



108學年度學科能力測驗數學考科試題分析 / 1

東山高中 李善文 老師



1

108學年度學科能力測驗 / 5

東山高中 李善文 老師

2

107學年度學科能力測驗 / 11

東山高中 李善文 老師



3

106學年度學科能力測驗 / 16

東山高中 李善文 老師

4

105學年度學科能力測驗 / 21

東山高中 李善文 老師



5

104學年度學科能力測驗 / 26

東山高中 李善文 老師

6

103學年度學科能力測驗 / 32

北一女中 任維勇 老師



7

102學年度學科能力測驗 / 37

臺南女中 李以新 老師

8

101學年度學科能力測驗 / 42

臺南女中 李以新 老師



9

100學年度學科能力測驗 / 47

臺中女中 謝宏政 老師

10

99學年度學科能力測驗 / 52

臺中女中 謝宏政 老師



11

98學年度學科能力測驗 / 57

臺南女中 李以新 老師

歷屆學測數學考科參考公式 / 62

108 學年度學科能力測驗數學考科試題分析

東山高中 數學科教師／李善文

壹、試題分析

一、各題出處、中心概念、難易度

題 號	出 題 範 圍	中 心 概 念	難 易 度
單選 1.	第三冊單元二 直線與圓	平行線處處等距、直線與圓的交點個數	中偏易
單選 2.	第一冊單元二 多項式函數	多項式方程式的解	易
單選 3.	第一冊單元一 數與式 第一冊單元三 指數、對數函數	因數分解、指數律、不定方程式的正整數解個數	中偏易
單選 4.	第二冊單元二 排列、組合	重複排列的應用	中偏易
單選 5.	第一冊單元三 指數、對數函數	常用對數、簡易對數方程式的解及次序	中偏易
單選 6.	第二冊單元四 數據分析	相關係數的意義、近於完全負相關之散布圖之點，密集於斜率小於 0 的直線	中偏易
單選 7.	第二冊單元一 數列與級數 第二冊單元四 數據分析	等差數列、算術平均數及等差數列之公差的計算	中
多選 8.	第一冊單元一 數與式 第三冊單元三 平面向量	數線上質點的等速運動與簡易邏輯推理	中
多選 9.	第二冊單元三 機率	古典機率的計算	中偏易
多選 10.	第三冊單元一 三角	銳角三角形之內角的正弦值與餘弦值比較大小、大角對大邊或正弦定理的應用	中
多選 11.	第二冊單元三 機率	古典機率、條件機率的計算	中
多選 12.	第一冊單元二 多項式函數	多項式的除法原理、由已知兩多項式除以某多項式的餘式，求其加、乘運算的餘式	中偏易
多選 13.	第四冊單元二 空間中的平面與直線	過不共線三點的平面之法向量、空間中兩平面的垂直、點與平面的關係、直線與平面的關係的判斷、點到平面的距離	中偏易
選填 A	第四冊單元三 矩陣	矩陣的乘法、解二元一次聯立方程式	中偏易
選填 B	第四冊單元四 二次曲線	橢圓的標準式、橢圓的四個頂點所成菱形的面積的計算	易
選填 C	第一冊單元一 數與式	配合情境利用一次方程式與一次不等式的解處理問題	中
選填 D	第二冊單元二 排列、組合	配合情境的包裝，處理集合元素個數及三集合之交集、聯集的元素個數的關係與計算	中
選填 E	第三冊單元一 三角	三角形之外角定理及餘弦定理的應用	中
選填 F	第四冊單元一 空間向量 第四冊單元二 空間中的平面與直線	正立方體的對角線長、平行平面的距離、空間幾何之位置關係的判斷與推理	中偏易

題 號	出 題 範 圍	中 心 概 念	難易度
選填 G	第三冊單元一 三角 第三冊單元三 平面向量	平面向量之加減運算、係數積、內積與性質及三角之餘弦與正弦、正切的恆等關係（或坐標系的建立、平面向量的坐標表示法及和角公式）的綜合應用	中偏難

二、各冊占分

冊 別	第一冊	第二冊	第三冊	第四冊
配 分	26 分	32 分	22 分	20 分

今年學測試題之分布，若以四冊來論各冊分配上尚稱均衡，較偏重在第二冊，第四冊較少且都是基本題。因為學測命題範圍共有 14 個單元，要從其中命 20 題，必然會有幾題涵蓋兩個單元以上，也藉此提高試題的鑑別度，今年跨章節的題目及刻意包裝的所謂素養試題較往年多，但均不難，可能是配合新課綱的趨勢。

三、題型分配

學測題型有單選、多選及選填三種，總題數為 20 題，每題 5 分，共 100 分。每年各類型題數略有不同，最近幾年單選、多選之題數互有多寡或相等，但總共題數不超過 13 題，而選填題數大多為 7 或 8 題。今年三種題型之題數非常相近，分別為單選 6 題、多選 7 題、選填 7 題。

四、難易度分析

難易度	題 號	題 數	占 分	比 例
易	單選 2、選填 B	2	10	10%
中偏易	單選 1、3、4、5、6、多選 9、12、13、選填 A、F	10	50	50%
中	多選 7、8、10、11、選填 C、D、E	7	35	35%
中偏難	選填 G	1	5	5%

筆者認為今年學測試題是近十幾年來最簡單的一年，比去年及 103 年還要簡單，完全沒有難題，大多為中及中偏易的試題，雖然有些題目刻意包裝（如單選 4、多選 8、11 及選填 C、D），但都著重在觀念及解釋題目的能力，並沒有繁雜的計算。另外，利用超商每日平均售出的咖啡數量與當天的平均氣溫之相關程度及部分記錄，來判斷給定某日平均氣溫時其售出的咖啡數量、健康檢查大腸癌篩選、公投時事……等情境入題，與新課綱結合，讓學生對數學有感，較大考中心日前公布的「素養試題」類似，但更平易近人，考驗學生的閱讀分析及生活觀察能力，對中等程度的同學最為有利。試題雖簡單，但不當心也很可能錯失該得的分數，所以程度好的同學也許覺得試題做的很順，並以為自己考得很好，一對答案才知自己考得比學校較難的模擬考還差。

今年試題中，多選題的答案幾乎都是二個選項，只有一題是三個選項，是歷年來多選題最簡單的，只有多選 11 題要有耐心看懂題目。今年中上程度的考生應會考得很好，拿滿分的同學應比去年更多，所以成績前百分之一的學生（大約 1380 人）之平均分數應非常接近 100 分，也就是說成績仍然要 94 分以上才會得 15 級分。筆者認為底標及後標與去年差不多；均標與前標應皆較去年多 1 至 2 級分，而頂標為 14 級分。今年學測試題對平常不願思考、不求理解、只靠記憶的同學，與觀念清晰的同學應還是有一定的鑑別度，但對中上程度與程度好的同學來說鑑別度可能不高。

貳、特殊試題分析

- 一、【單選 4】此題是有點刻意包裝的情境題，不需要深入的數學知識，只要理解題目的條件及重複排列的概念，又因為是單選題，所以此題答對率應該很高，而且沒什麼鑑別度。
- 二、【多選 10】此題評量銳角之正弦、餘弦值隨角度之增加變大或變小及對同一銳角之兩者大小關係、三角形之大角對大邊，小角對小邊等基本概念，是非常好的基礎題，許多同學可能輕忽而沒有完全做對。
- 三、【多選 11】此題與大考中心日前公布的「素養試題」類似，但各選項所問的問題都是簡易的機率、比率及其應用問題，只要耐心看懂題目，應該不難答對，可鑑別學生的耐性與閱讀能力。
- 四、【選填 G】此題是今年比較難的試題，是平面向量之加減運算、係數積、內積與性質及三角之餘弦與正弦、正切的恆等關係（或坐標系的建立、平面向量的坐標表示法及和角公式）之綜合應用，是非常好的試題。但所問的是鈍角的正切值，有些中上程度的同學只要用尺量 \overline{BD} 是 \overline{OA} 的幾倍（ O 是 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交點），就猜對答案，若改問 $\cos \angle BAD$ ，就更有鑑別度了。

參、其他分析與應考對策

近幾年試題的趨勢，有簡單且穩定的趨勢，著重閱讀與理解的能力，大多數試題為綜合各概念之連結，雖有包裝，但只要平常多思考徹底了解、觀念清楚，就會覺得親切而快速的想到解題方法，所以將課本讀熟、確實掌握基本觀念是上策。下面提供一些針對不同程度的同學之老生常談但確實有效的應考策略：

一、對於程度較差的同學

1. 收集近十年的學測、指考乙試題，刪除過時的章節試題，將其餘題目回歸課本各章節的觀念、定理，配合上述的分類，將同系列的這些定理的敘述、使用時機確實掌握清楚，多做幾次相關的課本範例、隨堂練習與習題。
2. 務必捨棄冷門的、繁雜的、特殊技巧的題型，坊間一般的總複習講義多半選了較多的題型，對程度差的同學毫無助益。
3. 想要進步，在數學上該花的時間是不能少的，數學程度之所以差，就是因為之前沒有深入理解且練習太少所導致，把應該還給數學的練習時間還了，數學才可能有起色。

二、對於程度中等的同學，應把學測目標定在前標甚至頂標

1. 先把課本的公式、定理弄清楚並記牢使用條件，至於證明則量力而為。
2. 除了坊間新版的參考書之外，也可以配合近五年的學測及指考數乙試題做練習，刪除舊課綱的部分，剩下的題目對於自身程度的增長仍頗有助益。
3. 每章節複習完要做模擬試題檢驗複習成效，較理想的進度是一章花一週半複習，四冊共十四章，複習完一輪大約五個月，最後一個月做總複習衝刺。
4. 所有考卷錯誤都要詳細檢討、訂正，最好能準備一本筆記專門整理以往做錯的題目，考前短短幾十分鐘看這最有效。

三、對於程度優等的同學，基本都有前標水準，應保持水準並往頂標甚至滿級分邁進

1. 總複習時請把課本中的證明自行演算一次，不單是為了學測，也是為了往後大學的學習方式做準備。

2. 觀念弄清之後，可收集近十年的大學學測及指考甲試題做練習，對於做不出來的題目，請多花心思去想相關定理，而非直接翻閱解答，這是最差的學習方式。
3. 每週要安排模擬試題做檢測，程度優秀的同學應該有能力做到一週複習一章，大約三到四個月可以複習完一輪。
4. 做大範圍的模擬試題或考古題作為最後衝刺。因為範圍大，所以不是重點的部分就不會出現。做愈多的考題（注意：自己做而不是看解答做）就是幫自己複習愈多次，關鍵時刻才不會忘記。

肆、結論

數學思考可分為下述階段：

1. 進入階段 (*Entry*)
 - (1) 已知是什麼？
 - (2) 所求是什麼？
 - (3) 能引入些什麼？
2. 攻擊階段 (*Attack*)
 - (1) 猜想 (*Guess*)
 - (2) 試試看 (*Try*): 特殊化、一般化
 - (3) 卡住了! *What can I do about it?*
 - (4) *AHA!* (想到時發出的高興嘆語)
 - (5) 證明和說服
3. 回顧階段 (*Review*)
 - (1) 檢查 (*Check*)
 - (2) 反思 (*Reflect*)
 - (3) 推廣 (*Extend*)

數學的學習之路，沒有一步登天的技巧，你付出的愈多，收穫才會愈多。誠實面對自己的問題，尋求解決之道，不要輕易的放棄，程度的提升不是立竿見影的，或許有時候覺得花了時間卻沒有成效，甚至成績更差，但實際上比以前有想法會思考及推理而不自知，若能對自己有信心並持續努力，一旦達到相當水準，厚積而薄發，成績一定會突飛猛進。

1

108 學年度學科能力測驗

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- _____ 1. 點 $A(1, 0)$ 在單位圓 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ 上。試問： Γ 上除了 A 點以外，還有幾個點到直線 $L: y = 2x$ 的距離，等於 A 點到 L 的距離？
 (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 0 個
- _____ 2. 下列哪一個選項是方程式 $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ 的解？（註： $i = \sqrt{-1}$ ）
 (A) $-2i$ (B) $-i$ (C) i (D) 2 (E) 4
- _____ 3. 試問共有多少組正整數 (k, m, n) 滿足 $2^k 4^m 8^n = 512$ ？
 (A) 1 組 (B) 2 組 (C) 3 組 (D) 4 組 (E) 0 組
- _____ 4. 廚師買了豬、雞、牛三種肉類食材以及白菜、豆腐、香菇三種素類食材。若廚師想用完這六種食材作三道菜，每道菜可以只用一種食材或用多種食材，但每種食材只能使用一次，且每道菜一定要有肉，試問食材的分配共有幾種方法？
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 18 (E) 27
- _____ 5. 設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7$ 。試選出正確的選項。
 (A) $1 \leq b \leq \sqrt{10}$ (B) $\sqrt{10} \leq b \leq 10$ (C) $10 \leq b \leq 10\sqrt{10}$
 (D) $10\sqrt{10} \leq b \leq 100$ (E) $100 \leq b \leq 100\sqrt{10}$

6. 某超商依據過去的銷售紀錄，冬天平均氣溫在 6°C 到 24°C 時，每日平均售出的咖啡數量與當天的平均氣溫之相關係數為 -0.99 ，部分紀錄如下表。

平均氣溫 ($^{\circ}\text{C}$)	11	13	15	17	19	21
平均售出量 (杯)	512	437	361	279	203	135

某日平均氣溫為 8°C ，依據上述資訊推測，試問該日賣出的咖啡數量應接近下列哪一個選項？

- (A) 570 杯 (B) 625 杯 (C) 700 杯 (D) 755 杯 (E) 800 杯

二、多選題 (占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設各項都是實數的等差數列 a_1, a_2, a_3, \dots 之公差為正實數 α 。試選出正確的選項。

- (A) 若 $b_n = -a_n$ ，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$
 (B) 若 $c_n = a_n^2$ ，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$
 (C) 若 $d_n = a_n + a_{n+1}$ ，則 d_1, d_2, d_3, \dots 是公差為 α 的等差數列
 (D) 若 $e_n = a_n + n$ ，則 e_1, e_2, e_3, \dots 是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列
 (E) 若 f_n 為 a_1, a_2, \dots, a_n 的算術平均數，則 f_1, f_2, f_3, \dots 是公差為 α 的等差數列

8. 在數線上，甲從點 -8 開始做等速運動，同時乙也從點 10 開始做等速運動，乙移動的速率是甲的 a 倍，且 $a > 1$ 。試選出正確的選項。

- (A) 若甲朝負向移動而乙朝正向移動，則他們會相遇
 (B) 若甲朝負向移動且乙朝負向移動，則他們不會相遇
 (C) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，則乙先到達原點 0
 (D) 若甲朝正向移動且乙朝正向移動，則他們之間的距離會愈來愈大
 (E) 若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點 -2 相遇，則 $a = 2$

_____ 9. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 這七個數字中隨機任取兩數。試選出正確的選項。

- (A) 其和大於 10 的機率為 $\frac{1}{7}$ (B) 其和小於 5 的機率為 $\frac{1}{7}$
 (C) 其和為奇數的機率為 $\frac{4}{7}$ (D) 其差為偶數的機率為 $\frac{5}{7}$
 (E) 其積為奇數的機率為 $\frac{2}{7}$

_____ 10. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $50^\circ \leq \angle A < \angle B \leq 60^\circ$ 。試選出正確的選項。

- (A) $\sin A < \sin B$ (B) $\sin B < \sin C$ (C) $\cos A < \cos B$ (D) $\sin C < \cos C$ (E) $\overline{AB} < \overline{BC}$

_____ 11. 某地區衛生機構成功訪問了 500 人，其中年齡為 50 – 59 歲及 60 歲（含）以上者分別有 220 名及 280 名。這 500 名受訪者中，120 名曾做過大腸癌篩檢，其中有 75 名是在一年之前做的，有 45 名是在一年之內做的。已知受訪者中，60 歲（含）以上者曾做過大腸癌篩檢比率是 50 – 59 歲者曾做過大腸癌篩檢比率的 3.5 倍。試選出正確的選項。

- (A) 受訪者中年齡為 60 歲（含）以上者超過 60%
 (B) 由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在 50 – 59 歲間的機率大於 0.25
 (C) 由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一年之前受檢的機率為 $2 \cdot \left(\frac{45}{120}\right) \left(\frac{75}{119}\right)$
 (D) 這 500 名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率低於 75%
 (E) 受訪者中 60 歲（含）以上者，曾做過大腸癌篩檢的人數超過 90 名

_____ 12. 設 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 為實係數三次多項式， $g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x)$ 、 $r_2(x)$ 。試選出正確的選項。

- (A) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$
 (B) $f_1(x) + f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x) + r_2(x)$
 (C) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$
 (D) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $-\frac{1}{3}r_1(x)$
 (E) $f_1(x)r_2(x) - f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

- _____ 13. 坐標空間中有一平面 P 過 $(0,0,0)$ 、 $(1,2,3)$ 及 $(-1,2,3)$ 三點。試選出正確的選項。
- (A) 向量 $(0,3,2)$ 與平面 P 垂直
 (B) 平面 P 與 xy 平面垂直
 (C) 點 $(0,4,6)$ 在平面 P 上
 (D) 平面 P 包含 x 軸
 (E) 點 $(1,1,1)$ 到平面 P 的距離是 1

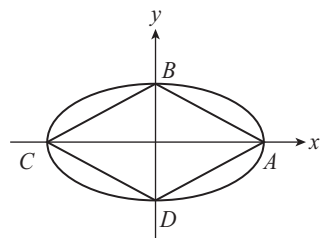
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（⑭～⑳）
 2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

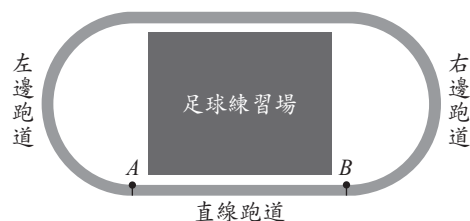
A. 設 x 、 y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ ，則 $x + 3y =$ ⑭⑮。

B. 如右圖（此為示意圖）， A 、 B 、 C 、 D 是橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的頂點。若四邊形

$ABCD$ 的面積為 58，則 $a =$ ⑰⑱。（化為最簡分數）

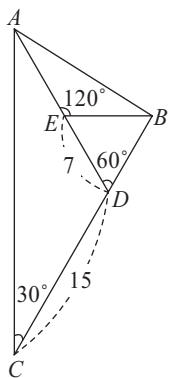


C. 某高中已有一個長 90 公尺、寬 60 公尺的足球練習場。若想要在足球練習場的外圍鋪設內圈總長度為 400 公尺的跑道，跑道規格為左右兩側各是直徑相同的半圓，而中間是上下各一條的直線跑道，直線跑道與足球練習場的長邊平行（如示意圖）。則圖中一條直線跑道 \overline{AB} 長度的最大可能整數值為 ⑲⑳㉑ 公尺。



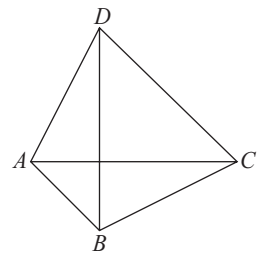
D. 某次選舉中進行甲、乙、丙三項公投案，每項公投案一張選票，投票人可選擇領或不領。投票結束後清點某投票所的選票，發現甲案有 765 人領票、乙案有 537 人領票、丙案有 648 人領票，同時領甲、乙、丙三案公投票的有 224 人，並且每個人都至少領了兩張公投票。根據以上資訊，可知同時領甲、乙兩案但沒有領丙案公投票者共有 ②②③④ 人。

E. 如右圖（此為示意圖），在 $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 交 \overline{BC} 於 D 點， \overline{BE} 交 \overline{AD} 於 E 點，且 $\angle ACB = 30^\circ$ ， $\angle EDB = 60^\circ$ ， $\angle AEB = 120^\circ$ 。若 $\overline{CD} = 15$ ， $\overline{ED} = 7$ ，則 $\overline{AB} =$ ②⑤⑥。



F. 坐標空間中，考慮有一個頂點在平面 $z = 0$ 上、且有另一個頂點在平面 $z = 6$ 上的正立方體。則滿足前述條件的正立方體之邊長最小可能值為 ②⑦ $\sqrt{②⑧}$ 。（化成最簡根式）

G. 如右圖（此為示意圖）， A 、 B 、 C 、 D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ， \overrightarrow{AC} 、 \overrightarrow{BD} 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan \angle BAD =$ ②⑨③⑩。



- ☺ 頂標 (14級) 100 ~86.7分
- ☺ 前標 (12級) 86.6~73.4分
- ☺ 均標 (9級) 73.3~53.4分
- ☺ 後標 (5級) 53.3~26.7分
- ☺ 底標 (4級) 26.6~20.0分

題號 / 關鍵字 / 出處

1. 直線與圓的交點個數
第三冊單元二 直線與圓
2. 多項式方程式的解
第一冊單元二 多項式函數
3. 因數分解、指數律
第一冊單元一 數與式
第一冊單元三 指數、對數函數
4. 重複排列的應用
第二冊單元二 排列、組合
5. 常用對數、簡易對數方程式的解
第一冊單元三 指數、對數函數
6. 相關係數的意義
第二冊單元四 數據分析
7. 等差數列公差的計算
第二冊單元一 數列與級數
第二冊單元四 數據分析
8. 數線上質點的等速運動與邏輯推理
第一冊單元一 數與式
第三冊單元三 平面向量
9. 古典機率的計算
第二冊單元三 機率
10. 銳角的正弦值與餘弦值的比較大小
第三冊單元一 三角
11. 古典機率、條件機率的計算
第二冊單元三 機率
12. 多項式除法原理
第一冊單元二 多項式函數
13. 空間中點、直線與平面關係的判斷
第四冊單元二 空間中的平面與直線
 - A. 矩陣的乘法
第四冊單元三 矩陣
 - B. 橢圓的標準式
第四冊單元四 二次曲線
 - C. 利用一次方程式與不等式處理問題
第一冊單元一 數與式
 - D. 三集合之交集、聯集元素個數的計算
第二冊單元二 排列、組合
 - E. 三角形之外角定理及餘弦定理的應用
第三冊單元一 三角
 - F. 空間幾何之位置關係的判斷與推理
第四冊單元一 空間向量
第四冊單元二 空間中的平面與直線
 - G. 建立坐標系、平面向量的坐標表示法
第三冊單元一 三角
第三冊單元三 平面向量

(D)○；若甲朝正向移動且乙朝正向移動， P_t 與 Q_t 的距離為 $10 + avt - (-8 + vt) = 18 + (a-1)vt$ ，隨 t 之變大而變大，所以他們之間的距離會愈來愈大

(E)○；若甲朝正向移動而乙朝負向移動，且他們在點 -8 相遇，則 $-8 + vt = -2 = 10 - avt$ ，得 $a = 2$

故選(D)(E)

9. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 這七個數字中隨機任取兩數，樣本空間的樣本點個數為 $C_2^7 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$

(A)×；其和大於 10 者有 (4, 7)、(5, 6)、(5, 7)、(6, 7) 共 4 組，所以其和大於 10 的機率為 $\frac{4}{21}$

(B)×；其和小於 5 者有 (1, 2)、(1, 3) 共 2 組，所以其和小於 5 的機率為 $\frac{2}{21}$

(C)○；其和為奇數表示取到一奇數一偶數，有 $C_1^4 \cdot C_1^3 = 12$ 組，所以其和為奇數的機率為 $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

(D)×；其差為偶數表示取到兩奇數或兩偶數

有 $C_2^4 + C_2^3 = 6 + 3 = 9$ 組，所以其差為偶數的機率為 $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

(E)○；其積為奇數表示取到兩奇數，有 $C_2^4 = 6$ 組，所以其積為奇數的機率為 $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

故選(C)(E)

10. 因為 $\triangle ABC$ 中，已知 $50^\circ \leq \angle A < \angle B \leq 60^\circ$

得 $100^\circ < \angle A + \angle B < 120^\circ$ ，又 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

所以得 $60^\circ < \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) < 80^\circ$

於是得知 $50^\circ \leq \angle A < \angle B \leq 60^\circ < \angle C < 80^\circ$

由定義知：當 θ 為銳角時， θ 愈大，則 $\sin \theta$ 愈大而 $\cos \theta$ 愈小；當 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ 時， $\sin \theta > \cos \theta$

(A)○；因為 $50^\circ \leq \angle A < \angle B \leq 60^\circ$ ，所以 $\sin A < \sin B$

(B)○；因為 $50^\circ < \angle B < \angle C < 80^\circ$ ，所以 $\sin B < \sin C$

(C)×；因為 $50^\circ \leq \angle A < \angle B \leq 60^\circ$ ，所以 $\cos A > \cos B$

(D)×；因為 $60^\circ < \angle C < 80^\circ$ ，所以 $\cos C < \sin C$

(E)×；因為三角形中，大角對大邊，小角對小邊

今 $50^\circ \leq \angle A < \angle C < 80^\circ$ ，所以 $\overline{AB} > \overline{BC}$

(或由正弦定理知： $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}$ ，而由

$50^\circ \leq \angle A < \angle C < 80^\circ$ 得知 $\sin A < \sin C$ ，所以 $\overline{AB} > \overline{BC}$)

故選(A)(B)

11. (A)×；由已知得受訪者中年齡為 60 歲（含）以上者所佔百分比為 $\frac{280}{500} = 56\% < 60\%$

(B)×；由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在 50 - 59 歲間的機率為

$$\frac{C_2^{220}}{C_2^{500}} = \frac{110 \times 219}{250 \times 499} = \frac{110}{250} \times \frac{219}{499} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

(C)○；由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一年之前受檢的機率

$$\text{為 } \frac{C_1^{45} \cdot C_1^{75}}{C_2^{120}} = \frac{45 \cdot 75}{\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 119} = 2 \cdot \left(\frac{45}{120}\right) \cdot \left(\frac{75}{119}\right)$$

(D)×；這 500 名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率為

$$1 - \frac{120}{500} = \frac{38}{50} = 76\% > 75\%$$

(E)○；設受訪者中 60 歲（含）以上者，曾做過大腸癌篩檢的

$$\text{人數為 } n, \text{ 由已知得 } \frac{n}{280} = \frac{120-n}{220} \times 3.5$$

$$\text{得 } 11n = (120-n) \times 14 \times 3.5, \text{ 得 } 11n = 120 \times 49 - 49n$$

$$\text{即 } 60n = 120 \times 49, \text{ 所以 } n = 98 > 90$$

故選(C)(E)

12. 因為 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 均為實係數三次多項式， $g(x)$ 為實係數二次多項式，又已知 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x)$ 、 $r_2(x)$ ，由除法原理可得

$$f_1(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \quad f_2(x) = g(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$$

其中 $r_1(x) = a_1x + b_1$ ， $r_2(x) = a_2x + b_2$ 均為實係數多項式

(A)○； $-f_1(x) = g(x) \cdot [-q_1(x) - r_1(x)]$ ，而 $-r_1(x) = -a_1x - b_1$ 為零多項式或一次多項式，所以 $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$

(B)○； $f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot [q_1(x) + q_2(x)] + r_1(x) + r_2(x)$ ，且 $r_1(x) + r_2(x) = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)$ 而 $r_1(x) + r_2(x) = 0$ 或 $\deg[r_1(x) + r_2(x)] = 1 < 2$ ，所以 $f_1(x) + f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x) + r_2(x)$

(C)×； $f_1(x)f_2(x) = [g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)][g(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)] = g(x)[g(x)q_1(x)q_2(x) + q_1(x)r_2(x) + q_2(x)r_1(x)] + r_1(x)r_2(x)$ 而 $\deg[r_1(x)r_2(x)]$ 可能等於 2，所以 $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為應為 $r_1(x)r_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式

(D)×； $f_1(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) = -3g(x) \cdot \frac{-1}{3}q_1(x) + r_1(x)$ $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式仍為 $r_1(x)$

(E)○； $f_1(x)r_2(x) - f_2(x)r_1(x) = [g(x)q_1(x)r_2(x) + r_1(x)r_2(x)] - [g(x)q_2(x)r_1(x) + r_1(x)r_2(x)] = g(x)[q_1(x)r_2(x) - q_2(x)r_1(x)]$ 所以 $f_1(x)r_2(x) - f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

故選(A)(B)(E)

13. 令 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(-1, 2, 3)$

$$\text{則 } \overrightarrow{OA} = (1, 2, 3), \quad \overrightarrow{OB} = (-1, 2, 3)$$

$$\text{則 } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -6, 4)$$

為過 O 、 A 、 B 三點之平面 P 之一法向量

由點法式知平面 P 之方程式為 $0x - 6y + 4z = 0$ ，即 $3y - 2z = 0$

(A)×；向量 $(0, 3, 2)$ 與 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (0, -6, 4)$ 不平行，所以向量 $(0, 3, 2)$ 與平面 P 不垂直，直接由

$$(0, 3, 2) \cdot (1, 2, 3) = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12 \neq 0$$

得知向量 $(0, 3, 2)$ 與平面 P 不垂直

(B)×； xy 平面一法向量為 $(0, 0, 1)$

而 $(0, -6, 4) \cdot (0, 0, 1) = 4 \neq 0$ ，所以平面 P 與 xy 平面不垂直

(C)○；點 $(0, 4, 6)$ 滿足 $3y - 2z = 0$ ，所以點 $(0, 4, 6)$ 在平面 P 上

(D)○；因為 x 軸上的任一點 $(a, 0, 0)$ 皆滿足 $3y - 2z = 0$ ，所以平面 P 包含 x 軸

(E)×；點 $(1, 1, 1)$ 到平面 P 的距離為 $\frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

故選(C)(D)

第貳部分：選填題

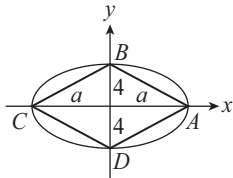
A. 因為 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$, 得 $\begin{bmatrix} 3x-y+3 \\ 2x+4y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

即 $\begin{cases} 3x-y+3=6 \\ 2x+4y-1=-6 \end{cases}$, 亦即 $\begin{cases} 3x-y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{-3}{2} \end{cases}$, 所以 $x+3y=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-4$

B. 由已知得 $A(a, 0)$ 、 $C(-a, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 、 $D(0, -4)$, 所以 $\overline{AC}=2a$, $\overline{BD}=8$, 又已知四邊形的面積為 58, 所以

$$\frac{2a \times 8}{2} = 58, \text{ 得 } a = \frac{29}{4}$$



C. 設直線跑道 $\overline{AB}=x$ (公尺), 左右兩側之相同的半圓之半徑為 r 公尺, 則由已知得 $2r > 60$, 且 $2\pi r + 2x = 400$, 於是得

$$x = 200 - \pi r < 200 - 30\pi \approx 200 - 94.2 = 105.8$$

所以直線跑道 \overline{AB} 長度的最大可能值為 105 公尺

D. 設此次選舉中, 甲案、乙案與丙案選票皆領者有 t 人, 恰領甲案及乙案兩種選票者有 x 人, 恰領乙案及丙案兩種選票者有 y 人, 恰領甲案及丙案兩種選票者有 z 人, 由已知得

$$x+z+t=765, x+y+t=537, y+z+t=648, t=224$$

$$\text{所以 } x+y=537-224=313, x-y=765-648=117$$

$$\text{解得 } x = \frac{313+117}{2} = 215, \text{ 故知同時領甲案、乙案但沒有領}$$

丙案公投票者共有 215 人

E. 由已知及外角定理可得

$$\angle DAC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ, \angle EBD = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\text{所以得 } \overline{EB} = \overline{ED} = 7$$

且 $\overline{AE} + 7 = \overline{AE} + \overline{ED} = \overline{DA} = \overline{DC} = 15$, 於是知道 $\overline{EA} = 8$, 在 $\triangle AED$ 中, 因為 $\overline{EA} = 8$, $\overline{EB} = 7$, $\angle AED = 120^\circ$, 由餘弦定理得

$$\overline{AB}^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ = 64 + 49 - 112 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 64 + 49 + 56 = 169$$

$$\text{故得 } \overline{AB} = \sqrt{169} = 13$$

F. 設正立方體的邊長為 x , 因為此正立方體有一個頂點在平面 $z=0$ 上, 且有另一個頂點在平面 $z=6$ 上, 而平面 $z=0$ 與平面 $z=6$ 的距離為 6, 而此正立方體的對角線長為 $\sqrt{3}x$

$$\text{得 } \sqrt{3}x \geq 6, \text{ 得 } x \geq \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

故知滿足題目條件的正立方體之邊長最小可能值為 $2\sqrt{3}$

G. 《方法一》建立坐標系如右圖:

$$\text{則 } \overline{AB} = (a, -b), \overline{AD} = (a, d)$$

$$\overline{BC} = (c, b), \overline{AC} = c + a$$

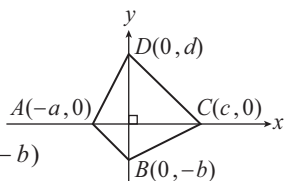
$$\overline{BD} = d + b, \text{ 得 } \overline{AB} + \overline{AD} = (2a, d-b)$$

$$\text{因為已知 } \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{BC}, \text{ 且 } \overline{AC} = \overline{BD}$$

$$\text{所以 } c = 2a, d - b = b, d + b = c + a, \text{ 得 } c = 2a, d = 2b, 3b = 3a, \text{ 所以 } b = a, d = 2a, \text{ 令 } \angle DAC = \alpha, \angle BAC = \beta$$

$$\text{則 } \tan \alpha = \frac{d}{a} = 2, \tan \beta = \frac{b}{a} = 1$$

$$\text{所以 } \tan \angle BAD = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{2+1}{1-2 \cdot 1} = -3$$



《方法二》

$$\text{由已知 } \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AD}$$

$$\text{得 } \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AD} = 2\overline{AB} + \overline{AD}$$

而 $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$, 又已知 \overline{AC} 、 \overline{BD} 兩向量等長且互相垂直, 所以 $|\overline{AC}|^2 = |\overline{BD}|^2$ 且 $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$

$$\text{於是得 } 0 = |\overline{AC}|^2 - |\overline{BD}|^2 = (\overline{AC} + \overline{BD}) \cdot (\overline{AC} - \overline{BD})$$

$$= (\overline{AB} + 2\overline{AD}) \cdot (3\overline{AB}) = 3|\overline{AB}|^2 + 6\overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

$$\text{且 } 0 = (2\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot (\overline{AD} - \overline{AB}) = |\overline{AD}|^2 + \overline{AD} \cdot \overline{AB} - 2|\overline{AB}|^2$$

$$\text{所以 } \overline{AD} \cdot \overline{AB} = -\frac{1}{2}|\overline{AB}|^2, \text{ 得 } |\overline{AD}|^2 - \frac{1}{2}|\overline{AB}|^2 - 2|\overline{AB}|^2 = 0$$

$$\text{可知 } |\overline{AD}|^2 = \frac{5}{2}|\overline{AB}|^2, \text{ 即 } |\overline{AD}| = \sqrt{\frac{5}{2}}|\overline{AB}|$$

$$\text{得 } \cos \angle BAD = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AD}| |\overline{AB}|} = \frac{-\frac{1}{2}|\overline{AB}|^2}{\sqrt{\frac{5}{2}}|\overline{AB}|^2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{所以 } \sin \angle BAD = \frac{3}{\sqrt{10}}, \text{ 故知 } \tan \angle BAD = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = -3$$

2

107 學年度學科能力測驗

- 1.(D) 2.(C) 3.(E) 4.(B) 5.(C) 6.(E) 7.(D) 8.(A)(D)
 9.(B)(C)(E) 10.(B)(C) 11.(C)(E) 12.(A)(C)(D)
 A. ⑬ 2 ⑭ 4 B. ⑮ 1 ⑯ 7 ⑰ 0
 C. ⑱ 2 ⑲ 5 ⑳ 4 D. ㉑ 9 ㉒ 2
 E. ㉓ 3 ㉔ 5 F. ㉕ 7 ㉖ 2
 G. ㉗ 1 ㉘ 3 ㉙ 2 ㉚ 3 H. ㉛ 3 ㉜ 3 ㉝ 7

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 令 M 為 \overline{AB} 的中點, $\overline{AB} = a$, 空間中使 $\triangle PAB$ 為正三角形的點 P 所成的集合為 Γ , 則 $P \in \Gamma \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AB}$

$$\Leftrightarrow P \text{ 在 } \overline{AB} \text{ 的垂直平分面 } E \text{ 上, 且 } \overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \text{ 所以 } \Gamma$$

為平分面 E 上與 M 之距離為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 的圓

故選(D)

2. 因為每題猜對的機率為 $\frac{1}{5} = 0.2$, 且各題猜答互不影響 (即獨立), 所以 10 題全猜對的機率為

$$(0.2)^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10^{10}} \approx \frac{10^3}{10^{10}} = 10^{-7}$$

故選(C)

3. 《方法一》

因為甲乙兩人每人有 $C_2^7 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ 種選擇, 所以甲乙兩人共有 $21 \cdot 21 = 441$ 種選擇

又兩人所選休假: ①兩天完全一樣的情形有 $C_2^7 = 21$ 種

②兩天恰有一天相同的情形有

$$C_1^7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ 種}$$

$$\text{所以所求機率為 } \frac{21+210}{441} = \frac{231}{441} = \frac{11}{21}$$