

類題 36 設 $a=\sqrt{7}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{3}$，$c=\sqrt{5}+2$，試比較 a、b、c 的大小為________。

詳答參見詳解本 P.9

類題 37 設 $a=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，$b=\sqrt{8}-\sqrt{4}$，$c=\sqrt{9}-\sqrt{5}$，試比較 a、b、c 的大小為________。

算幾不等式：若 $a\geq 0$，$b\geq 0$，則稱 $\dfrac{a+b}{2}$ 為算術平均數，$\sqrt{ab}$ 為幾何平均數。請證明不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 必定成立，且若 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，則 $a=b$。



證 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$ $\quad\therefore\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

若 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，則 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}=0 \Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b}\quad\therefore a=b$

這題常考

範例 9 算幾不等式

證明不難，常用來解決「給相加問相乘、給相乘問相加」的極值問題。

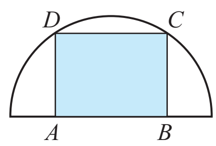
1. 設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，且 $3a+4b=10$，求 $(a,b)=$________時，ab 有最大值為________。

解

2. 若 $a>0$，$b>0$，且 $ab=25$，則 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}$ 的最小值為________，此時數對 $(a,b)=$________。

解

3. 半圓的直徑為 6，內接矩形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}$ 落在直徑上，如右圖，請問矩形 $ABCD$ 的最大面積為________。



解

4. 已知 $x>3$，求函數 $f(x)=x+\dfrac{4}{x-3}$ 在 $x=$________時有最小的函數值，此最小值為________。

解

類題 38 若 a、b 為正數，且 $a+2b=8$，則 $(a,b)=$________時，ab 有最大值為________。

類題 39 設 x、y 為實數，若 $4x^2+9y^2=14$，求 xy 的範圍為________。

類題 40 若 $a>0$，$b>0$，且 $ab=9$，則 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值為________，此時數對 $(a,b)=$________。

類題 41 若 $a>0$，$b>0$，且 $2a+\dfrac{3}{b}=12$，則 $(a,b)=$________時，$\dfrac{a}{b}$ 有最大值為________。

類題 42 若 $a<0$，$b<0$，且 $ab=4$，則 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}$ 的最大值為________，此時數對 $(a,b)=$________。

類題 43 (1)若 $x>0$，證明 $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ 必成立。（即正數加上其倒數不可能比 2 小）

(2)若 $x<0$，證明 $x+\dfrac{1}{x}\leq -2$ 必成立。

範例 10 四則運算求範圍

給 x、y 的範圍，求四則運算後的範圍，要小心陷阱！

1. 已知 x、y 為實數，滿足 $-2\leq x\leq 3$，$1\leq y\leq 2$，在這些範圍限制之下，請問：

(1) $2x+3y$ 的最大值為________，最小值為________。

(2) $x-y$ 的最大值為________，最小值為________。

解

原來如此

1. 最大加最大得和為最大，最大減最小得差為最大
2. 不等式可能陳述事實，也可能描述範圍，要分辨清楚，請見類題 46

2. 已知 x、y 為實數，若 $|x+1|\leq 2$，且 $|2y-5|\leq 3$，請問：

(1) xy 的最大值為________，最小值為________。

(2) $\dfrac{x}{y}$ 的最大值為________，最小值為________。

(3) x^2+y^3 的最大值為________，最小值為________。

解

歸納心得

1. 乘積求範圍有四種極端
   x 最大　y 最大
   x 最小　y 最小
2. 特訓
   (1)若 $2\leq x\leq 5$，則 ______ $\leq x^2\leq$ ______
   (2)若 $-4<x<-1$，則 ______ $<x^2<$ ______
   (3)若 $-7\leq x\leq 2$，則 ______ $\leq x^2\leq$ ______
3. 「絕對值不等式」到第 1 章第 2 節會詳加介紹

詳答參見詳解本 P.10

類題 44 若 x、y 滿足 $2\leq x\leq 4$，$1\leq y\leq 5$，則 $2x-3y$ 的最大值為________，最小值為________。

類題 45　若 $|x-3|\le 2$，$|y-1|\le 1$，則 xy 的最大值為＿＿＿＿，$(x-2)(y+1)$ 的最小值為＿＿＿＿。

類題 46　已知實數 a、b 的範圍為 $-1\le a\le 3$，$2\le b\le 4$，請問下列哪些選項為真？＿＿＿＿

(A)乘積 ab 的最小可能值為 -2　(B)乘積 ab 的範圍為 $-4\le ab\le 12$

(C) $ab+b$ 的範圍為 $-2\le ab+b\le 16$　(D) $ab+b$ 滿足不等式 $-2\le ab+b\le 16$

類題 47　設 $-2\le x\le 5$，$1\le y\le 3$，請問：

(1)若 $x\ne 0$，$\frac{1}{x}$ 的範圍為＿＿＿＿　(2) x^2 的範圍為＿＿＿＿

(3) $\frac{x}{y}$ 的範圍為＿＿＿＿。

素養導向試題

「算幾不等式」是利用國中的「完全平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$」所推得，只要是正數 a、b，必定會滿足 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，等號只有在 a、b 相等時才成立。此式可用來幫助我們求極值，其中的細節與變化需要用心學習。請回答下列問題：

一、單選題

＿＿＿ 1. 設 p、q、x、y 為正實數，滿足 $px+qy=40$ 與 $xy=21$，請問數對 (p,q) 可能是下列哪一個選項？

(A) $(2,10)$　(B) $(3,6)$　(C) $(4,5)$　(D) $(5,8)$　(E) $(6,7)$

解

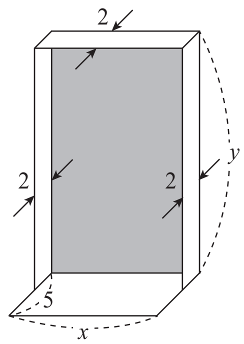
______ 2. 設 a、b 為正實數，滿足 $ab=70$，請問 $3a+2b$ 的最小整數值為何？

(A) 38　(B) 39　(C) 40　(D) 41　(E) 42

解

二、非選題

3. 工匠接受委託，要製作一個掛在牆壁上的長方形公佈欄，用木板裁切，外圍用鋁片包框。買主未限制左右的寬度與上下的高度，只要求公佈欄的面積為 700 平方吋，且公佈欄下緣要置物，故下緣鋁片的寬度設計為 5 吋，左、右及上緣鋁片的寬度設計為 2 吋，如右圖。因鋁片價格昂貴，故工匠希望裁切的鋁片面積愈少愈好，以降低製作成本，請問他應該如何設計這個公佈欄的寬度（x 吋）與高度（y 吋），才能使裁切的鋁片有最小面積？此最小面積為何？



解

資優挑戰園地

1. 已知 $1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2+20^2=2870$，求 1、2、3、…、19、20 兩兩乘積之和為 ______。

解

動動腦筋

1 ～ 20 任取兩數相乘，共有 190 種情形，要怎麼加這 190 個數呢？

2. 最簡分數的分母、分子均為自然數，若分子比分母的 3 倍少 4，化成小數後介於 2.97 與 2.98 之間，則滿足條件的分數共有 ______ 個。

解

3. 若 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$，則 $x^4-22x^2+48x=$ ________。

解

4. 化簡 $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=$ ________。

解

5. 若實數 x、y 的範圍為 $-3\le x\le 2$，$1\le y\le 4$，求 $3xy+x-2y$ 的最大值為________，最小值為________。

解

小小叮嚀

用「強迫分解」來處理，不可把 $3xy$、x、$-2y$ 的個別範圍直接合併

歷年大考精選

1. 若實數 a、b、c 滿足 $abc>0$，$ab+bc+ca<0$，$a+b+c>0$，$a>b>c$，則下列選項哪些正確？__________

(A) $a>0$ (B) $b>0$ (C) $c>0$ (D) $|a|>|b|$ (E) $a^2>c^2$

91 學測

2. 設實數 a、b 滿足 $0<a<1$，$0<b<1$，則下列選項哪些必定為真？__________

(A) $0<a+b<2$ (B) $0<ab<1$ (C) $-1<b-a<0$

(D) $0<\dfrac{a}{b}<1$ (E) $|a-b|<1$

91 學測（補）

3. 標準身材的定義是 $\dfrac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}}=\dfrac{\text{肚臍與頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}$。有一身高 150 公分，肚臍高度 90 公分的女孩，欲借穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度，滿足標準身材的定義。試問該女孩穿______公分的高跟鞋較恰當。（取最接近的整數）

93 指考乙（補）

詳答參見詳解本 P.11

4. 關於下列不等式，請選出正確的選項。________

(A) $\sqrt{13}>3.5$ (B) $\sqrt{13}<3.6$ (C) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$

(D) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ (E) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

103 學測

1 數與式

1-1（上） 乘法公式與有理數

國中複習銜接

1 (A)×；應為 $\frac{20-21}{35}=-\frac{1}{35}$　(B)×；應為 $\frac{-15-14}{36}=-\frac{29}{36}$

(C)×；應為 $2+\frac{5}{7}+3+\frac{3}{4}=5+\frac{20+21}{28}=6\frac{13}{28}$

(D)○；左式 $=-3-\frac{7}{12}+1+\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=-2+\frac{5}{18}$

$=-(2-\frac{5}{18})=-1\frac{13}{18}$

故選(D)

練習

1 $8\frac{2}{9}$　2 (A)

1. 所求 $=14+\frac{3}{8}+2+\frac{1}{9}-12-\frac{3}{8}+4+\frac{1}{9}=8+\frac{1+1}{9}=8\frac{2}{9}$
2. 左式 $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$，故選(A)

2 原式 $=(x^2-y^2)+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)$

$=x^2-(y-2)^2=(x+y-2)(x-y+2)$

練習

3 4　4 $(x+y-z)(x-y-z)$

3. 原式 $=(2x-2)^2-2\cdot(2x-2)(5x+10)+(5x+10)^2$

$=[(2x-2)-(5x+10)]^2=(-3x-12)^2$

$\therefore a=-3$，$b=-12$，則 $\frac{b}{a}=\frac{-12}{-3}=4$

（$a=3$，$b=12$ 為另一解）

4. 原式 $=(x^2-2xz+z^2)-y^2=(x-z)^2-y^2$

$=(x-z+y)(x-z-y)=(x+y-z)(x-y-z)$

範例研習特區

範例 1

1. ①共 $3\cdot4=12$ 項

② $(-3b)(6q)=-18bq$，得 bq 項的係數為 -18

③ $(5c)(4r)=20cr$，得 cr 項的係數為 20

2. ①共 $3\cdot2\cdot3=18$ 項

② $(a)(-5q)(-3x)=15aqx$　$\therefore$ aqx 項的係數為 15

③ $(3b)(2p)(-z)=-6bpz$　$\therefore$ bpz 項的係數為 -6

④ $\because$ 乘開後沒有 cpq　$\therefore$ cpq 項的係數為 0

3. ①原式 $=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

②由 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

得 $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

類題

1 20；12；4　2 36；-54；-12；0

3 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$；$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4 a^5+b^5　5 $a^4+a^2b^2+b^4$

1. ①共 $4\cdot5=20$ 項

② $3a\cdot4s=12as$，得 as 項的係數為 12

③ $2b\cdot2q=4bq$，得 bq 項的係數為 4

2. ①共 $3\cdot4\cdot3=36$ 項

② $a\cdot6r\cdot(-9z)=-54arz$，得 arz 項的係數為 -54

③ $2b\cdot(-3q)\cdot2y=-12bqy$，得 bqy 項的係數為 -12

④乘開並無 cxy 項，其係數為 0

3. ① $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

②由 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

得 $a^3-b^3=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2$

$=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)[(a-b)^2+3ab]$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4. 原式

$=a^5-\cancel{a^4b}+\cancel{a^3b^2}-\cancel{a^2b^3}+\cancel{ab^4}+\cancel{ba^4}-\cancel{a^3b^2}+\cancel{a^2b^3}-\cancel{ab^4}+b^5$

$=a^5+b^5$

5. 原式 $=a^4-\cancel{a^3b}+\cancel{a^2b^2}+\cancel{a^3b}-\cancel{a^2b^2}+\cancel{ab^3}+a^2b^2-\cancel{ab^3}+b^4$

$=a^4+a^2b^2+b^4$

範例 2

1. 原式

$=(2x)^2+(-5y)^2+z^2+2(2x)(-5y)+2(-5y)\cdot z+2\cdot z(2x)$

$=4x^2+25y^2+z^2-20xy-10yz+4zx$

2. $(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2+(3b)^3$

$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

3. 原式 $=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3$

4. 原式 $=(x^2)^3+2^3=(x^2+2)(x^4-2x^2+4)$

而 $x^4-2x^2+4=x^4+4x^2+4-6x^2=(x^2+2)^2-(\sqrt{6}x)^2$

$=(x^2+\sqrt{6}x+2)(x^2-\sqrt{6}x+2)$

所以原式 $=(x^2+2)(x^2+\sqrt{6}x+2)(x^2-\sqrt{6}x+2)$

類題

6 (1) $16x^2y^2+16xyz+4z^2$

(2) $4x^2+25y^2+9z^2+20xy-30yz-12zx$

7 (1) $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$　(2) $x^6+6x^3+12+\frac{8}{x^3}$

(3) $8x^3+y^6$

8 (1) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$　(2) $(x+1)(x^2+x+1)$

(3) $(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

6. (1) $(4xy+2z)^2=(4xy)^2+2\cdot4xy\cdot2z+(2z)^2$

$=16x^2y^2+16xyz+4z^2$

(2)原式 $=(2x)^2+(5y)^2+(-3z)^2+2\cdot(2x)\cdot(5y)$

$+2\cdot(5y)\cdot(-3z)+2\cdot(-3z)\cdot(2x)$

$=4x^2+25y^2+9z^2+20xy-30yz-12zx$

7. (1) $(3a-b)^3=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot b+3\cdot(3a)\cdot b^2-b^3$

$=27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$

(2)原式 $=(x^2)^3+3\cdot(x^2)^2\cdot\dfrac{2}{x}+3\cdot(x^2)\cdot(\dfrac{2}{x})^2+(\dfrac{2}{x})^3$

$=x^6+6x^3+12+\dfrac{8}{x^3}$

(3)原式 $=(2x+y^2)[(2x)^2-(2x)\cdot y^2+(y^2)^2]$

$=(2x)^3+(y^2)^3=8x^3+y^6$

8. (1)原式 $=(2x)^3-3^3=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

(2)原式 $=(x^3+1)+(2x^2+2x)$

$=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$

$=(x+1)[(x^2-x+1)+2x]$

$=(x+1)(x^2+x+1)$

(3)原式 $=(x^3)^2-8^2=(x^3+8)(x^3-8)$

$=(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

範例 3

1. 所求 $=\sqrt{256+2+\dfrac{1}{256}}=\sqrt{(16+\dfrac{1}{16})^2}=16+\dfrac{1}{16}=\dfrac{257}{16}$

2. 所求 $=(a+b-c)^2=[(\sqrt{5}+2\pi)+(\pi-\sqrt{5})-(4+3\pi)]^2$

$=(-4)^2=16$

3. 【傳授絕招】(1) 9021 (2) 60024

$x^2=(10n+5)^2=100n^2+100n+25=n(n+1)\cdot 100+25$

$\therefore 65^2=\underbrace{42}_{6\cdot 7}\underbrace{25}_{\text{後兩位必為 }25}$ $\therefore 195^2=\underbrace{380}_{19\cdot 20}25$

4. $(5.1)^3=(5+0.1)^3=5^3+3\cdot 5^2\cdot 0.1+3\cdot 5\cdot(0.1)^2+(0.1)^3$

$=125+7.5+0.15+0.001=132.651$

類題

9 $\dfrac{224}{15}$ 10 1 11 1225；5625；9025 12 (1) 17.64 (2) 64.1601 (3) 6859 (4) 68921 13 700

9. $\sqrt{223\dfrac{1}{225}}=\sqrt{225-2+\dfrac{1}{225}}=\sqrt{15^2+\dfrac{1}{15^2}-2\cdot 15\cdot\dfrac{1}{15}}$

$=\sqrt{(15-\dfrac{1}{15})^2}=15-\dfrac{1}{15}=14\dfrac{14}{15}=\dfrac{224}{15}$

10. 所求 $=(a+b+c)^2=[(\sqrt{7}+\pi)+(2\pi-\sqrt{7})+(1-3\pi)]^2=1$

11. $35^2=\underbrace{12}_{3\cdot 4}25$，$75^2=\underbrace{56}_{7\cdot 8}25$，$95^2=\underbrace{90}_{9\cdot 10}25$

12. (1) $4.2^2=(4+0.2)^2=16+2\cdot 4\cdot 0.2+0.04=17.64$

(2) $8.01^2=(8+0.01)^2=64+0.16+0.0001=64.1601$

(3) $19^3=(20-1)^3=8000-3\cdot 400+3\cdot 20-1=6859$

(4) $41^3=(40+1)^3=64000+3\cdot 1600+3\cdot 40+1=68921$

13. 所求 $=\dfrac{(819-319)(819^2+819\cdot 319+319^2)}{819^2+819\cdot 319+319^2}$

$+\dfrac{(89+111)(89^2-89\cdot 111+111^2)}{89^2-89\cdot 111+111^2}=500+200=700$

範例 4

1. (1) $\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\cdot 2=21$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=5\cdot(21-2)=95$

(3)由(1)得知 $a^2+b^2=21$，平方得 $a^4+b^4+2a^2b^2=441$

$\therefore a^4+b^4=441-2\cdot 2^2=433$

2. $\because (a-b)^2=a^2+b^2-2ab=(a^2+b^2+2ab)-4ab$

$=(a+b)^2-4ab=5^2-4\cdot 3=13$

$\Rightarrow a-b=\pm\sqrt{13}$（取正） $\therefore a-b=\sqrt{13}$

解 $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

3. 由 $x^2-4x+1=0 \Rightarrow x^2+1=4x$，兩邊同除以 x

得 $x+\dfrac{1}{x}=4$

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=4^2-2=14$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})(x^2-1+\dfrac{1}{x^2})=4\cdot(14-1)=52$

類題

14 (1) 55 (2) 406 (3) 3007 15 $\sqrt{29}$；$\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$

16 (1) 18 (2) 76 17 (1) -4 (2) 185

14. (1) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$\therefore 49=a^2+b^2-6 \Rightarrow a^2+b^2=55$

(2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=7\cdot(55+3)=406$

(3) $(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2$

$\therefore 55^2=a^4+b^4+18 \Rightarrow a^4+b^4=3025-18=3007$

15. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=(a^2+b^2-2ab)+4ab$

$=(a-b)^2+4ab=3^2+4\cdot 5=29$

$\therefore a+b=\sqrt{29}$ 與 $a-b=3$ 相加除以 2

得 $a=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$

16. 由 $x^2-4x-1=0 \Rightarrow x^2-1=4x$

兩邊同除以 x 得 $x-\dfrac{1}{x}=4$

(1) $(x-\dfrac{1}{x})^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$

$\therefore 4^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=16+2=18$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=(x-\dfrac{1}{x})(x^2+x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=4\cdot(18+1)=76$

17. (1) $\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\therefore 5^2=33+2ab \Rightarrow ab=-4$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=5\cdot(33+4)=185$

範例 5

1. 所求 $=\dfrac{7}{4}\times\dfrac{8}{5}\times\dfrac{9}{6}\times\dfrac{10}{7}\times\dfrac{11}{8}\times\cdots\times\dfrac{49}{46}\times\dfrac{50}{47}\times\dfrac{51}{48}\times\dfrac{52}{49}\times\dfrac{53}{50}$

$=\dfrac{51\times 52\times 53}{4\times 5\times 6}=\dfrac{17\times 13\times 53}{5\times 2}=\dfrac{11713}{10}$

2. 原式 $=\dfrac{\frac{21}{8}\times\frac{36}{35}}{\frac{10}{3}+\frac{45}{4}}=\dfrac{\frac{27}{10}}{\frac{175}{12}}=\dfrac{27\times12}{10\times175}=\dfrac{27\times6}{5\times175}=\dfrac{162}{875}$

類題

18 $\dfrac{101}{3}$ **19** 5050 **20** 5 **21** $-\dfrac{65}{31}$

18. 所求 $=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{7}{5}\times\dfrac{9}{7}\times\dfrac{11}{9}\times\cdots\times\dfrac{99}{97}\times\dfrac{101}{99}=\dfrac{101}{3}$

19. 所求 $=\dfrac{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{100}{99}\times\frac{101}{100}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}}=\dfrac{\frac{101}{2}}{\frac{1}{100}}=5050$

20. 所求 $=\dfrac{125\times98\times96\times81}{72\times63\times75\times56}=5$

21. 原式 $=\dfrac{\frac{10}{9}-\frac{35}{9}-\frac{5}{6}}{\frac{21+10}{18}}=\dfrac{\frac{20-70-15}{18}}{\frac{31}{18}}=-\dfrac{65}{31}$

範例 6

1. ①原式 $=\dfrac{3(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{x(x+2)}{(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{(3x-3)+(x^2+2x)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{x^2+5x-3}{x^2+x-2}$

②解 $\dfrac{x^2+5x-3}{x^2+x-2}=1$，即 $x^2+5x-3=x^2+x-2$

得 $4x=1$，$x=\dfrac{1}{4}$

2. ①原式 $=\dfrac{\frac{(x-2)(x-1)-5(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x(x-1)+(2x+3)(x+1)}{(x+1)(x-1)}}$

$=\dfrac{(x^2-3x+2)-(5x+5)}{(x^2-x)+(2x^2+5x+3)}=\dfrac{x^2-8x-3}{3x^2+4x+3}$

②解 $\dfrac{x^2-8x-3}{3x^2+4x+3}=-1$，即 $x^2-8x-3=-3x^2-4x-3$

得 $4x^2-4x=0$，$4x(x-1)=0$，得 $x=0$ 或 1

但 $x=1$ 代回原式會無意義，故 $x=0$

類題

22 $-\dfrac{4}{x}$ **23** $\dfrac{-x^2+3x-2}{3x^2+2x-1}$；$-\dfrac{1}{7}$ **24** 8

22. 原式 $=\dfrac{(x+2)-3x}{x(x+2)}\cdot\dfrac{(2x-2)+6}{x-1}=\dfrac{-2x+2}{x(x+2)}\cdot\dfrac{2x+4}{x-1}$

$=-4\cdot\dfrac{x-1}{x(x+2)}\cdot\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{4}{x}$

23. ①原式 $=\dfrac{\frac{2(x+1)-3x}{x(x+1)}}{\frac{(x-1)+2x}{x(x-1)}}=\dfrac{\frac{-x+2}{x(x+1)}}{\frac{3x-1}{x(x-1)}}=\dfrac{(x-1)(-x+2)}{(3x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{-x^2+3x-2}{3x^2+2x-1}$

②解 $\dfrac{-x^2+3x-2}{3x^2+2x-1}=2$，即 $-x^2+3x-2=6x^2+4x-2$

得 $7x^2+x=0$ $\therefore x(7x+1)=0$，得 $x=0$ 或 $-\dfrac{1}{7}$

但 $x=0$ 代回原式會無意義 $\therefore x=-\dfrac{1}{7}$

24. 即 $\dfrac{\frac{3x}{(2x+1)(x-2)}}{\frac{2x}{2x+1}}=\dfrac{3x\cdot(2x+1)}{(2x+1)(x-2)\cdot2x}=\dfrac{3}{2x-4}=\dfrac{2}{x}$

$\therefore 3x=4x-8$，得 $x=8$

範例 7

1. (A)○；$\dfrac{13}{4}=\dfrac{13\times25}{4\times25}=\dfrac{325}{100}=3.25$

(B)○；$\dfrac{79}{625}=\dfrac{79\times16}{625\times16}=\dfrac{1264}{10000}=0.1264$

(C)×；$\dfrac{77}{66}=\dfrac{7}{6}=\dfrac{7}{2\times3}$，分母有 3，為無限小數

(D)○；$\dfrac{343}{56}=\dfrac{49}{8}=\dfrac{49\times125}{8\times125}=\dfrac{6125}{1000}=6.125$

(E)×；$\sqrt{3}$ 為無限小數

故選(A)(B)(D)

2. $\dfrac{3^{97}}{2^{100}}=\dfrac{3^{97}\cdot5^{100}}{10^{100}}$ ∴小數點後共 100 位，是有限小數

∵ 3^{97} 為奇數，5^{100} 的個位數為 5

∴ $3^{97}\cdot5^{100}$ 的個位數為 5，即小數點後第 100 位數

3. $\dfrac{18}{55}=0.\underset{\uparrow\atop a_1}{3}\ \underset{\uparrow\atop a_2}{2}\ \underset{\uparrow\atop a_3}{7}\ \underset{\uparrow\atop a_4}{2}\ \underset{\uparrow\atop a_5}{7}\ \underset{\uparrow\atop a_6}{2}\ \underset{\uparrow\atop a_7}{7}\cdots=0.3\overline{27}$

$$\begin{array}{r} 0.32727\cdots \\ 55\overline{)\,180} \\ 165 \\ \hline 150 \\ 110 \\ \hline 400 \\ 385 \\ \hline 150 \end{array}$$

所求 $=3+2+7+2+7+\cdots+\underset{\uparrow\atop a_{100}}{2}$

$=3+\underbrace{7\times49}_{7\text{有}49\text{個}}+\underbrace{2\times50}_{2\text{有}50\text{個}}=446$

類題

25 (A)(B)(C)(E) **26** 30；5 **27** 203 **28** (1) 8 (2) 231 (3) 9；201

25. (A)分母為 2^5，合 (B)分母為 5^4，合 (C) $\dfrac{21}{12}=\dfrac{7}{4}$，合

(D)先約分，$\dfrac{15}{72}=\dfrac{5}{24}=\dfrac{5}{8\cdot3}$，分母有 3，不合

(E)分母為 $2^{99}\cdot5^{43}$，合

∴選(A)(B)(C)(E)

26. $\dfrac{9^{17}}{6^{30}}=\dfrac{3^{34}}{2^{30}\cdot3^{30}}=\dfrac{3^4\cdot5^{30}}{2^{30}\cdot5^{30}}=\dfrac{81\cdot5^{30}}{10^{30}}$

∴小數點後共 30 位，第 30 位數字為 5

27. 由除法得 $\dfrac{3}{28}=0.10\overline{714285}$

$\therefore f(6)=f(12)=f(18)=\cdots=f(198)=f(204)=2$

$\therefore f(203)=4$，所求 $=203$

28. 由除法得 $\dfrac{11}{14}=0.7\overline{857142}$

(1) $f(6)=f(12)=f(18)=\cdots=f(48)=4$，則 $f(50)=8$

(2)所求 $=7+(8+5+7+1+4+2)\cdot8+8$

$=7+27\cdot8+8=231$

(3) $f(1)=f(4)=f(10)=f(16)=\cdots=f(46)=7$

$x=1、\underset{6\cdot \underline{\underline{2}}-8}{\underset{\uparrow}{4}}、\underset{6\cdot \underline{\underline{3}}-8}{\underset{\uparrow}{10}}、\underset{6\cdot \underline{\underline{4}}-8}{\underset{\uparrow}{16}}、\cdots、\underset{6\cdot \underline{\underline{9}}-8}{\underset{\uparrow}{46}}$，共 9 個

x 之和 $=1+4+10+16+\cdots+46$

$=1+\dfrac{4+46}{2}\cdot 8=201$

範例 8

1.【原來如此】(1) $\dfrac{27}{99}$ (2) $\dfrac{3145-31}{990}$ (3) $\dfrac{731426-7314}{99000}$

$x=0.23\overline{971}$

$\Rightarrow$ $100x=23.\overline{971}$ ⋯①

$\Rightarrow$ $100000x=23971.\overline{971}$ ⋯②

② − ① 得 $99900x=23971-23$

$\therefore x=\dfrac{23971-23}{99900}=\underset{\text{質因數有 2、3、5、37，只能約 4}}{\underset{\uparrow}{\dfrac{23948}{99900}}}=\dfrac{5987}{24975}$

2. 所求 $=\dfrac{73}{99}+\dfrac{136-1}{99}\times\dfrac{238-23}{90}$

$=\dfrac{73}{99}+\dfrac{135}{99}\times\dfrac{215}{90}$

$=\dfrac{73}{99}+\dfrac{215}{66}=\dfrac{73\times2+215\times3}{33\times3\times2}=\dfrac{146+645}{33\times3\times2}=\dfrac{791}{198}$

3. (1) 形如 $0.\overline{□□□□}$，所求為 $0.\overline{2371}$

(2) 形如 $0.□\overline{□□□}$，$2371+2=2373$，所求為 $0.2\overline{373}$

(3) 形如 $0.□□\overline{□□}$，$2371+23=2394$，所求為 $0.23\overline{94}$

(4) 形如 $0.□□□\overline{□}$，不易看出這四個數字，直接用除法

則所求為 $0.263\overline{4}$

類 題

29 $\dfrac{157}{990}$；5 **30** (1) $\dfrac{212}{99}$ (2) $\dfrac{13}{45}$ (3) $\dfrac{713}{165}$ **31** $\dfrac{433}{90}$

32 (B)(C)(D)(E) **33** (1) $0.\overline{1234}$ (2) $0.1\overline{235}$ (3) $0.12\overline{46}$

(4) $0.137\overline{1}$ **34** 3

29. $0.1\overline{58}=\dfrac{158-1}{990}=\dfrac{157}{990}$

$0.1\overline{58}=0.1⑤8⑤8⑤8\cdots$

∴小數點後第 2、4、6、⋯、100 位數字均為 5

30. (1) $2.\overline{14}=\dfrac{214-2}{99}=\dfrac{212}{99}$

(2) $0.2\overline{8}=\dfrac{28-2}{90}=\dfrac{13}{45}$

(3) $4.3\overline{21}=\dfrac{4321-43}{990}=\dfrac{4278}{990}=\dfrac{713}{165}$

31. 所求 $=\dfrac{325-32}{90}+\dfrac{43-4}{9}-(11\cdot\dfrac{27}{99}-\dfrac{6}{90}\cdot\dfrac{10}{3})$

$=\dfrac{293}{90}+\dfrac{39}{9}-(3-\dfrac{2}{9})=\dfrac{433}{90}$

32. (A) $0.3\overline{43}=\dfrac{343-3}{990}$ 為分數，不合

(B) $\because 0.\overline{34}=0.3434\cdots$，$\dfrac{1}{3}=0.3333\cdots$

$\therefore 0.\overline{34}>\dfrac{1}{3}$，合

(C) $0.\overline{34}=0.3434\cdots>0.343$，合

(D) $0.3434\cdots<0.35$，合

(E) $0.\overline{34}=0.343434\cdots$，$0.3\overline{43}=0.3434343\cdots$

$\therefore 0.\overline{34}=0.3\overline{43}$，合

故選(B)(C)(D)(E)

33. (1) 形如 $0.\overline{□□□□}$，所求為 $0.\overline{1234}$

(2) 形如 $0.□\overline{□□□}$，$1234+1=1235$，所求為 $0.1\overline{235}$

(3) 形如 $0.□□\overline{□□}$，$1234+12=1246$，所求為 $0.12\overline{46}$

(4) 形如 $0.□□□\overline{□}$，直接用除法，所求為 $0.137\overline{1}$

34. $\dfrac{12341}{49500}=\dfrac{24682}{99000}=0.□□□□\overline{□□}$，直接用除法

得 $\dfrac{12341}{49500}=0.249\overline{31}=0.24931313131\cdots$

∴小數點後第 100 位為 3

素養導向試題

1. (A)○；左式 $=\dfrac{3}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{7}{9}=$ 右式

(B)×；左式 $=\dfrac{5}{9}+\dfrac{6}{9}=\dfrac{11}{9}$，右式 $=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}$，左 ≠ 右

(C)○；左式 $=\dfrac{7}{9}+\dfrac{8}{9}=\dfrac{15}{9}$，右式 $=\dfrac{16-1}{9}=\dfrac{15}{9}$

(D)○；左式 $=0.9+1=1.9$

(E)×；應為 $0.9<0.\overline{9}=1$ 才對

故選(A)(C)(D)

2. (A)○

(B)×；反例：$0.\overline{9}=1$

(C)○

(D)×；「$0.4\le 0.\overline{a}\le 0.5$」的解為 $a=4$，

「$0.\overline{4}\le 0.a\le 0.\overline{5}$」的解為 $a=5$

(E)○；兩者的解均為 $a=3$

故選(A)(C)(E)

3. 計算得 $\dfrac{1}{404}=0.00\overline{2475}=\dfrac{2475}{999900}$

$\therefore 404\times2475=999900$

得 $k=2475$，$a=4$，$b=2$

1-1（下） 根式運算與實數

國中複習銜接

1 原式 $=\dfrac{3}{\sqrt6}\div\sqrt{\dfrac{5}{3}}\times\dfrac{\sqrt6}{2\sqrt5}=\dfrac{3}{\cancel{\sqrt6}}\times\dfrac{\sqrt3}{\sqrt5}\times\dfrac{\cancel{\sqrt6}}{2\sqrt5}=\dfrac{3\sqrt3}{10}$

練 習

1 $2\sqrt2$ **2** $\sqrt{15}$

1. 原式 $=\dfrac{1}{6}\cdot3\sqrt2-2\sqrt2+5\sqrt2-\dfrac{3}{\sqrt2}$

$=\dfrac{\sqrt2}{2}-2\sqrt2+5\sqrt2-\dfrac{3\sqrt2}{2}$

$=\sqrt2(\dfrac{1}{2}-2+5-\dfrac{3}{2})=2\sqrt2$

2. 高 $=\sqrt{21}\div\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\div\sqrt{\dfrac{14}{25}}=\sqrt{21}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{14}}$

$=\sqrt{21\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{25}{14}}=\sqrt{15}$

範例研習特區

範例 1

1.【動手試試】小；大；1

(1)即 $x^2=\sqrt{256}=16$，平方根為 $x=\pm 4$

(2) $\sqrt{0.0324}=\sqrt{\dfrac{324}{10000}}=\dfrac{18}{100}=0.18$

2. 即 $(2x-1)^2=6x+7 \Rightarrow 4x^2-4x+1=6x+7$

$\Rightarrow 4x^2-10x-6=0 \Rightarrow 2(2x+1)(x-3)=0$

① $2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$（不合 $\because$ $2x-1$ 應為正數）

② $x-3=0 \Rightarrow x=3$（合）

$\therefore x=3$

3. $\underbrace{2\sqrt{7+3\sqrt{17}}}_{移進去}=\underbrace{\sqrt{28+12\sqrt{17}}}_{移進去}=\sqrt{28+\underbrace{\sqrt{2448}}_{17\times 144}}$

$=\sqrt{28+49.\cdots}=\sqrt{77.\cdots}=8.8\cdots$

$49^2=2401$，$50^2=2500$　　$(8.8)^2=77.44$

所以 $8<2\sqrt{7+3\sqrt{17}}<9$，$n=8$

且 $2\sqrt{7+3\sqrt{17}}$ 最接近的整數為 9

類 題

1 $-\dfrac{9}{8}$ 或 2　**2** 15　**3** 12　**4** 728

1. 即 $(4x-1)^2=6x+37 \Rightarrow 16x^2-14x-36=0$

$\Rightarrow 2(8x+9)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\dfrac{9}{8}$ 或 2

2. $\sqrt{591}\approx 24.\cdots$

$\therefore \sqrt{217+\sqrt{591}}\approx\sqrt{217+24.\cdots}=\sqrt{241.\cdots}\approx 15.\cdots$

$\therefore 15<\sqrt{217+\sqrt{591}}<16$，得 $n=15$

3. $3\sqrt{2+5\sqrt{7}}=\sqrt{18+45\sqrt{7}}=\sqrt{18+\sqrt{7\times 2025}}$

$=\sqrt{18+\sqrt{14175}}=\sqrt{18+119.\cdots}=\sqrt{137.\cdots}=11.7\cdots$

$119^2=14161$，$120^2=14400$

最接近的整數為 12

4. $\sqrt{73+\sqrt{n}}<10$，即 $73+\sqrt{n}<100 \quad \therefore \sqrt{n}<27$

得 $n<27^2=729$，則最大自然數 $n=728$

範例 2

1. (1) $\sqrt{2^5\cdot 3^4\cdot 7^3}=2^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot\sqrt{2\cdot 7}=252\sqrt{14}$

(2) $\sqrt{1080}=\sqrt{2^3\cdot 3^3\cdot 5}=2\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 3\cdot 5}=6\sqrt{30}$

2. 原式 $=12\sqrt{2}+6\sqrt{3}+12\sqrt{3}-5\sqrt{2}=7\sqrt{2}+18\sqrt{3}$

3. 原式 $=\sqrt{\dfrac{5\cdot 30}{24}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$

4. 原式 $=2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}-3\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2}-3\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$

$=20+2\sqrt{12}-15\sqrt{12}-18=2-13\sqrt{12}=2-26\sqrt{3}$

類 題

5 (1) $5\sqrt{2}$　(2) $5\sqrt{15}$　(3) $20\sqrt{55}$　**6** 21；20；105
7 $17\sqrt{3}-20\sqrt{2}$　**8** 40　**9** (1) $54-3\sqrt{2}$　(2) $60-7\sqrt{6}$
(3) 10　**10** $(75,7)$

5. (1) $\sqrt{50}=\sqrt{2\cdot 5^2}=5\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{375}=\sqrt{3\cdot 5^3}=5\sqrt{3\cdot 5}=5\sqrt{15}$

(3) $\sqrt{2^4\cdot 5^3\cdot 11}=2^2\cdot 5\cdot\sqrt{5\cdot 11}=20\sqrt{55}$

6. $\because 20^2=400$，$21^2=441$，$420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

$\therefore m=21$，$n=20$，$p=3\cdot 5\cdot 7=105$

7. 原式 $=4\sqrt{2}+12\sqrt{3}+5\sqrt{3}-24\sqrt{2}=17\sqrt{3}-20\sqrt{2}$

8. 所求 $=\sqrt{\dfrac{12\cdot 50}{15}}=\sqrt{40}$，$m=40$

9. (1)所求 $=4\sqrt{18}-6+60-5\sqrt{18}=54-3\sqrt{2}$

(2)原式 $=(6-2\sqrt{6}+5\sqrt{6}-10)(3+4\sqrt{6})$

$=(-4+3\sqrt{6})(3+4\sqrt{6})=-12-16\sqrt{6}+9\sqrt{6}+72$

$=60-7\sqrt{6}$

(3)所求 $=(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=10$

10. n 為平方數乘上 3　$\because 50<n<100$

$\therefore 4^2\cdot 3=48$ 太小，$5^2\cdot 3=75$ 合，$6^2\cdot 3=108$ 太大

$\therefore n=75$，則 $\sqrt{12}+\sqrt{75}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

$\Rightarrow k=7$，所求 $=(75,7)$

範例 3

1. (1) $\dfrac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{15\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{15\sqrt{6}}{6}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

(2) $\sqrt{\dfrac{63}{20}}=\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{20}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{35}}{10}$

2. $\dfrac{100}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{100(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{100(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=100(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

其近似值為 $100\cdot(1.732-1.414)=31.8$

$\therefore$在 31 與 32 之間，最靠近的整數是 32

3. 原式 $=\dfrac{(26\sqrt{2}+19\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{104-26\sqrt{10}+38\sqrt{10}-95}{8-5}=\dfrac{9+12\sqrt{10}}{3}=3+4\sqrt{10}$

4. 所求 $=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots$

$+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=9$

類 題

11 (1) $\dfrac{7\sqrt{6}}{4}$　(2) $\dfrac{5\sqrt{6}}{8}$　**12** 132 與 133；132　**13** (1) $\dfrac{36+11\sqrt{6}}{10}$

(2) $-\dfrac{43+6\sqrt{15}}{77}$　**14** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$　**15** 1

16 (1) $-\dfrac{31-14\sqrt{6}}{5}$　(2) $\dfrac{-9-5\sqrt{15}}{7}$

11. (1) $\dfrac{21\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{21\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{4}$

(2) $\sqrt{\dfrac{75}{32}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot 5^2}{2^5}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{8}$

12. $\dfrac{210}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{210\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}\approx\dfrac{210\cdot(3+1.414)}{7}$

$=30\cdot(4.414)=132.42$

∴在 132 與 133 之間，最靠近的整數是 132

13. (1)原式 $=\dfrac{(5\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{30+5\sqrt{6}+6\sqrt{6}+6}{12-2}=\dfrac{36+11\sqrt{6}}{10}$

(2)所求 $=\dfrac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+4\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-4\sqrt{5})(\sqrt{3}+4\sqrt{5})}$

$=\dfrac{2\sqrt{15}+40+3+4\sqrt{15}}{3-80}=-\dfrac{43+6\sqrt{15}}{77}$

14. 所求 $=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{4+2\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(4-2\sqrt{6})}{(4+2\sqrt{6})(4-2\sqrt{6})}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4-2\sqrt{6}}{16-24}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{-8}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$

15. 所求 $=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1}}{2}+\dfrac{\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}}}{2}+\dfrac{\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}}}{2}+\dfrac{\sqrt{9}-\cancel{\sqrt{7}}}{2}$

$=\dfrac{-\sqrt{1}+\sqrt{9}}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

16. (1)原式 $=\dfrac{(\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{3}})\cdot\sqrt{6}}{(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}})\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$

$=\dfrac{15-10\sqrt{6}-4\sqrt{6}+16}{3-8}=-\dfrac{31-14\sqrt{6}}{5}$

(2)原式 $=\dfrac{(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{3}})\cdot\sqrt{15}}{(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{6+\sqrt{15}-6\sqrt{15}-15}{12-5}=\dfrac{-9-5\sqrt{15}}{7}$

範例 4

1. 原式 $=[(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})]^{10}=(5-3)^{10}=2^{10}=1024$

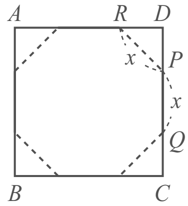
2. 交叉相乘，為 $5\sqrt{2}x-4=4\sqrt{3}x+6$

得 $(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})x=10$

$\therefore x=\dfrac{10}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}=\dfrac{10(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}{(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}$

$=\dfrac{10(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}{2}=25\sqrt{2}+20\sqrt{3}$

3. 設正八邊形的邊長 $=\overline{PQ}=\overline{PR}=x$，則 $\overline{PD}=\dfrac{8-x}{2}$



$\because \overline{PR}=\sqrt{2}\,\overline{PD}\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{2}\cdot\dfrac{8-x}{2}$

$\Rightarrow\quad \sqrt{2}x=8-x\quad\Rightarrow\quad(\sqrt{2}+1)x=8$

$\therefore x=\dfrac{8}{\sqrt{2}+1}=8(\sqrt{2}-1)$

類題

17 (1) -216　(2) $5-2\sqrt{6}$　18 (1) $28\sqrt{5}$　(2) $485+198\sqrt{6}$

19 $\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$　20 $2\sqrt{14}-7$　21 $6+3\sqrt{2}$　22 $\dfrac{5}{2}$；$\sqrt{22}$

17. (1)所求 $=[(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})]^3$

$=(12-18)^3=(-6)^3=-216$

(2)所求 $=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^{99}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$=(3-2)^{99}(5-2\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}$

18. (1)所求 $=[(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})]$

$\times[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2]$

$=2\sqrt{5}\cdot[(8+2\sqrt{5})-2+(8-2\sqrt{5})]$

$=2\sqrt{5}\cdot 14=28\sqrt{5}$

(2)所求 $=[\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}]^3=(\dfrac{5+2\sqrt{6}}{1})^3$

$=5^3+3\cdot 5^2\cdot 2\sqrt{6}+3\cdot 5\cdot(2\sqrt{6})^2+(2\sqrt{6})^3$

$=125+150\sqrt{6}+360+48\sqrt{6}=485+198\sqrt{6}$

19. 交叉相乘得 $12x-4\sqrt{6}=10x+5\sqrt{6}$

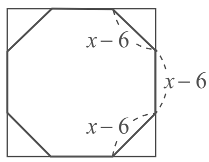
即 $2x=9\sqrt{6}$，得 $x=\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$

20. $\dfrac{x}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{7}\cdot\dfrac{1-x}{2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{2}x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{7}x}{2}$

$\Rightarrow\quad 2\sqrt{2}x+\sqrt{7}x=\sqrt{7}\quad\Rightarrow\quad x(2\sqrt{2}+\sqrt{7})=\sqrt{7}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7})(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}=2\sqrt{14}-7$

21. 設原來正方形邊長為 x



則 $\dfrac{x-6}{\sqrt{2}}+(x-6)+\dfrac{x-6}{\sqrt{2}}=x$

$\Rightarrow\quad\sqrt{2}(x-6)=6$

$\Rightarrow\quad x-6=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$\therefore x=6+3\sqrt{2}$

22. 面積 $=\dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}=\dfrac{8-3}{2}=\dfrac{5}{2}$

斜邊長 $=\sqrt{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{(11+4\sqrt{6})+(11-4\sqrt{6})}=\sqrt{22}$

雙重根號的化簡：$a>b>0$，則：

(1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\underline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(2) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\underline{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$。

範例 5

1.【加強演練】(1) $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{10}-\sqrt{7}$　(3) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$

(1)原式 $=\sqrt{\sqrt{11}^2+\sqrt{3}^2+2\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(\sqrt{11}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{11}+\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{(7+5)-2\sqrt{7\cdot 5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{7}\sqrt{5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

(3)否

2.原式 $=\sqrt{8+2\sqrt{12}}+\sqrt{26-2\sqrt{48}}$

$=\sqrt{6+2+2\sqrt{6\cdot 2}}+\sqrt{24+2-2\sqrt{24\cdot 2}}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{24}-\sqrt{2})=\sqrt{6}+\sqrt{24}$

$=\sqrt{6}+2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

3.【加強演練】(1) $\sqrt{10}-3$　(2) $2\sqrt{11}-6$

$\sqrt{41+12\sqrt{5}}=\sqrt{41+2\sqrt{5\cdot 36}}=\sqrt{36+5+2\sqrt{36\cdot 5}}$

$=\sqrt{36}+\sqrt{5}=6+\sqrt{5}\approx 6+2.2\cdots$

$\therefore a=8$，$b=(6+\sqrt{5})-8=\sqrt{5}-2$

$\therefore a+\dfrac{1}{b}=8+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=8+\dfrac{1\cdot(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$=8+(\sqrt{5}+2)=10+\sqrt{5}$

4.【再講清楚】$a=3+b$

$\because 0<b<1$　$\therefore 0<b^2<1$，則 $a=10+b$

$\therefore (10+b)+b^2=11$，得 $b^2+b-1=0$

公式解得 $b=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore a=10+b=10+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{19+\sqrt{5}}{2}$

類 題

23 (1) $\sqrt{7}-1$　(2) $3+\sqrt{2}$　(3) $3-\sqrt{2}$　24 (1) $5\sqrt{2}$

(2) $3+2\sqrt{2}$　25 $-\sqrt{7}-1$　26 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；$\dfrac{27+\sqrt{5}}{2}$

23. (1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{(7+1)-2\sqrt{7\cdot 1}}=\sqrt{7}-\sqrt{1}=\sqrt{7}-1$

(2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\sqrt{2\cdot 9}}=\sqrt{(9+2)+2\sqrt{9\cdot 2}}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$

24. (1)原式 $=\sqrt{11-2\sqrt{24}}+\sqrt{21+2\sqrt{54}}$

$=(\sqrt{8}-\sqrt{3})+(\sqrt{18}+\sqrt{3})=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}$

(2)原式 $=\sqrt{5+12(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+2\sqrt{72}}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$

25. $\sqrt{11+\sqrt{112}}=\sqrt{11+2\sqrt{28}}=\sqrt{7}+\sqrt{4}=2+\sqrt{7}$

$\approx 2+2.6=4.6$

$\therefore a=4$，$b=(2+\sqrt{7})-4=\sqrt{7}-2$

得 $\dfrac{2a+b+1}{a-b-6}=\dfrac{8+(\sqrt{7}-2)+1}{4-(\sqrt{7}-2)-6}=\dfrac{7+\sqrt{7}}{-\sqrt{7}}=-\sqrt{7}-1$

26. $\because 0<b^2<1$　$\therefore a=14+b$，則 $14+b+b^2=15$

解 $b^2+b-1=0$ 得 $b=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore a=14+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{27+\sqrt{5}}{2}$

範例 6

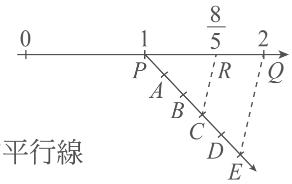
1.過 $P(1)$ 作射線

取 A、B、C、D、E

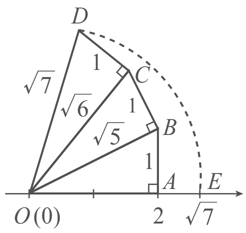
使 $\overline{PA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$

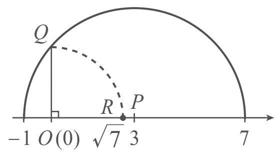
連接 $Q(2)$ 與 E，過 C 作 $\overline{QE}$ 的平行線

交數線於 R，則 R 為 $1\frac{3}{5}$，即為所求



2.《方法一》　　　《方法二》





《方法二》以 $P(3)$ 為圓心、4 為半徑作半圓，過 O 作 x 軸的鉛直線交半圓於 Q，則 $\overline{OQ}$ 的長為 $\sqrt{7}$

3. (1)×；$2.\overline{34}=\dfrac{234-2}{99}$，是有理數，可以尺規作圖

(2)×；$1.9<1.\overline{9}$ 為真

但 $1.\overline{9}=\dfrac{19-1}{9}=\dfrac{18}{9}=2$　$\therefore 1.\overline{9}\nless 2$

(3)○；$1.\overline{1}=\dfrac{10}{9}$，$3.\overline{3}=\dfrac{30}{9}=\dfrac{10}{3}$，因 $(\dfrac{10}{3})^2=\dfrac{10}{9}\times 10$

所以三數成等比

(4)×；因不具循環性，所以是無理數

(5)○；若 $2n$ 為平方數，則標準分解式必有 2 帶偶數次方

所以 $\dfrac{n}{2}$ 也是平方數

4. (1)×；若 $a=1+\sqrt{2}$，$b=1-\sqrt{2}$，則 $a+b=2$

(2)○

(3)×；若 $a=0$，$b=\sqrt{2}$，則 $ab=0$ 為有理數

(4)×；若 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}+1$，$c=3$，$d=2$

則 $a+c=b+d$

(5)○；若 $b\neq d$，則 $(b-d)\sqrt{2}=c-a$

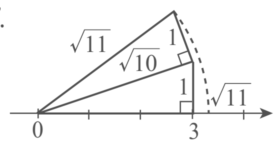
得 $\sqrt{2}=\dfrac{c-a}{b-d}$ 為有理數，不合　$\therefore b=d$ 且 $a=c$

類 題

27 見詳解　28 (B)(C)(D)(F)　29 (2)(3)為「×」，其餘皆為「○」

30 (B)(C)(E)　31 (A)(B)(D)

27.



28. π、$\sqrt[3]{2}$、任意角三等分是無法尺規作圖的，故選(B)(C)(D)(F)

29. (2)×；反例：π 的平方仍為無理數

(3)×；反推：若 $\sqrt{\text{無理}}=$ 有理，則無理 $=$ 有理^2，不合

(6)○；$1.\bar{1}=\dfrac{11-1}{9}=\dfrac{10}{9}=\dfrac{110}{99}$，$2.\overline{63}=\dfrac{263-2}{99}=\dfrac{261}{99}$

$4.\overline{16}=\dfrac{416-4}{99}=\dfrac{412}{99}$

因 $\dfrac{261}{99}\times 2=\dfrac{110}{99}+\dfrac{412}{99}$ 成立，所以成等差

30. (A)×；反例：$a=2$，$x=2-\sqrt{2}$，則 $\sqrt{a}+x=2$ 為有理數

(B)○；如 $x=1+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$，則 $x+y=3$

(C)○；因 $a\neq 0$，所以 $\dfrac{a}{x}$ 為無理數

(D)×；反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{8}$，則 $\sqrt{xy}=\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{4}=2$

(E)○；如 $x=\sqrt{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{8}$

則 $x\sqrt{y}=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{4}=2$

故選(B)(C)(E)

31. (A)○；$\because a\neq 0$ $\therefore \dfrac{b}{a}$ 為無理數

(B)○；若 b 為有理數，則 $3a+2b=$ 無理 $+$ 有理 $=$ 無理，矛盾

(C)×；反例：$a=\pi$，$b=\dfrac{1}{\pi}$，但 $ab=1$，為有理數

(D)○；因 $a^4=\dfrac{a^9}{a^5}$ 為有理數，則 $a=\dfrac{a^5}{a^4}$ 為有理數

(E)×；只能推得 a^2 為有理數，反例：$a=\sqrt{2}$

故選(A)(B)(D)

範例 7

1. (1)○

(2)×；反例：$b=0$，$a=5-2\sqrt{3}$

可滿足 $a+2\sqrt{3}=5+b\sqrt{3}$

(3)×；反例：$a=0$ 且 $b=0$

(4)×；若存在，則 a、b 均不為 0，則 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{b}$ 為有理數，矛盾

2. $\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\sqrt{16+2\sqrt{63}}=\sqrt{9}+\sqrt{7}=3+\sqrt{7}$

$\sqrt{8-\sqrt{28}}=\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{7}-1$

$\therefore 2\sqrt{7}+x(3+\sqrt{7})=10+y(\sqrt{7}-1)$

即 $3x+(2+x)\sqrt{7}=(10-y)+y\sqrt{7}$

解 $\begin{cases}3x=10-y\\2+x=y\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=2$，$y=4$ $\therefore (x,y)=(2,4)$

類題

32 $(4,1)$　33 $(1,-1)$

32. 即 $(x+y)\sqrt{2}+4\sqrt{3}=5\sqrt{2}+x\sqrt{3}$

$\therefore \begin{cases}x+y=5\\4=x\end{cases}$ $\Rightarrow$ 得 $(x,y)=(4,1)$

33. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}$

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}$

$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\therefore x(\sqrt{2}+1)+y(3-\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)$

即 $(x+3y)+(x-y)\sqrt{2}=-2+2\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases}x+3y=-2\\x-y=2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $(x,y)=(1,-1)$

範例 8

1.【歸納心得】大；1；小；1

(1)令 $a=3$，$b=2$，$x=1$，三個數依序為 $\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{1}{2}$

先猜測 $\dfrac{b-x}{a-x}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+x}{a+x}$

① $\dfrac{b}{a}-\dfrac{b-x}{a-x}=\dfrac{b(a-x)-a(b-x)}{a(a-x)}=\dfrac{(a-b)x}{a(a-x)}>0$

② $\dfrac{b+x}{a+x}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+x)-b(a+x)}{(a+x)a}=\dfrac{(a-b)x}{(a+x)a}>0$

$\therefore \dfrac{b-x}{a-x}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+x}{a+x}$

(2)因 $0<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<1$，上下同加 $\sqrt{5}$ 會變大，同加 $\sqrt{11}$ 會更大

$\therefore a<b<c$

2. $a^2=3+11-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}=14-2\sqrt{33}$

$b^2=4+10-2\cdot 2\cdot\sqrt{10}=14-2\sqrt{40}$

$c^2=5+9-2\cdot\sqrt{5}\cdot 3=14-2\sqrt{45}$

$\because a^2>b^2>c^2$ 且 a、b、$c<0$，得 $a<b<c$

3. (A)×；反例：$a=-2$，$b=-3$，使 $3a=2b$

(B)×；必須 $k>0$ 才對

(C)×；反例：$a=1$，$b=-1$，使 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

(D)○；$a>b$ $\Leftrightarrow$ $a-b>0$，兩者同義

(E)○；$\dfrac{3a+2b}{5}-\dfrac{4a+3b}{7}=\dfrac{(21a+14b)-(20a+15b)}{35}$

$=\dfrac{a-b}{35}>0$ $\therefore \dfrac{3a+2b}{5}>\dfrac{4a+3b}{7}$ 必成立

(F)×；$\dfrac{a+b}{3}-\dfrac{3a+2b}{7}=\dfrac{(7a+7b)-(9a+6b)}{21}=\dfrac{-2a+b}{21}$

反例：$a=1$，$b=-1$，使 $-2a+b<0$

則 $\dfrac{a+b}{3}<\dfrac{3a+2b}{7}$

故選(D)(E)

類題

34 (E)　35 $a>b>c$　36 $a<b<c$　37 $a>b>c$

34. 令 $a=3$，$b=2$，$x=1$

得(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $\dfrac{5}{4}$　(D) $\dfrac{7}{5}$　(E) $\dfrac{2}{1}$　$\therefore$選(E)

35. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$　$\therefore$上下同加 π 會變小，同加 2π 會更小

得 $a>b>c$

36. $a^2=9+2\sqrt{14}$，$b^2=9+2\sqrt{18}$，$c^2=9+2\sqrt{20}$

$\because a$、b、$c>0$ 且 $a^2<b^2<c^2$ $\therefore a<b<c$

37. 利用有理化的技巧

$a=\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{4}{\sqrt{8}+\sqrt{4}}$，$c=\dfrac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}$

$\because 0<\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{8}+\sqrt{4}<\sqrt{9}+\sqrt{5}$ $\quad\therefore a>b>c$

範例 9

1. 由 $\dfrac{3a+4b}{2}\ge\sqrt{3a\cdot 4b}$ 平方得 $25\ge 12ab$

$\therefore ab\le\dfrac{25}{12}$，在 $3a=4b=5$ 時

$(a,b)=(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{4})$ 時，ab 有最大值為 $\dfrac{25}{12}$

2. $\because \dfrac{\frac{4}{a}+\frac{9}{b}}{2}\ge\sqrt{\dfrac{4}{a}\cdot\dfrac{9}{b}}=\sqrt{\dfrac{36}{25}}=\dfrac{6}{5}$ $\quad\therefore \dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\ge\dfrac{12}{5}$

得最小值為 $\dfrac{12}{5}$

且此時 $\dfrac{4}{a}=\dfrac{9}{b}=\dfrac{6}{5}$ $\quad\therefore a=\dfrac{20}{6}=\dfrac{10}{3}$，$b=\dfrac{45}{6}=\dfrac{15}{2}$

3. 設 $\overline{AB}=x$，$\overline{BC}=y$

則由畢氏定理知 $(\dfrac{x}{2})^2+y^2=3^2$，即 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=9$

想求 xy 的最大值，用算幾不等式得

$\dfrac{\frac{x^2}{4}+y^2}{2}\ge\sqrt{\dfrac{x^2}{4}\cdot y^2}=\dfrac{xy}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{9}{2}\ge\dfrac{xy}{2}$，得 $xy\le 9$

在 $\dfrac{x^2}{4}=y^2=\dfrac{9}{2}$ 時，xy 有最大值 9

4. $\because x>3$ $\quad\therefore \dfrac{(x-3)+\frac{4}{x-3}}{2}\ge\sqrt{(x-3)\cdot\dfrac{4}{x-3}}=2$ 必成立

即 $x-3+\dfrac{4}{x-3}\ge 4$，得 $x+\dfrac{4}{x-3}\ge 7$

在 $x-3=\dfrac{4}{x-3}$ 時，$x-3=\pm 2$（取正）

得 $x=5$ 時，$f(x)$ 有最小值為 7

類題

38 $(4,2)$；8 　39 $-\dfrac{7}{6}\le xy\le\dfrac{7}{6}$ 　40 $\dfrac{4}{3}$；$(\dfrac{3}{2},6)$

41 $(3,\dfrac{1}{2})$；6 　42 -3；$(-\dfrac{2}{3},-6)$ 　43 見詳解

38. $\because \dfrac{a+2b}{2}\ge\sqrt{a\cdot 2b}$ $\quad\therefore \dfrac{8}{2}\ge\sqrt{2ab}$

平方得 $16\ge 2ab$ $\quad\therefore ab\le 8$

得 ab 的最大值為 8，且若 $ab=8$，則 $a=2b=4$

$\therefore a=4$，$b=2$

39. $\because x^2\ge 0$，$y^2\ge 0$，由算幾不等式 $\dfrac{4x^2+9y^2}{2}\ge\sqrt{4x^2\cdot 9y^2}$

即 $7\ge 6|xy|$ $\quad\therefore -\dfrac{7}{6}\le xy\le\dfrac{7}{6}$

40. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{4}{b}}{2}\ge\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{4}{b}}=\sqrt{\dfrac{4}{ab}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\ge\dfrac{4}{3}$

且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{4}{3}$ 時，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$，$b=6$

41. $\because \dfrac{2a+\frac{3}{b}}{2}\ge\sqrt{2a\cdot\dfrac{3}{b}}$ 必成立 $\quad\therefore (\dfrac{12}{2})^2\ge\dfrac{6a}{b}$

即 $6\ge\dfrac{a}{b}$ $\quad\therefore \dfrac{a}{b}$ 有最大值 6，此時 $2a=\dfrac{3}{b}=6$

得 $a=3$，$b=\dfrac{1}{2}$

42. $\because a<0$，$b<0$ $\quad\therefore -a>0$，$-b>0$

則 $\dfrac{\frac{1}{(-a)}+\frac{9}{(-b)}}{2}\ge\sqrt{\dfrac{1}{(-a)}\cdot\dfrac{9}{(-b)}}=\sqrt{\dfrac{9}{ab}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{1}{(-a)}+\dfrac{9}{(-b)}\ge 3$，得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}\le -3$

$\therefore$ 最大值為 -3，此時 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{9}{b}=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore a=-\dfrac{2}{3}$，$b=-6$

43. (1) $\because \dfrac{x+\frac{1}{x}}{2}\ge\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=1$ $\quad\therefore x+\dfrac{1}{x}\ge 2$，得證

(2) $\because x<0$ $\quad\therefore -x>0$

$\Rightarrow\quad \dfrac{(-x)+\frac{1}{(-x)}}{2}\ge\sqrt{(-x)\cdot\dfrac{1}{(-x)}}=1$

$\therefore -x-\dfrac{1}{x}\ge 2$，得 $x+\dfrac{1}{x}\le -2$

範例 10

1. (1)
$$\begin{array}{r} -4\le 2x\le 6 \\ 3\le 3y\le 6 \\ \hline -1\le 2x+3y\le 12 \end{array}$$
$2x+3y$ 的最大值為 12

$2x+3y$ 的最小值為 -1

(2)
$$\begin{array}{r} -2\le x\le 3 \\ -2\le -y\le -1 \\ \hline -4\le x+(-y)\le 2 \end{array}$$
$x-y$ 的最大值為 2

$x-y$ 的最小值為 -4

2.【歸納心得】(1) 4；25 　(2) 1；16 　(3) 0；49

由題意得 $-2\le x+1\le 2$ $\quad\therefore -3\le x\le 1$

$-3\le 2y-5\le 3$ $\quad\therefore 1\le y\le 4$

(1)
$$\begin{array}{r} -3\le x\le 1 \\ 1\le y\le 4 \\ \hline -3、4、-12、1 \end{array}$$
$\therefore xy$ 的最大值為 4

xy 的最小值為 -12

(2) $\because 1\le y\le 4$
$$\begin{array}{r} \therefore \frac{1}{4}\le\frac{1}{y}\le 1 \\ -3\le x\le 1 \\ \hline -\frac{3}{4}、1、\frac{1}{4}、-3 \end{array}$$
$\therefore \dfrac{x}{y}$ 的最大值為 1

$\dfrac{x}{y}$ 的最小值為 -3

(3)
$$\begin{array}{r} 0\le x^2\le 9 \\ 1\le y^3\le 64 \\ \hline 1\le x^2+y^3\le 73 \end{array}$$
$\therefore x^2+y^3$ 的最大值為 73

x^2+y^3 的最小值為 1

類題

44 5；-11 　45 10；-3 　46 (B)(D) 　47 (1) $\dfrac{1}{x}\le-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{1}{5}$

(2) $0\le x^2\le 25$ 　(3) $-2\le\dfrac{x}{y}\le 5$

44.
$$\begin{array}{r} 4 \le 2x \le 8 \\ -15 \le -3y \le -3 \\ \hline 4+(-15) \le 2x+(-3y) \le 8+(-3) \end{array}$$

$\therefore 2x-3y$ 的最大值為 5，最小值為 -11

45. $|x-3|\le 2$，得 $-2\le x-3\le 2$，即 $1\le x\le 5$

$|y-1|\le 1$，得 $-1\le y-1\le 1$，即 $0\le y\le 2$

① $\begin{array}{c} 1\le x\le 5 \\ 0\le y\le 2 \\ \hline 0、10、2、0 \end{array}$　② $\begin{array}{c} -1\le x-2\le 3 \\ 1\le y+1\le 3 \\ \hline -1、9、-3、3 \end{array}$

$\therefore xy$ 最大值為 10　$\therefore (x-2)(y+1)$ 最小值為 -3

46. (A)×；ab 在 $a=-1$ 且 $b=4$ 時有最小值為 -4　(B)○

(C)×；$ab+b=(a+1)b$，由 $0\le a+1\le 4$ 且 $2\le b\le 4$

得 $0\le(a+1)b\le 16$ 才對

(D)○；因 $ab+b$ 的範圍為 $0\le ab+b\le 16$

$\therefore -2\le ab+b\le 16$ 成立

故選(B)(D)

47. (1)若 $-2\le x<0$，則 $\frac{1}{x}\le -\frac{1}{2}$

若 $0<x\le 5$，則 $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{5}$　$\therefore \frac{1}{x}\le-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{5}$

(2)得 $0\le x^2\le 25$

(3) $\because \frac{1}{3}\le\frac{1}{y}\le 1$　$\therefore -2\le x\le 5$，$\frac{1}{3}\le\frac{1}{y}\le 1$

乘積 $x\cdot\frac{1}{y}$ 的四種極端為 $-\frac{2}{3}$、5、-2、$\frac{5}{3}$

得 $-2\le x\cdot\frac{1}{y}\le 5$

素養導向試題

1. 由算幾不等式，$\frac{px+qy}{2}\ge\sqrt{px\cdot qy}$ 必成立

即 $\frac{40}{2}\ge\sqrt{21pq}$　$\therefore 400\ge 21pq$，得 $pq\le\frac{400}{21}=19.\cdots$

因為只有(B) $pq=18<19$，其他選項不合，故選(B)

2. 用算幾不等式，$\frac{3a+2b}{2}\ge\sqrt{3a\cdot 2b}=\sqrt{420}$

$\therefore 3a+2b\ge 2\sqrt{420}=\sqrt{1680}=40.\cdots$（$41^2=1681$）

$\therefore 3a+2b$ 的最小整數值為 41，故選(D)

3. 鋁片面積為 $\underbrace{5x}_{下}+\underbrace{2x}_{上}+\underbrace{2y}_{左}+\underbrace{2y}_{右}=7x+4y$（平方吋）

公佈欄面積 $=xy=700$（平方吋）

由算幾不等式，$\frac{7x+4y}{2}\ge\sqrt{7x\cdot 4y}=\sqrt{28\cdot 700}=140$

$\therefore 7x+4y\ge 280$（平方吋）

即鋁片面積最小為 280 平方吋，此時 $7x=4y=140$

$\therefore x=20$ 吋，$y=35$ 吋，需裁切的鋁片面積最小為 280 平方吋

資優挑戰園地

1. 利用 $(1+2+3+\cdots+19+20)^2$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2+20^2+2\times$ 所求

$\therefore 210^2=2870+2\times$ 所求，所求 $=20615$

2. 即 $2.97<\frac{3x-4}{x}<2.98$

即 $\begin{cases} 2.97<3-\frac{4}{x} \\ 3-\frac{4}{x}<2.98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{x}<0.03 \\ 0.02<\frac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{400}{3}<x \\ x<\frac{400}{2} \end{cases}$

$\therefore 133\frac{1}{3}<x<200$

$\because$ 最簡　$\therefore x$ 不能是偶數

得 $x=135、137、139、\cdots、197、199$

共 $\frac{199-135}{2}+1=33$ 個

3. 移項成 $x+\sqrt{6}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 再平方，若直接平方算式會很大

$\therefore x^2+2\sqrt{6}x+6=2+3+2\sqrt{6}$，即 $x^2+1=2\sqrt{6}(1-x)$

再平方，$x^4+2x^2+1=24(1-2x+x^2)$

即 $x^4-22x^2+48x=23$，為所求

4. 所求 $=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}}-\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

5. $3xy+x-2y=(3x-2)(y+\frac{1}{3})+\frac{2}{3}$

$\because -3\le x\le 2$　$\therefore -11\le 3x-2\le 4$

$\because 1\le y\le 4$　$\therefore \frac{4}{3}\le y+\frac{1}{3}\le\frac{13}{3}$

乘積的四種極端為 $\frac{52}{3}$、$-\frac{143}{3}$、$-\frac{44}{3}$、$\frac{16}{3}$

$\therefore -\frac{143}{3}\le(3x-2)(y+\frac{1}{3})\le\frac{52}{3}$

同加 $\frac{2}{3}$ 得 $-\frac{141}{3}\le(3x-2)(y+\frac{1}{3})+\frac{2}{3}\le\frac{54}{3}$

即 $-47\le(3x-2)(y+\frac{1}{3})+\frac{2}{3}\le 18$

$\therefore$ 最大值為 18，最小值為 -47

歷年大考精選

1. $\because abc>0$，但 $ab+bc+ca<0$，得 $a>0$ 且 $b<0$ 且 $c<0$

$\because a+b+c>0$　$\therefore$ 正數 a 夠大，得 $|a|>|b|$（合）

$a^2>c^2$（合）　$\therefore$ 選(A)(D)(E)

2. (A)○；$0+0<a+b<1+1$，得 $0<a+b<2$

(B)○；將 $0<a<1$ 同乘 b 得 $0<ab<b$　$\therefore 0<ab<1$

(C)×；應為 $-1<b-a<1$

$\because b$ 可接近 1，a 可接近 0，則 $b-a$ 接近 1

(D)×；應為 $0<\frac{a}{b}$，而 $\frac{a}{b}$ 沒有上限

$\because a$ 可接近 1，b 可接近 0

(E)○；$\because -1<a-b<1$，得 $|a-b|<1$

故選(A)(B)(E)

3. 設 x 公分，則 $\frac{90+x}{150+x}=\frac{60}{90+x}$

$\therefore (90+x)^2=9000+60x$，即 $x^2+120x-900=0$

公式解 $x=\frac{-120\pm\sqrt{14400+3600}}{2}$（取正）

$=-60+30\sqrt{5}\approx-60+30\times 2.236=7.08$

$\therefore$ 為 7 公分

4.(A)○；因 $(3.5)^2=12.25$ ∴ $13>(3.5)^2$

(B)×；因 $(3.6)^2=12.96$ ∴ $13>(3.6)^2$

(C)×；因 $\sqrt{13}-\sqrt{3}\approx 3.6-1.7=1.9$，而 $\sqrt{10}\approx 3.2$

應 $\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$

(D)○；因 $\sqrt{13}+\sqrt{3}\approx 3.6+1.7=5.3>4$

(E)×；因 $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{13-3}\approx\dfrac{3.6+1.7}{10}=0.53<0.6$

故選(A)(D)

1-2 絕對值

國中複習銜接

1 $|a-c|=\overline{AC}$

(A) $|a|+|b|+|c|=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{AC}+\overline{OB}>\overline{AC}$

(B) $|a-b|+|c-b|=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

(C) $|a-d|-|d-c|=\overline{AD}-\overline{CD}=\overline{AC}$

(D) $|a|+|d|-|c-d|=\overline{OA}+\overline{OD}-\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{CD}=\overline{AC}$

故選(A)

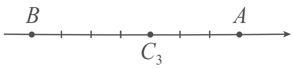
練習

1 12　2 $-\dfrac{1}{12}$

1. 即 $\overline{BD}=10$，$\overline{AC}=15$，$\overline{CD}=7$

則 $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CD}-\overline{BD}=15+7-10=12$

2. $\overline{AB}=\left|2\dfrac{2}{3}-(-3\dfrac{3}{4})\right|$



$=5+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{60+8+9}{12}=\dfrac{77}{12}$

$\overline{AB}\div 7=\dfrac{77}{12}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{11}{12}$

∴ $C_3=-3\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{12}\times 4=-3\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{3}=-\dfrac{45}{12}+\dfrac{44}{12}=-\dfrac{1}{12}$

2 原式 $=(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})+(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9})+(-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{9})+(-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{11})$

$=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{13}=\dfrac{13-5}{65}=\dfrac{8}{65}$

練習

3 28　4 (B)

3. 原式 $=(-4)\times(-4)-2\times|-9-9|\times\dfrac{1}{-3}$

$=16-2\times 18\times\dfrac{1}{-3}=16+12=28$

4. 原式 $=\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{12}\div\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{12}-\dfrac{2}{12}=\dfrac{5}{12}$，故選(B)

範例研習特區

範例 1

1. 原式 $=|-3|+|1|+\left|\dfrac{1}{6}\right|+\left|\dfrac{-5}{6}\right|=3+1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}=5$

2. 原式 $=2\sqrt{2}+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+4)=4$

3. 原式 $=|2-\sqrt{5}|+|2\sqrt{5}-3|+|3\sqrt{5}-8|$

$=(-2+\sqrt{5})+(2\sqrt{5}-3)+(-3\sqrt{5}+8)$

$=-2-3+8=3$

類題

1 1　2 $2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　3 0　4 $\dfrac{11}{10}$

1. 原式 $=(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})$

$=-1+\sqrt{4}=-1+2=1$

2. 原式 $=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$+(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

3. 原式 $=|\pi-\sqrt{5}|-|\sqrt{2}-\pi|+|\sqrt{2}-\sqrt{5}|$

$=(\pi-\sqrt{5})-(-\sqrt{2}+\pi)+(-\sqrt{2}+\sqrt{5})=0$

4. 原式

$=\left|\dfrac{1}{10}-\dfrac{2}{9}\right|+\left|\dfrac{2}{9}-\dfrac{3}{8}\right|+\left|\dfrac{3}{8}-\dfrac{4}{7}\right|+\left|\dfrac{4}{7}-\dfrac{5}{6}\right|+\left|\dfrac{5}{6}-\dfrac{6}{5}\right|$

$=(-\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{9})+(-\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{8})+(-\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{7})+(-\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{6})+(-\dfrac{5}{6}+\dfrac{6}{5})$

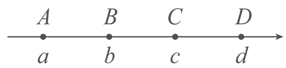
$=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{6}{5}=\dfrac{11}{10}$

範例 2

1. $|a-c|+|b-d|+|a-d|$

$=\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{AD}=\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{AD}$

$=8+3+8=19$



2. 原式 $=|a+b-c|-\sqrt{(a-b-c)^2}=|a+b-c|-|a-b-c|$

$=(a+b-c)-(-a+b+c)=2a-2c$

3. a、b、c 的大小關係共有 6 種可能

∵左式為正數，所以 $b>c$

①若 $c<b<a$

原式 $=(a-b)+(b-c)+(-c+a)=2a-2c$，不合

②若 $c<a<b$

原式 $=(-a+b)+(b-c)+(-c+a)=2b-2c$，合

③若 $a<c<b$

原式 $=(-a+b)+(b-c)+(c-a)=2b-2a$，不合

所以可確定 $c<a<b$

（也可畫數線，用距離來判斷較容易看出答案）

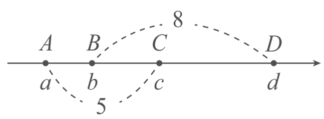
類題

5 (1) 13　(2) -3　6 $2b$　7 (A)(B)(C)

5. (1) $|a-d|+|b-c|$

$=\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{BD}$

$=5+8=13$



(2) 由 $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CD}$

得 $\overline{AB}+8=5+\overline{CD}$

∴ $\overline{AB}-\overline{CD}=|a-b|-|c-d|=5-8=-3$

6. 原式 $=\sqrt{(a+b-c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}$

$=|a+b-c|+|a-b-c|$

$=(a+b-c)+(-a+b+c)=2b$

7. ①若 $a<b<c$

原式 $=(-a+b)+(-b+c)-(c-a)=0$

對話式®

高中數學

第 1 冊 講義

葉晉宏

課後練習本

班級：__________ 姓名：__________ 座號：__________

1-1(上) 乘法公式及其應用

1 因式分解：(1) $8x^3-27y^3=$ ________　(2) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=$ ________。

解

2 已知實數 a、b 滿足 $a^2+6ab+b^2=0$，化簡 $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^3}=$ ________。

解

3 設實數 x、y 滿足 $(x+y)^3<x^3+y^3$，請問下列哪些選項的推論為真？________

(A) x 與 y 不可能同時為正數　(B) x 與 y 不可能同時為負數　(C) $x+y$ 可以是正數

(D) $x+y$ 可以是負數　(E)若 x 為正數，則 $x+y$ 為負數

解

4 若 $a+b=7$，$a^2+b^2=39$，則 $ab=$ ________，$a^3+b^3=$ ________。

解

5 若 $a-b=2$，$ab=1$，則 $a^2+b^2=$ ________，$a^4+b^4=$ ________，$a^6+b^6=$ ________。

解

6 若 $x-\dfrac{1}{x}=4$，則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ ________，$x^3-\dfrac{1}{x^3}=$ ________，$x^4+\dfrac{1}{x^4}=$ ________。

解

7 若 $x^4+\dfrac{1}{x^4}=47$，則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ ________，$x+\dfrac{1}{x}=$ ________。

解

1 化簡 $\dfrac{42\cdot41\cdot40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}\div\dfrac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=$________。

解

2 化簡 $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{23\cdot25}=$________。

解

3 最簡分數的分母為 315，化為小數後，小數點後第三位四捨五入得近似值為 0.24，則此分數為________。

解

4 將下列循環小數化成最簡分數：

(1) $0.\overline{25}=$________　(2) $1.3\overline{24}=$________　(3) $3.21\overline{5}=$________。

解

5 化簡 $\sqrt{1.\overline{7}}\times\sqrt{7.\overline{7}+8.\overline{8}}=$________。

解

6 $\dfrac{5129}{3330}$ 化成小數後，小數點後第 100 位數字是________，第 200 位數字是________。

解

7 下列哪些數字可以化成無限循環小數？________

(A) $\dfrac{27}{8}$　(B) $\dfrac{8}{27}$　(C) $\dfrac{25}{70}$　(D) $\dfrac{15}{12}$　(E) $\sqrt{2}$

解

1 無理數 $\sqrt{50+\sqrt{1230}}$ 約在下列哪個範圍內？________

(A) 5 與 6 之間　(B) 6 與 7 之間　(C) 7 與 8 之間　(D) 8 與 9 之間　(E) 9 與 10 之間

解

2 化簡：

(1) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=$ ________　(2) $\dfrac{15}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}=$ ________　(3) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$ ________。

解

3 計算下列各式：(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{100}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{102}=$ ________。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\dfrac{6}{\sqrt{10}+\sqrt{16}}=$ ________。

解

4 滿足 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{100}$ 的最小正整數 $n=$ ________。（提示：將分子有理化）

解

5 化簡：(1) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=$ ________　(2) $\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}=$ ________。

解

6 若 a、b 為有理數且 $\sqrt{a+15\sqrt{2}}=5+b\sqrt{2}$，則 $a=$ ________，$b=$ ________。

解

7 若 a 的小數部分為 b，且 $a^2+b=15$，則 $a=$ ________，$b=$ ________。

解

1 下列有關有理數、無理數的推論，哪些是正確的？________

(A)若 a 為有理數，則 a^2 必為有理數　(B)若 a 為無理數，則 a^2 必為無理數

(C)若 a^2 為無理數，則 a 必為無理數　(D)若 $a+b$、$b+c$、$c+a$ 為有理數，則 a 必為有理數

(E)若 ab、bc、ca 為有理數，則 a 必為有理數

解

2 若 x、y 為有理數，且 $(x+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=6-y\sqrt{3}$，則數對 $(x,y)=$ ________。

解

3 若 $2\le x\le 5$，則：

(1) x^2-6x 範圍為________　(2) $\dfrac{1}{x}$ 範圍為________　(3) $\dfrac{1}{x-4}$ 範圍為________（$x\ne 4$）。

解

4 所有滿足 $ab=60$ 的正數 a 與 b，在 $a=$ ________且 $b=$ ________時，$3a+5b$ 會有最小值為________。

解

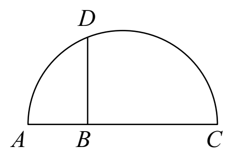
5 已知實數 a 與 b 滿足 $9a^2+16b^2=32$，求乘積 ab 的最大值為________，最小值為________。

解

6 設 x 為正數，求 $f(x)=49x+\dfrac{9}{x}$ 的最小值為________，此時 $x=$ ________。

解

7 如右圖，A、B、C 三點共線，已知 $\overline{AB}=3+\sqrt{2}$，$\overline{BC}=5+3\sqrt{2}$，若以 $\overline{AC}$ 為直徑作一半圓，過 B 作 $\overline{AC}$ 的垂線交半圓於 D，則 $\overline{BD}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，其中 x 與 y 為正整數且 $x<y$，求數對 $(x,y)=$ ________。



解

第 1 回

1. (1) 原式 $=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

   (2) 原式 $=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=(x+2y)^3$

2. 由 $a^2+6ab+b^2=0$ 知 $a^2+b^2=-6ab$

   所求 $=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^3}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}$

   $=\dfrac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-2ab}=\dfrac{-6ab+ab}{-6ab-2ab}=\dfrac{-5ab}{-8ab}=\dfrac{5}{8}$

3. 即 $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3<x^3+y^3$

   $\Rightarrow\quad 3x^2y+3xy^2<0\quad\Rightarrow\quad xy(x+y)<0$

   $\therefore$ x、y 不可全為正數，可均負或一正一負

   且若一正一負，則必須 $x+y>0$ 才可

   (A)○　(B)×　(C)○　(D)○　(E)×

   故選(A)(C)(D)

4. ① $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=49\quad\Rightarrow\quad ab=(49-39)\cdot\dfrac{1}{2}=5$

   ② $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=7(39-5)=238$

5. ① $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=4\quad\Rightarrow\quad a^2+b^2=4+2ab=6$

   ② $(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2\quad\Rightarrow\quad 36=a^4+b^4+2$

   $\Rightarrow\quad a^4+b^4=34$

   ③ $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3$

   $=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)=6(34-1)=198$

6. ① $(x-\dfrac{1}{x})^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=16\quad\Rightarrow\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=18$

   ② $x^3-\dfrac{1}{x^3}=(x-\dfrac{1}{x})(x^2+1+\dfrac{1}{x^2})=4(18+1)=76$

   ③ $(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2=x^4+\dfrac{1}{x^4}+2=18^2\quad\Rightarrow\quad x^4+\dfrac{1}{x^4}=324-2=322$

7. ① $(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2=x^4+\dfrac{1}{x^4}+2=47+2=49$

   $\Rightarrow\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$（因 $x^2>0$，不用加 $\pm$）

   ② $(x+\dfrac{1}{x})^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=7+2=9\quad\Rightarrow\quad x+\dfrac{1}{x}=\pm 3$

第 2 回

1. 所求 $=\dfrac{42\cdot41\cdot40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}\times\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}$

   $=\dfrac{42\cdot41\cdot40}{9\cdot8\cdot7}\times\dfrac{2\cdot1}{35}=\dfrac{164}{21}$

2. 所求 $=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})\times\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})\times\dfrac{1}{2}+\cdots+(\dfrac{1}{23}-\dfrac{1}{25})\times\dfrac{1}{2}$

   $=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{23}-\dfrac{1}{25})$

   $=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{25})=\dfrac{12}{25}$

3. $0.235\le\dfrac{n}{315}<0.245\quad\Rightarrow\quad 0.235\times315\le n<0.245\times315$

   $\Rightarrow\quad 74.025\le n<77.175$

   $\therefore n=\cancel{75}$ 或 76 或 $\cancel{77}$（$\because n$ 與 315 互質），故分數為 $\dfrac{76}{315}$

4. (1) $0.\overline{25}=\dfrac{25}{99}$　(2) $1.3\overline{24}=\dfrac{1324-13}{990}=\dfrac{1311}{990}=\dfrac{437}{330}$

   (3) $3.21\overline{5}=\dfrac{3215-321}{900}=\dfrac{2894}{900}=\dfrac{1447}{450}$

5. 原式 $=\sqrt{\dfrac{17-1}{9}}\times\sqrt{\dfrac{77-7}{9}+\dfrac{88-8}{9}}=\sqrt{\dfrac{16}{9}}\times\sqrt{\dfrac{150}{9}}$

   $=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{3}=\dfrac{20\sqrt{6}}{9}$

6. $\dfrac{5129}{3330}\underset{\text{上下同乘 3}}{\overset{\uparrow}{=}}\dfrac{15387}{9990}=\dfrac{15402-15}{9990}=1.5\overline{402}=1.5402402402\cdots$

   所以小數點後第 3、6、9、⋯、99、⋯、198 位數字均為 0

   $\therefore$ 第 100 位數字為 2，第 200 位數字為 4

7. (A)×；$\dfrac{27}{8}=3.375$ 為有限小數

   (B)○；為循環小數（分母有 3）

   (C)○；為循環小數（分母有 7）

   (D)×；約分成為 $\dfrac{5}{4}=1.25$ 為有限小數

   (E)×；為無限不循環小數

   故選(B)(C)

第 3 回

1. $\because 35^2=1225$，$36^2=1296$

   $\therefore 35<\sqrt{1230}<36$，則 $\sqrt{50+\sqrt{1230}}$ 在 $\sqrt{85}$ ～ $\sqrt{86}$ 之間

   $\because 9^2=81$，$10^2=100$　$\therefore 9<\sqrt{50+\sqrt{1230}}<10$，選(E)

2. (1) 原式 $=\dfrac{(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{3\sqrt{2}-3-2+\sqrt{2}}{2-1}=-5+4\sqrt{2}$

   (2) 原式 $=\dfrac{15(2\sqrt{3}-\sqrt{7})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})(2\sqrt{3}-\sqrt{7})}=\dfrac{15(2\sqrt{3}-\sqrt{7})}{12-7}$

   $=6\sqrt{3}-3\sqrt{7}$

   (3) 原式 $=\dfrac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\dfrac{10(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

   $=2(\sqrt{5}+\sqrt{3})+5(\sqrt{5}-\sqrt{3})=7\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

3. (1) 原式 $=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{100}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{100}](\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

   $=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^{100}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

   $=1^{100}\cdot(3-2\sqrt{6}+2)=5-2\sqrt{6}$

   (2) 原式 $=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{1}+\dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}+\dfrac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{3}+\dfrac{6(\sqrt{16}-\sqrt{10})}{6}$

   $=\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{4}+\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}}+\cancel{\sqrt{10}}-\cancel{\sqrt{7}}+\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{10}}$

   $=-2+4=2$

4. $\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{100}$

   即 $100<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$　$\therefore$ 最小的 n 為 2500

5. (1) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{11-2\sqrt{28}}=\sqrt{(7+4)-2\sqrt{7\times4}}$

   $=\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{7}-2$

   (2) 原式 $=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

   $=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

6. 兩邊平方得 $a+15\sqrt{2}=25+10b\sqrt{2}+2b^2$

   $\because$ a、b 為有理數　$\therefore a=25+2b^2$ 且 $15=10b$

   得 $b=\dfrac{3}{2}$ 且 $a=25+2\times\dfrac{9}{4}=\dfrac{59}{2}$

7. $\because 0\le b<1$　$\therefore a^2\approx 14.\cdots$

   $\Rightarrow\quad a=3+b$，得 $a^2+b=(3+b)^2+b=b^2+7b+9=15$

$\therefore b^2+7b-6=0$

$\Rightarrow\ b=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+24}}{2}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{73}-7}{2}$（約為 0.77）

則 $a=3+b=3+\dfrac{\sqrt{73}-7}{2}=\dfrac{\sqrt{73}-1}{2}$

第 4 回

1.(A)○　(B)×；反例：$a=\sqrt{2}$

(C)○；與(A)的意思相同

(D)○；$a+b+c=\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{2}$ 為有理數

$\therefore a=(a+b+c)-(b+c)$ 為有理數

(E)×；反例：$a=b=c=\sqrt{2}$

∴選(A)(C)(D)

2.乘開得 $2x-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}-6=6-y\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ (2x-6)+(4-x)\sqrt{3}=6-y\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ 2x-6=6$ 且 $4-x=-y$　$\therefore x=6$，$y=2$

3.(1) $x^2-6x=x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9$

$\because 2\le x\le 5$　$\therefore -1\le x-3\le 2$，則 $0\le(x-3)^2\le 4$

得 $-9\le(x-3)^2-9\le -5$，即 $-9\le x^2-6x\le -5$

(2) $2\le x\le 5$，即 $\begin{cases}2\le x\\x\le 5\end{cases}$，故 $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{2}$

(3) $\because 2\le x\le 5$　$\therefore -2\le x-4\le 1$

①若 $-2\le x-4<0$，則 $\dfrac{1}{x-4}\le-\dfrac{1}{2}$

②若 $0<x-4\le 1$，則 $1\le\dfrac{1}{x-4}$

由①②知 $\dfrac{1}{x-4}\le-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{x-4}\ge 1$

4.由算幾不等式知 $\dfrac{3a+5b}{2}\ge\sqrt{3a\cdot 5b}=\sqrt{15\times 60}=30$

$\therefore 3a+5b\ge 60$，在 $3a=5b=30$ 時，即 $a=10$ 且 $b=6$ 時

$3a+5b$ 有最小值為 60

5.由算幾不等式知 $\dfrac{9a^2+16b^2}{2}\ge\sqrt{9a^2\cdot 16b^2}$

所以 $\dfrac{32}{2}\ge 12|ab|$，得 $|ab|\le\dfrac{4}{3}$

則 $-\dfrac{4}{3}\le ab\le\dfrac{4}{3}$，得 ab 的最大值為 $\dfrac{4}{3}$，最小值為 $-\dfrac{4}{3}$

6.由算幾不等式知 $\dfrac{49x+\dfrac{9}{x}}{2}\ge\sqrt{49x\cdot\dfrac{9}{x}}=\sqrt{49\times 9}=21$

得 $49x+\dfrac{9}{x}\ge 42$

在 $49x=\dfrac{9}{x}$ 時，即 $x^2=\dfrac{9}{49}$，得 $x=\dfrac{3}{7}$ 使 $f(x)$ 有最小值為 42

7.由「母子相似性質」知

$\overline{BD}^2=\overline{AB}\times\overline{BC}=(3+\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})$

$=15+9\sqrt{2}+5\sqrt{2}+6=21+14\sqrt{2}=21+2\sqrt{98}$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\7+14}}{21}+2\sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\7\times 14}}{98}}}=\sqrt{7}+\sqrt{14}$，得 $x=7$，$y=14$

第 5 回

1.所求 $=(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+5)+(-1+\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{7})+(4-\sqrt{7})=8$

2.$a=\sqrt{(x-\dfrac{4}{x})^2}-\sqrt{(x+\dfrac{4}{x})^2}=\left|x-\dfrac{4}{x}\right|-\left|x+\dfrac{4}{x}\right|$

(1)若 $0<x<2$，則 $\dfrac{4}{x}>2$，得 $a=(-x+\dfrac{4}{x})-(x+\dfrac{4}{x})=-2x$

(2)若 $x<-2$，則 $-2<\dfrac{4}{x}<0$，得 $a=(-x+\dfrac{4}{x})-(-x-\dfrac{4}{x})=\dfrac{8}{x}$

3.x、y、z 不可全正，也不可全負，可二正一負或一正二負

∴ xy、yz、zx 必為「一個為正，兩個為負」

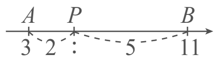
(A)×；可以 $xyz>0$　(B)×；可以 $x+y+z>0$

(C)○　(D)○　(E)×；可為 $xy<0$ 且 $xz<0$ 且 $yz>0$

∴選(C)(D)

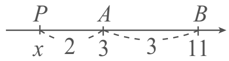
4.①若 P 點在 $\overline{AB}$ 上

則 P 為 $\dfrac{2\cdot 11+5\cdot 3}{2+5}=\dfrac{37}{7}$

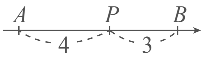


②若 P 點在 $\overline{AB}$ 外，則 $\dfrac{2\cdot 11+3\cdot x}{2+3}=3$

得 $x=-\dfrac{7}{3}$

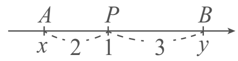


∴ P 為 $\dfrac{37}{7}$ 或 $-\dfrac{7}{3}$

5.


知 $\overline{PA}:\overline{PB}=4:3=12:9$　∴ $\overline{PB}=9$

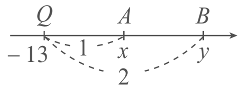
6.P 為 $\dfrac{3x+2y}{5}=1\cdots$①



Q 為 $2x-y=-13\cdots$②

由①②得 $x=-3$，$y=7$

∴ $\overline{AB}=7-(-3)=10$



7.各數均滿足 $\dfrac{ma+nb}{m+n}$ 的形式，所以各點之間的距離比例保持固定，以 $a=0$、$b=1$ 代入各選項，依序為 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{2}{5}$、$-\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{7}{5}$，故最大為(E)，最小為(D)

第 6 回

1.(1) $\left[\begin{array}{l}2x+3=7\text{，得 }x=2\\2x+3=-7\text{，得 }x=-5\end{array}\right.$　$\therefore x=2$ 或 -5

(2) $\left[\begin{array}{l}|x+1|-3=2\ \Rightarrow\ |x+1|=5\\ \qquad\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=5\quad\therefore x=4\\x+1=-5\quad\therefore x=-6\end{array}\right.\\ |x+1|-3=-2\ \Rightarrow\ |x+1|=1\\ \qquad\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=1\quad\therefore x=0\\x+1=-1\quad\therefore x=-2\end{array}\right.\end{array}\right.$

2.即 $3|x+7|=4|2x-1|$，去絕對值得

$\left[\begin{array}{l}3(x+7)=4(2x-1)\text{，得 }25=5x\text{，}x=5\\3(x+7)=-4(2x-1)\text{，得 }11x=-17\text{，}x=-\dfrac{17}{11}\end{array}\right.$

3.①若 $x\ge-2$　$\Rightarrow$　$x+2=2x-7$　$\Rightarrow$　$x=9$，合

②若 $x\le-2$　$\Rightarrow$　$-x-2=2x-7$　$\Rightarrow$　$x=\dfrac{5}{3}$，不合

故此方程式的解為 $x=9$

4.①若 $x\ge 2$　$\Rightarrow$　$(x-1)+(x-2)=3$　$\Rightarrow$　$x=3$，合

②若 $1\le x\le 2$　$\Rightarrow$　$(x-1)+(-x+2)=3$　$\Rightarrow$　$1=3$，無解

③若 $x\le 1$　$\Rightarrow$　$(-x+1)+(-x+2)=3$　$\Rightarrow$　$x=0$，合

$\therefore x=0$ 或 3

5.x 到 $A(-2)$ 與 $B(7)$ 的距離和最小為 $\overline{AB}=7-(-2)=9$

$\therefore k<9$，使 $|x+2|+|x-7|=k$ 無解