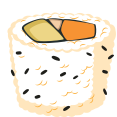
目次



8 三角

銳角三角函數

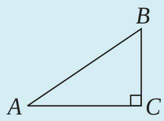
學測 102・103・104・107

$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，$\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

餘角關係：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

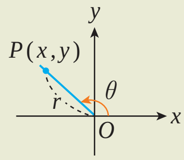


廣義角三角函數

學測 100・101・105・106・107

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$



極坐標：利用距離與方向來描述點位置的方式

弧度：$180^\circ=\pi$ 弧度

餘弦定理

學測 100・101・104・105・106

餘弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

海龍公式

ΔABC 面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

正弦定理

學測 100・102・103・105・106・107

正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，$R$ 為 ΔABC 的外接圓半徑

三角形面積公式

ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

和角、差角公式

學測 103・104・107

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

倍角、半角公式

學測 100・101

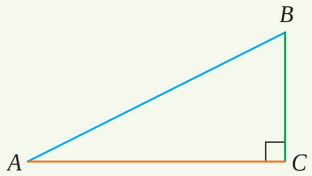
$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

概念 1　銳角三角函數

1. 銳角三角函數值：ΔABC 為直角三角形，其中 $\angle C=90^\circ$，令斜邊 $\overline{AB}$，$\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC}$，$\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}$，定義 $\angle A$ 的三個三角函數如下表：

	定　義	圖　示
正弦函數	$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$	
餘弦函數	$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	
正切函數	$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊}}{\angle A\text{ 的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$	

例 $\sin 30^\circ=$ ______，$\cos 45^\circ=$ ______，$\tan 60^\circ=$ ______。

2. 若 $0^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$，則：
(1) $0<\sin\alpha<\sin\beta<1$　(2) $0<\cos\beta<\cos\alpha<1$　(3) $0<\tan\alpha<\tan\beta<1$。

3. 三角函數的基本關係
(1) 餘角關係：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$。
(2) 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。
(3) 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

基礎題 1　銳角三角函數的定義

參見詳解本 P.46

已知 $0^\circ<\theta<90^\circ$，且 $\sin\theta=k$，試求：
(1) k 的範圍為______　(2) $\cos\theta=$ ______，$\tan\theta=$ ______。

解

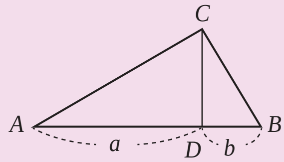
基礎題 2　三角函數的基本關係

試求下列各式的值：
(1) $\cos 44^\circ-\sin 46^\circ=$ ______　(2) $\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ=$ ______
(3) $\tan^2 75^\circ\times\cos^2 75^\circ+\dfrac{\sin^2 75^\circ}{\tan^2 75^\circ}=$ ______。

解

範例 1 銳角三角函數的應用

如右圖，三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 邊上的高，設 $\overline{AD}=a$、$\overline{BD}=b$，試問下列敘述哪些正確？＿＿＿＿



(A) $\overline{BC}=(a+b)\cos A$　(B) $\overline{CD}=a\tan A$　(C) $\overline{CD}=(a+b)\cos A\sin A$

(D) $\tan^2 A=\dfrac{b}{a}$　(E) $\sin^2 A=\dfrac{b}{a+b}$

解

範例 2 三角函數性質的應用

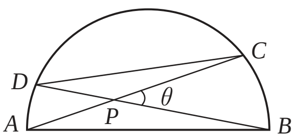
設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，k 為實數，且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是 $5x^2-7x+k=0$ 的兩根，則 $k=$＿＿＿＿。

解

參見詳解本 P.47

類題 1

如右圖，C、D 在以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 在圓內交於 P 點，設 $\angle BPC=\theta$，則下列哪些值與 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ 相同？＿＿＿＿



(A) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$　(B) $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}$　(C) $\sin\theta$　(D) $\cos\theta$　(E) $\tan\theta$

答

類題 2

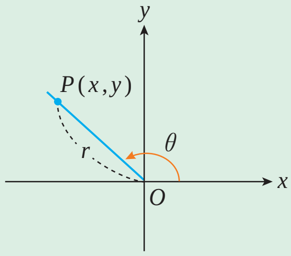
設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，k 為實數，且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是 $25x^2+kx+12=0$ 的兩根，則 $k=$＿＿＿＿。

答

概念 2　廣義角三角函數

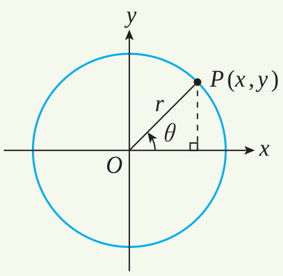
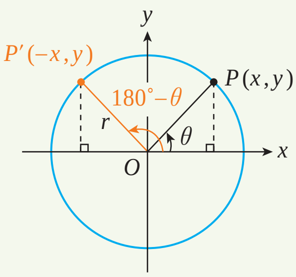
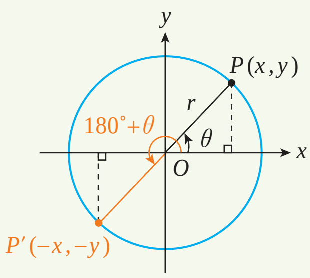
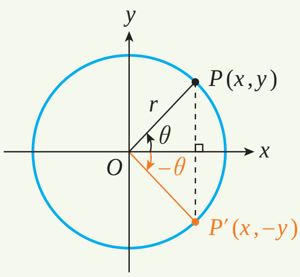
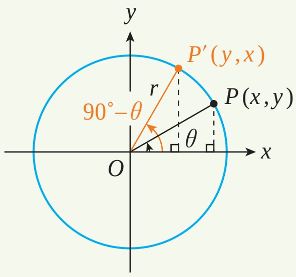
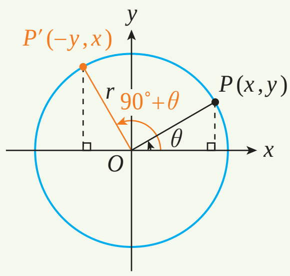
1. 平面上以點 O 為旋轉中心，將射線 OA 旋轉至射線 OB 所形成的 $\angle AOB$ 稱為有向角，其中射線 OA 為 $\angle AOB$ 的始邊，射線 OB 為 $\angle AOB$ 的終邊。
   (1) 逆時針方向旋轉的為正角，順時針方向旋轉的為負角。
   (2) 廣義角：不限於 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之間的有向角。
   (3) 標準位置角：坐標平面上，頂點位於原點，且始邊與 x 軸正向重合的有向角。若終邊位於第 k 象限，則稱為第 k 象限角；若終邊位於 x 軸、y 軸，則稱為象限角。
   (4) 同界角：有相同始邊與終邊的有向角，任意兩同界角相差 360° 的整數倍。

2. 在標準位置角 θ 的終邊上任取一點 $P(x, y)$，令 $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2} = r > 0$，則：
   (1) $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$　(2) $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$　(3) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$，$x \neq 0$。



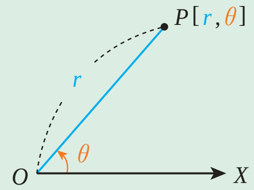
3. 廣義角三角函數也滿足餘角關係、商數關係和平方關係。

4. 換角公式

 同界角	 θ與$(180^\circ-\theta)$	 θ與$(180^\circ+\theta)$
$\sin(\theta+360^\circ\times k)=\sin\theta$ $\cos(\theta+360^\circ\times k)=\cos\theta$ $\tan(\theta+360^\circ\times k)=\tan\theta$	$\sin(180^\circ-\theta)=\dfrac{y}{r}=\sin\theta$ $\cos(180^\circ-\theta)=\dfrac{-x}{r}=-\cos\theta$ $\tan(180^\circ-\theta)=\dfrac{y}{-x}=-\tan\theta$	$\sin(180^\circ+\theta)=\dfrac{-y}{r}=-\sin\theta$ $\cos(180^\circ+\theta)=\dfrac{-x}{r}=-\cos\theta$ $\tan(180^\circ+\theta)=\dfrac{-y}{-x}=\tan\theta$
 θ與$(-\theta)$	 θ與$(90^\circ-\theta)$	 θ與$(90^\circ+\theta)$
$\sin(-\theta)=\dfrac{-y}{r}=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=\dfrac{-y}{x}=-\tan\theta$	$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ $\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{y}{r}=\sin\theta$	$\sin(90^\circ+\theta)=\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ $\cos(90^\circ+\theta)=\dfrac{-y}{r}=-\sin\theta$

5. 極坐標：利用距離與方向來描述點位置的方式。

(1) 在平面上選一點 O 作為極點，並向右作一水平射線 OX 作極軸，則平面上異於 O 的任一點 P 都可用 $\overline{OP}=r$ 與 $\overrightarrow{OX}$ 、$\overrightarrow{OP}$ 形成的有向角 θ 來表示，記為 $P[r,\theta]$。



(2) 若極點恰為直角坐標的原點 $(0,0)$，則

直角坐標 (x,y) $\underset{x=r\cos\theta\text{，}y=r\sin\theta}{\overset{r=\sqrt{x^2+y^2}\text{，}\cos\theta=\frac{x}{r}\text{，}\sin\theta=\frac{y}{r}}{\rightleftharpoons}}$ 極坐標 $[r,\theta]$。

例 極坐標 $[2,150^\circ]$ 的直角坐標為________，直角坐標 $(2,-2)$ 的極坐標為________。

6. 弧度：在圓周上取一個與半徑 r 等長的弧，該弧對應的圓心角 θ 稱為 1 弧度（或 1 弳）。

(1) $180^\circ=\pi$ 弧度　　(2) $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\approx 0.0175$ 弧度，1 弧度 $=\dfrac{180^\circ}{\pi}\approx 57.3^\circ$。

例 $\sin\dfrac{\pi}{3}=$________，$\cos\dfrac{\pi}{4}=$________。

基礎題 3　廣義角三角函數的定義

試完成下列表格。

θ	135°	210°	330°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$							
$\cos\theta$							
$\tan\theta$							

解

基礎題 4　極坐標

已知 A、B 兩點的極坐標分別為 $A[2,120^\circ]$、$B[3,30^\circ]$，試求：

(1) A 點的直角坐標為________　(2) B 點的直角坐標為________　(3) $\overline{AB}$ 的長為________。

解

範例 3 換角公式

計算 $\dfrac{\sin(\theta-90^\circ)\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(\theta+90^\circ)\cos(180^\circ-\theta)}=$ ______。

解

範例 4 換角公式

下列選項中，哪些值與 $\cos 80^\circ$ 相同？______

(A) $\sin 100^\circ$　(B) $\cos 100^\circ$　(C) $\sin 170^\circ$　(D) $\cos 170^\circ$

(E) $\sin(-80^\circ)$　(F) $\cos(-80^\circ)$　(G) $\sin(-10^\circ)$　(H) $\cos(-10^\circ)$

解

8

三角

範例 5 廣義三角函數與三角函數的基本關係

已知 $90^\circ<\theta<180^\circ$，且 $6\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=0$，試求 $\tan\theta=$ ______。

解

範例 6 廣義三角函數與三角函數的基本關係

參見詳解本 P.48

已知 $-45^\circ<\theta<0^\circ$，且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是方程式 $5x^2+kx-2=0$ 的兩根，則 $k=$ ______。

解

類題 3

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，且 $\sin\theta = \frac{1}{3}$，則 $\cos(180^\circ - \theta) =$ ________。

答

類題 4

計算 $\frac{(\sin 200^\circ + \cos 160^\circ)(\sin 110^\circ - \cos 250^\circ) + 1}{\sin 20^\circ \cdot \sin 290^\circ} =$ ________。

答

類題 5

設 θ 是第四象限角，且 $4\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 4\cos^2\theta = 2$，則 $\tan\theta =$ ________。

答

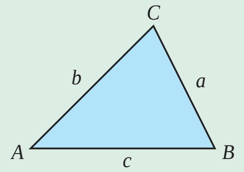
類題 6

已知 θ 是第三象限角，且 $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{10}{3}$。若方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 有兩根 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，試求數對 $(b, c) =$ ________。

答

概念 3 正弦定理

1. 三角形面積公式：ΔABC 中，設 a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，則 ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$。



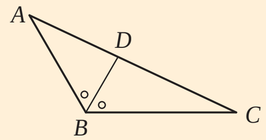
例 ΔABC 中，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\angle A=150^\circ$，則 ΔABC 面積 $=$ ______。

2. 正弦定理：ΔABC 中，設 a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，ΔABC 的外接圓半徑為 R，則 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，即 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

推論 ΔABC 中，設三邊長分別為 a、b、c，半周長為 $s=\frac{a+b+c}{2}$，R 為外接圓半徑，r 為內切圓半徑，則 ΔABC 面積 $=\frac{abc}{4R}=rs$。

基礎題 5 三角形面積

在 ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\angle ABC=120^\circ$，$\angle ABC$ 的平分線交 $\overline{AC}$ 於 D，若 $\overline{BD}$ 長為 x，試求：



(1) ΔABD 的面積 $=$ ______，ΔBCD 的面積 $=$ ______。（以 x 表示）

(2) ΔABC 的面積 $=$ ______。

(3) $x=$ ______。

解

基礎題 6 正弦定理

在 ΔABC 中，若 $\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\overline{BC}=12$，試求：

(1) ΔABC 的外接圓半徑 $R=$ ______　(2) $\overline{AC}=$ ______。

解

範例 7　利用正弦定理求角度

在 ΔABC 中，若 $\angle A = 45^\circ$，$\overline{AB} = \sqrt{3}$，$\overline{BC} = \sqrt{2}$，試求 $\angle B$ 與 $\angle C$。________

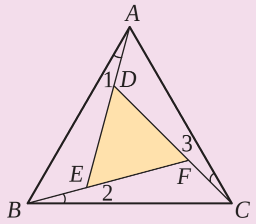
解

範例 8　正弦定理的應用

如右圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 15^\circ$。

已知 $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正三角形 DEF 的邊長為________。

103 學測　答對率 28 %



解

參見詳解本 P.49

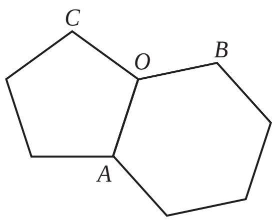
類題 7

在 ΔABC 中，若 $\angle A = 30^\circ$，$\overline{AB} = 3\sqrt{2}$，$\overline{BC} = 3$，試求 $\angle B$ 與 $\angle C$。________

答

類題 8

嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（令它們的邊長均為 1）的平面圖形，如右圖所示，試問以下哪些選項是正確的？



(A) $\angle BAC = 54^\circ$　　(B) O 是ΔABC 的外接圓圓心

(C) $\overline{AB} = \sqrt{3}$　　(D) $\overline{BC} = 2\sin 66^\circ$

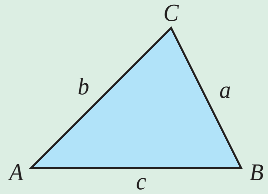
95 指考乙　全對率 30 %

答

8 三角

概念 4　餘弦定理

1. 餘弦定理：ΔABC 中，設 a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，則：



(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$。

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$；$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

例 在 ΔABC 中，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=4$，$\angle C=60^\circ$，則 $\overline{AB}=$ ______。

例 在 ΔABC 中，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=6$，$\cos A=$ ______。

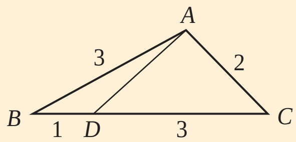
2. 海龍公式：ΔABC 中，設三邊長分別為 a、b、c，半周長為 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則

ΔABC 面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

例 邊長分別為 5、6、7 的三角形面積為 ______。

基礎題 7　餘弦定理

如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BD}=1$，$\overline{CD}=3$，試問：

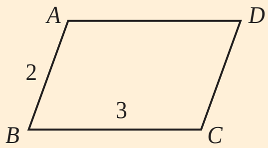


(1) $\cos B=$ ______　　(2) $\overline{AD}=$ ______。

解

基礎題 8　平行四邊形的對角線平方和等於四個邊長的平方和

平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，設 $\angle B=\theta$，試問：



(1) $\overline{AC}$ 的長為 ______，$\overline{BD}$ 的長為 ______。（以 θ 表示）

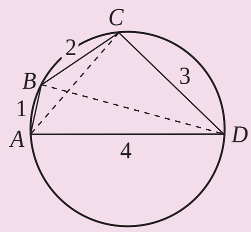
(2) $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=$ ______。

解

8 三角

範例 9 餘弦定理的應用

如右圖，$ABCD$ 是圓內接四邊形，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的長分別為 1、2、3、4，則 $\overline{AC}$ 的長為________，$\overline{BD}$ 的長為________。



解

範例 10 三角形面積公式的應用

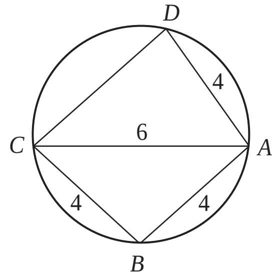
已知三角形的三邊長分別為 7、8、9，則該三角形的外接圓面積為________。

解

類題 9

如右圖，$ABCD$ 是圓內接四邊形，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DA}=4$，$\overline{AC}=6$，則 $\overline{CD}$ 的長為________，$\overline{BD}$ 的長為________。

答



類題 10

ΔABC 的內切圓分別與 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 相切於 D、E、F 三點，已知 $\overline{AD}=2$、$\overline{BE}=3$、$\overline{CF}=4$，則 ΔABC 的面積為________。

答

8 三角

概念 5　和角、差角公式

⊙ 設 α、β 為任意角，則：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$。

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan\alpha$、$\tan\beta$、$\tan(\alpha+\beta)$、$\tan(\alpha-\beta)$ 皆有意義。

基礎題 9　差角公式

參見詳解本 P.50

計算下列各三角函數的值：

(1) $\sin 15^\circ=$ ________　(2) $\cos 15^\circ=$ ________　(3) $\tan 15^\circ=$ ________。

解

基礎題 10　和角公式

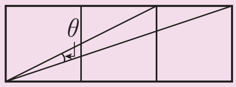
已知 $0^\circ\leq\alpha\leq 90^\circ$，$0^\circ\leq\beta\leq 90^\circ$，且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，試求：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ ________　(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ ________　(3) $\tan(\alpha+\beta)=$ ________。

解

範例 11 和、差角公式的應用

如右圖，每個方格都是邊長為 1 的正方形，試求 $\tan\theta =$ ________ 。



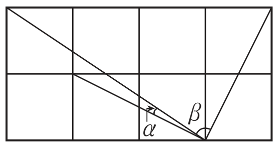
解

範例 12 和、差角公式的應用

已知 $\alpha+\beta=45^\circ$，試求 $(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=$ ________ 。

解

類題 11 如右圖，每個方格都是邊長為 1 的正方形，則 $\tan\alpha=$ ________ ，$\tan\beta=$ ________ 。



答

類題 12 試求 $\tan10^\circ\tan20^\circ+\sqrt{3}\tan10^\circ+\sqrt{3}\tan20^\circ=$ ________ 。

答

概念 6 倍角、半角公式

1. 二倍角公式

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$。

(2) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$。

(3) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$。（$\tan^2\theta \neq 1$）

2. 三倍角公式

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$。

3. 半角公式

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$。（正負值由 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 來決定）

(2) $\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$。（正負值由 $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 來決定）

(3) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$。（$\cos\theta \neq -1$，正負值由 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 來決定）

(4) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$。

基礎題 11 倍角公式

已知 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$，利用倍角公式，試求：

(1) $\sin 2\theta =$ ________
(2) $\cos 2\theta =$ ________
(3) $\tan 2\theta =$ ________
(4) $\sin 3\theta =$ ________
(5) $\cos 3\theta =$ ________。

解

基礎題 12 半角公式

設 $0^\circ < \theta < 360^\circ$，且 $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$，利用半角公式，試求：

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2} =$ ________
(2) $\cos\dfrac{\theta}{2} =$ ________
(3) $\tan\dfrac{\theta}{2} =$ ________。

解

範例 13 倍角公式的應用

參見詳解本 P.51

$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ =$ ________。

解

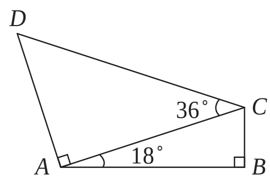
範例 14 倍角公式的應用

已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，則 $\sin 2\theta=$ ________。

解

類題 13

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle DAC=90^\circ$，$\angle ACD=36^\circ$，$\angle CAB=18^\circ$，已知 $\overline{CD}=4$，則 $\overline{BC}=$ ________。



答

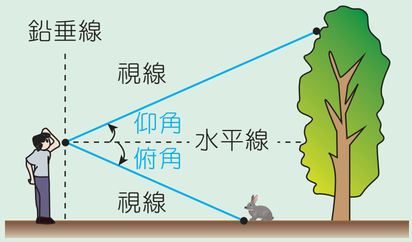
類題 14

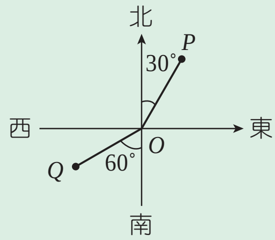
ΔABC 中，$\angle B=135^\circ$，$\overline{AC}=1$，$\overline{AB}=\dfrac{7}{13}$，若 B、D 兩點在 $\overleftrightarrow{AC}$ 的異側且 $\overline{AD}=\overline{AC}$、$\angle DAB=2\angle A$，則 D 到直線 AB 的最短距離為________。

答

概念 7　三角測量

1. 測量上有一些常用的名詞，如仰角、俯角、鉛垂線、水平線等，其意義可參見左下圖。





2. 方位：一般大家熟悉的有東、西、南、北四個主要方位，若配合角度說明，更能精確指出物體所在的位置與方向。如右上圖所示，P 點在 O 點的北 30° 東（東 60° 北）的方位；Q 點在 O 點的南 60° 西（西 30° 南）的方位。

3. 三角函數表的查法：上方的函數對應左邊的度數，下方的函數對應右邊的度數，1 度 = 60 分。如下表，$\tan 0°10' \approx 0.0029$，$\sin 45°10' \approx 0.7092$。

度	分	sin	cos	tan		度	分
0	00	0.0000	1.0000	0.0000	⋯	90	00
0	10	0.0029	1.0000	0.0029	343.7737	89	50
44	50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0038	45	10
45	00	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45	00
度	分	cos	sin		tan	度	分

基礎題 13　三角測量

地面上有一旗桿，某人從 A 點量得旗桿頂的仰角為 30°，往旗桿方向移動 100 公尺至 B 點，量得旗桿頂的仰角為 45°，則旗桿高度為________公尺。

解

基礎題 14　查表與內插法

已知 $0° < \theta < 90°$，$\sin 36°50' = 0.5995$，$\sin 37° = 0.6018$，且 $\sin\theta = \frac{3}{5}$，則 θ 的近似值為________。（四捨五入至「分」）

解

範例 15　平面上的方位移動

根據中央氣象局發布的颱風消息，目前颱風中心位置在恆春東 60° 南的方向 400 公里處，沿著西北方的路徑前進，暴風半徑 150 公里。如果颱風大小及行進的方向不變，試問：

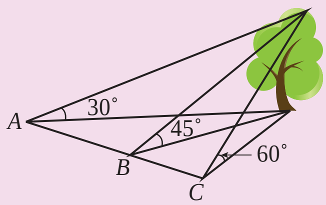
(1)颱風中心與恆春的最近距離是________公里。（四捨五入計算至整數位，$\sqrt{2} \approx 1.414$，$\sqrt{6} \approx 2.449$）

(2)恆春是否會進入暴風圈？________

解

範例 16　共線處測仰角求高度

在地面上 A、B、C 三點共線，且 $\overline{AB} = 3$ 公尺，$\overline{BC} = 2$ 公尺，某人自 A 點量得大樹仰角 30°，自 B 點量得大樹仰角 45°，自 C 點量得大樹仰角 60°，則樹高________公尺。



解

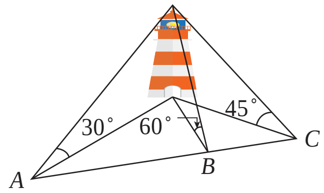
類題 15

一船往正東航行，在其左側發現兩燈塔 A 和 B，經測量發現 A 在船的北 30° 西，B 在船的北 30° 東。該船行駛 900 公尺後，再測量燈塔 A 和 B，發現 A 在船的北 60° 西，B 在船的正北方。則燈塔 A 和 B 之間的距離為________公尺。

答

參見詳解本 P.52

類題 16　在地面上 A、B、C 三點共線，且 $\overline{AB}=20$ 公尺，$\overline{BC}=10$ 公尺，某人自 A 點量得塔頂仰角 30°，自 B 點量得塔頂仰角 60°，自 C 點量得塔頂仰角 45°，則塔高________公尺。

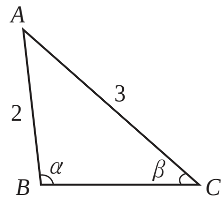


答

綜合實力測驗

一、單選題

______ 1.如右圖，三角形 ABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle B=\alpha>90^\circ$，則 $\overline{BC}$ 長為何？

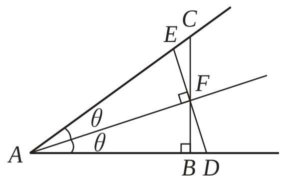


(A) $2\cos\alpha+3\cos\beta$
(B) $2\cos\alpha-3\cos\beta$
(C) $-2\cos\alpha+3\cos\beta$
(D) $-2\cos\alpha-3\cos\beta$

______ 2.圓 O 的外切正 12 邊形的邊長為 L，內接正 12 邊形的邊長為 ℓ，試問 $\dfrac{L}{\ell}$ 之值為何？

(A) $\sin 15^\circ$　(B) $\cos 15^\circ$　(C) $\tan 15^\circ$
(D) $\dfrac{1}{\sin 15^\circ}$　(E) $\dfrac{1}{\cos 15^\circ}$

______ 3.如右圖，設 B 在 $\overline{AD}$ 上，E 在 $\overline{AC}$ 上，$\overline{BC}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 F，若 $\overline{AF}$ 平分 $\angle CAD$，$\overline{BC}\perp\overline{AD}$，$\overline{DE}\perp\overline{AF}$，設 $\angle CAF=\theta$，則 $\dfrac{\Delta BDF\text{ 面積}}{\Delta CEF\text{ 面積}}$ 的值為何？



(A) $\sin^2\theta$　(B) $\cos^2\theta$　(C) $\sin 2\theta$
(D) $\cos 2\theta$　(E) $\tan 2\theta$

______ 4.三角形 ABC，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，則 $\angle B$ 在哪一個範圍內？

(A) $60^\circ<\angle B<90^\circ$
(B) $90^\circ<\angle B<120^\circ$
(C) $120^\circ<\angle B<135^\circ$
(D) $135^\circ<\angle B<150^\circ$
(E) $150^\circ<\angle B<180^\circ$

______ 5.試問有多少個實數 x 滿足 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ\le\cos x$ ？

(A) 0 個　(B) 1 個　(C) 2 個
(D) 4 個　(E)無窮多個

106 學測　答對率 22 %

二、多選題

______ 6.下列哪些角度的三角函數值最小？

(A) $\sin(-170^\circ)$　(B) $\cos(-170^\circ)$　(C) $\tan(-170^\circ)$

(D) $\cos 170^\circ$　(E) $\sin 170^\circ$

______ 7.若 $0^\circ<\theta<45^\circ$，試問以下哪些選項恆成立？

(A) $\sin\theta<\cos\theta$　(B) $\tan\theta<\sin\theta$　(C) $\cos\theta<\tan\theta$

(D) $\sin 2\theta<\cos 2\theta$　(E) $\tan\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

94 學測　全對率 26 %

______ 8.已知 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的？

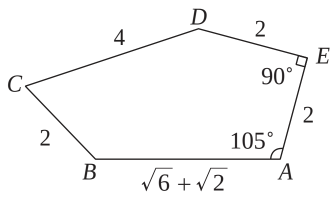
100 學測　全對率 33 %

(A) $\tan\theta<0$　(B) $\tan^2\theta>\dfrac{4}{9}$　(C) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$

(D) $\sin 2\theta>0$　(E)標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限

參見詳解本 P.53

______ 9.最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如右。關於這五邊形，請選出正確的選項。



(A) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$　(B) $\angle DAB=45^\circ$

(C) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$　(D) $\angle ABD=45^\circ$

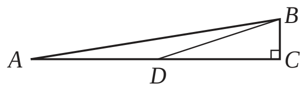
(E) ΔBCD 的面積為 $2\sqrt{2}$

106 學測　全對率 44 %

三、填充題

10. 已知三角形 ABC 中，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\overline{AC}=15$，則 $\overline{AB}=$______。

11. 已知三角形 ABC 中，$\overline{BC}\perp\overline{AC}$，$D$ 點在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}=\overline{BD}$，若 $\sin\angle BDC=\dfrac{1}{3}$，則 $\tan A=$______。

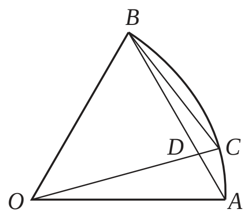


12. 已知 $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$，且 $\sin\theta<0$，則 $\cos(\theta+90^\circ)=$______。

13. 設 $0^\circ\le\theta\le 360^\circ$，且方程式 $x^2-a=0$ 之兩根恰為 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$，則 $a=$______。

14. 在三角形 ABC 中，D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，若 $\overline{AB}=24$，$\overline{AC}=40$，$\angle BAC=60^\circ$，則 $\overline{AD}=$______。

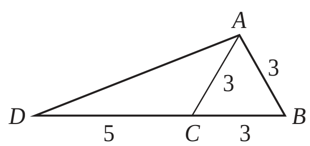
15. 如右圖，C 點在扇形 OAB 的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，已知 $\angle AOB=60^\circ$，$\angle AOC=15^\circ$，$\overline{OA}=\overline{OB}=4$，則：（$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$）



(1) $\overline{OD}=$______。

(2) ΔABC 面積為______。

16. 如右圖，三角形 ABD 中，C 點在 $\overline{BD}$ 上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=3$，$\overline{CD}=5$，則 $\overline{AD}=$______。

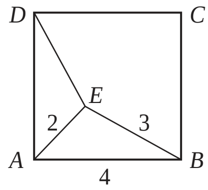


17. 設 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 為方程式 $x^2-3x-5=0$ 的兩根，則：

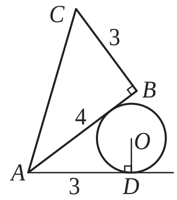
(1) $\tan(\alpha+\beta)=$______　　(2) $\cos(2\alpha+2\beta)=$______。

參見詳解本 P.54

18. 如右圖，邊長為 4 的正方形 $ABCD$ 中有一點 E，若滿足 $\overline{AE}=2$，$\overline{BE}=3$，則 ΔAED 的面積為______。

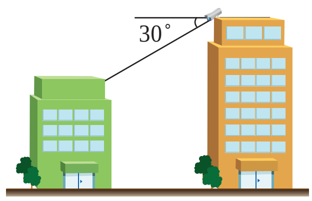


19. 兩個外切的圓半徑分別為 1 與 4，且外公切線為直線 L 與 x 軸，若直線 L 的斜率 m 為正，則 $m=$______。



20. 如右圖，有一半徑為 1 的圓 O，與直角三角形 ABC 的一股 $\overline{AB}$ 相切，$\overline{AD}$ 亦與圓 O 相切於 D 點，若 $\overline{AD}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，則 C 點到 $\overline{AD}$ 的最短距離為______。

21. 如右圖，兩棟大樓間有一條防火巷，較高的大樓頂有一監視器，若對準對面較矮的大樓頂邊緣，恰好測得俯角為 30°。已知較高的大樓高度為 30 公尺，較矮的大樓高度恰等於防火巷的寬度，則防火巷的寬度為______公尺。

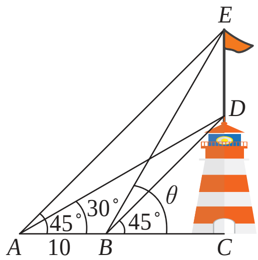


22. 如右圖，塔上有一旗桿，小明自 A 點測得塔頂仰角 30°，桿頂仰角 45°，然後朝塔的方向移動 10 公尺到 B 點，再測塔頂仰角為 45°，桿頂仰角為 θ。試求：

(1)塔高為______公尺。

(2)旗桿長為______公尺。

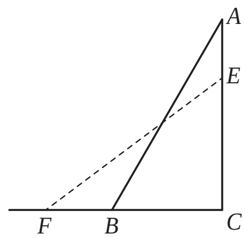
(3) $\theta=$______度。



23. 甲、乙、丙三人分別在不共線的 A、B、C 三點看到一艘飛碟停留空中，他們三人測量出飛碟的仰角都是 60°，且 $\overline{AC}$ 距離約 1 公里，$\angle ABC=150^\circ$，則飛碟的高度為______公里高。

24. 有一艘漁船往正東方向航行，甲板上的船員回報船長在北 15° 東發現燈塔 A，在北 60° 東發現燈塔 B。漁船繼續航行 30 公里後，再測得燈塔 A 在北 30° 西，燈塔 B 在正北方。則燈塔 A 與 B 的距離為______公里。

25. 如右圖所示（只是示意圖），將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 60°。將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F（即 $\overline{FB}=51$ 公分），此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC=0.6$，則梯子長 $\overline{AB}=$______公分。 107 學測



$\therefore\ \mu_X=\dfrac{25}{5}=5$，$\mu_Y=\dfrac{30}{5}=6$

$$\sigma_X=\sqrt{\dfrac{\sum x_i^2-5\mu_X^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{135-5\times5^2}{5}}=\sqrt{2}$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\dfrac{\sum y_i^2-5\mu_Y^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{220-5\times6^2}{5}}=2\sqrt{2}$$

相關係數 $r=\dfrac{\sum x_iy_i-5\mu_X\mu_Y}{5\sigma_X\sigma_Y}=\dfrac{160-5\times5\times6}{5\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=0.5$

Y 對 X 的迴歸直線為 $y-\mu_Y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

$\Rightarrow\quad y-6=0.5\times\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(x-5)\quad\Rightarrow\quad x-y+1=0$

16.設 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的平均為 μ，標準差為 σ

則 $y=\sum\limits_{i=1}^{10}(x-x_i)^2$ 的頂點坐標為 $(\mu,10\sigma^2)=(6,40)$

所以平均 $\mu=6$，標準差 $\sigma=2$

17.$5\sigma^2=10^2+15^2+30^2+25^2+k^2-5\cdot(\dfrac{10+15+30+25+k}{5})^2$

$=\dfrac{4}{5}k^2-32k+570=\dfrac{4}{5}(k-20)^2+250$

故當 $k=20$ 時，標準差為最小

18.設老師的年齡為 x 歲

則變量 X：$\underbrace{15,15,15,\cdots,15}_{35\text{個}},x$ 的平均為 μ_X

標準差 $\sigma_X\le4$

令 $Y=X-15$，則 Y：$\underbrace{0,0,0,\cdots,0}_{35\text{個}},x-15$ 的平均

$\mu_Y=\mu_X-15$，標準差 $\sigma_Y=\sigma_X$

設 $y=x-15$，$\mu_Y=\dfrac{y}{36}$

$$\sigma_Y=\sqrt{\dfrac{\sum y_i^2-36\mu_Y^2}{36}}=\sqrt{\dfrac{y^2-36\times(\dfrac{y}{36})^2}{36}}\le4$$

因此 $\dfrac{y^2-\dfrac{y^2}{36}}{36}\le4^2\quad\Rightarrow\quad\dfrac{35}{36}y^2\le36\times4^2$

$\Rightarrow\quad y^2\le\dfrac{36^2\times4^2}{35}\quad\therefore\ y\le\dfrac{36\times4}{\sqrt{35}}\approx24.34\cdots$

$\therefore\ x=y+15\le\dfrac{36\times4}{\sqrt{35}}+15\approx39.34\cdots$

故 x 最大整數為 39，即老師年齡最大為 39 歲

8 三角

概念 1

1.$\dfrac{1}{2}$；$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\sqrt{3}$

基礎題

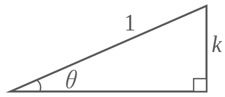
參見講義 P.120

1.(1) $0<k<1$　(2) $\sqrt{1-k^2}$；$\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　2.(1) 0　(2) 1　(3) 1

1.(1)$\because\ 0^\circ<\theta<90^\circ\quad\therefore\ 0<\sin\theta<1$，即 $0<k<1$

(2)設斜邊長為 1，因為

$\sin\theta=\dfrac{\theta\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}=k$，所以 θ 的對邊長為 k，由畢氏定理可算出 θ 的鄰邊長為 $\sqrt{1-k^2}$



$\cos\theta=\sqrt{1-k^2}$，$\tan\theta=\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

2.(1) $\cos44^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\sin46^\circ$

$\cos44^\circ-\sin46^\circ=0$

(2) $\cos^244^\circ+\cos^246^\circ=\sin^246^\circ+\cos^246^\circ=1$

(3) $\tan^275^\circ\times\cos^275^\circ+\dfrac{\sin^275^\circ}{\tan^275^\circ}$

$=\dfrac{\sin^275^\circ}{\cos^275^\circ}\times\cos^275^\circ+\cos^275^\circ$

$=\sin^275^\circ+\cos^275^\circ=1$

範例

1.(B)(C)(D)(E)　2.$\dfrac{12}{5}$

1.$\because\ \angle A+\angle B=\angle B+\angle BCD=90^\circ$

$\therefore\ \angle BCD=\angle A$

直角 ΔABC 中，$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{a+b}$，$\cos A=\dfrac{\overline{AC}}{a+b}$，$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

直角 ΔACD 中，$\sin A=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$，$\cos A=\dfrac{a}{\overline{AC}}$，$\tan A=\dfrac{\overline{CD}}{a}$

直角 ΔBCD 中，$\sin\angle BCD=\dfrac{b}{\overline{BC}}=\sin A$，

$\cos\angle BCD=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\cos A$，$\tan\angle BCD=\dfrac{b}{\overline{CD}}=\tan A$

(A)×；$\because\ \sin A=\dfrac{\overline{BC}}{a+b}\quad\therefore\ \overline{BC}=(a+b)\sin A$

(B)○；$\because\ \tan A=\dfrac{\overline{CD}}{a}\quad\therefore\ \overline{CD}=a\tan A$

(C)○；$\because\ \cos A=\dfrac{\overline{AC}}{a+b}$，$\sin A=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$

$\therefore\ (a+b)\cos A\sin A=(a+b)\times\dfrac{\overline{AC}}{a+b}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\overline{CD}$

(D)○；$\because\ \tan A=\dfrac{\overline{CD}}{a}=\dfrac{b}{\overline{CD}}$

$\therefore\ \tan^2A=\dfrac{\overline{CD}}{a}\times\dfrac{b}{\overline{CD}}=\dfrac{b}{a}$

(E)○；$\because\ \sin A=\dfrac{\overline{BC}}{a+b}=\dfrac{b}{\overline{BC}}$

$\therefore\ \sin^2A=\dfrac{\overline{BC}}{a+b}\times\dfrac{b}{\overline{BC}}=\dfrac{b}{a+b}$

2.$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是 $5x^2-7x+k=0$ 的兩根

由根與係數關係知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{k}{5}$

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow\quad(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

即 $(\dfrac{7}{5})^2=1+2\times\dfrac{k}{5}\quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{12}{5}$

類題

1.(B)(D)　2.－35

1.ΔABP 和 ΔDCP 中

$\because \angle B=\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$，$\angle A=\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$\therefore \Delta ABP \sim \Delta DCP$，故 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}$

又 $\overline{AB}$ 為直徑，所以 $\angle ACB=90^\circ$

在 ΔBPC 中，$\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\cos\theta$，故選(B)(D)

2.$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 是 $25x^2+kx+12=0$ 的兩根

由根與係數關係知 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{k}{25}$，$\sin\theta\times\cos\theta=\frac{12}{25}$

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow (\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

即 $(-\frac{k}{25})^2=1+2\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25} \Rightarrow k^2=49\times 25$

$\Rightarrow k=\pm 35$

但 $0^\circ<\theta<90^\circ$，故 $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{k}{25}>0 \Rightarrow k<0$，故 $k=-35$

概念 2

5.$(-\sqrt{3},1)$；$[2\sqrt{2},315^\circ]$　6.$\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\frac{\sqrt{2}}{2}$

基礎題

參見講義 P.123

3.見詳解　4.(1) $(-1,\sqrt{3})$　(2) $(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$　(3) $\sqrt{13}$

3.(1) $(-1,1)$ 為 135° 終邊上一點

$\sin 135^\circ=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135^\circ=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan 135^\circ=\frac{1}{-1}=-1$

(2) $(-\sqrt{3},-1)$ 為 210° 終邊上一點

$\sin 210^\circ=\frac{-1}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{2}$

$\cos 210^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $(\sqrt{3},-1)$ 為 330° 終邊上一點

$\sin 330^\circ=\frac{-1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{2}$

$\cos 330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 330^\circ=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $(0,1)$ 為 90° 終邊上一點

$\sin 90^\circ=\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2}}=1$，$\cos 90^\circ=\frac{0}{\sqrt{0^2+1^2}}=0$

$\tan 90^\circ=\frac{1}{0}$（無意義）

(5) $(-1,0)$ 為 180° 終邊上一點

$\sin 180^\circ=\frac{0}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}=0$

$\cos 180^\circ=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}=-1$，$\tan 180^\circ=\frac{0}{-1}=0$

(6) $(0,-1)$ 為 270° 終邊上一點

$\sin 270^\circ=\frac{-1}{\sqrt{0^2+(-1)^2}}=-1$

$\cos 270^\circ=\frac{0}{\sqrt{0^2+(-1)^2}}=0$，$\tan 270^\circ=\frac{-1}{0}$（無意義）

(7) $(1,0)$ 為 360° 終邊上一點

$\sin 360^\circ=\frac{0}{\sqrt{1^2+0^2}}=0$，$\cos 360^\circ=\frac{1}{\sqrt{1^2+0^2}}=1$

$\tan 360^\circ=\frac{0}{1}=0$

4.(1) $A[2,120^\circ]$ 的直角坐標為

$(2\cos 120^\circ,2\sin 120^\circ)=(2\times(-\frac{1}{2}),2\times\frac{\sqrt{3}}{2})=(-1,\sqrt{3})$

(2) $B[3,30^\circ]$ 的直角坐標為

$(3\cos 30^\circ,3\sin 30^\circ)=(3\times\frac{\sqrt{3}}{2},3\times\frac{1}{2})=(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$

(3) $\overline{AB}$ 的長為 $\sqrt{(-1-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(\sqrt{3}-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{13}$

範例

3.－1　4.(C)(F)　5.$-\frac{1}{3}$　6.$-\sqrt{5}$

3.$\sin(\theta-90^\circ)=\sin(-(90^\circ-\theta))=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$，$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \frac{\sin(\theta-90^\circ)\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(\theta+90^\circ)\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{(-\cos\theta)(-\cos\theta)}{(\cos\theta)(-\cos\theta)}=-1$

4.化成銳角三角函數

(A) $\sin 100^\circ=\sin(90^\circ+10^\circ)=\cos 10^\circ$

(B) $\cos 100^\circ=\cos(180^\circ-80^\circ)=-\cos 80^\circ$

(C) $\sin 170^\circ=\sin(90^\circ+80^\circ)=\cos 80^\circ$

(D) $\cos 170^\circ=\cos(180^\circ-10^\circ)=-\cos 10^\circ$

(E) $\sin(-80^\circ)=-\sin 80^\circ=-\cos 10^\circ$

(F) $\cos(-80^\circ)=\cos 80^\circ$

(G) $\sin(-10^\circ)=-\sin 10^\circ=-\cos 80^\circ$

(H) $\cos(-10^\circ)=\cos 10^\circ$

故選(C)(F)

5.將原式同除以 $\cos^2\theta$，得 $6\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=0$

$\Rightarrow 6\tan^2\theta-\tan\theta-1=0$

$\Rightarrow (3\tan\theta+1)(2\tan\theta-1)=0$

$\therefore \tan\theta=-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$，但 $90^\circ<\theta<180^\circ$ $\therefore \tan\theta<0$

故 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$

6.由根與係數關係知，$\begin{cases}\sin\theta\cdot\cos\theta=-\dfrac{2}{5}\\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow\quad(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\ \dfrac{k^2}{25}=1+2\cdot(-\dfrac{2}{5})=\dfrac{1}{5}\quad\therefore\ k=\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}$

但 $-45^\circ<\theta<0^\circ$

$\therefore\ \sin\theta<0$，$\cos\theta>0$ 且 $|\sin\theta|<|\cos\theta|$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{5}>0\quad\Rightarrow\quad k<0$，故 $k=-\sqrt{5}$

類題

3. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　4. 2　5. -2　6. $(\dfrac{2\sqrt{10}}{5},\dfrac{3}{10})$

3. $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$，又 $0^\circ<\theta<90^\circ\quad\therefore\ \cos\theta>0$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{8}{9}\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

4. $\sin200^\circ=-\sin20^\circ$，$\cos160^\circ=-\sin70^\circ$

$\sin110^\circ=\sin70^\circ$，$\cos250^\circ=-\sin20^\circ$

$\sin290^\circ=-\sin70^\circ$

$\therefore$原式 $=\dfrac{(-\sin20^\circ-\sin70^\circ)(\sin70^\circ+\sin20^\circ)+1}{\sin20^\circ(-\sin70^\circ)}$

$=\dfrac{-\sin20^\circ\sin70^\circ-\sin^220^\circ-\sin^270^\circ-\sin70^\circ\sin20^\circ+1}{-\sin20^\circ\sin70^\circ}$

$=\dfrac{-2\sin20^\circ\sin70^\circ-(\sin^220^\circ+\cos^220^\circ)+1}{-\sin20^\circ\sin70^\circ}$

$=\dfrac{-2\sin20^\circ\sin70^\circ-1+1}{-\sin20^\circ\sin70^\circ}=2$

5. $4\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$\Rightarrow\quad2\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-6\cos^2\theta=0$，同除以 $\cos^2\theta$，得

$2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}-6\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=0$

$\Rightarrow\quad2\tan^2\theta+\tan\theta-6=0\quad\Rightarrow\quad(2\tan\theta-3)(\tan\theta+2)=0$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{3}{2}$ 或 -2，但 θ 是第四象限角　$\therefore\ \tan\theta<0$

故 $\tan\theta=-2$

6. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{10}{3}\quad\Rightarrow\quad3\tan^2\theta-10\tan\theta+3=0$

$\Rightarrow\quad(3\tan\theta-1)(\tan\theta-3)=0$

$\therefore\ \tan\theta=3$ 或 $\dfrac{1}{3}$，又 θ 是第三象限角

$\therefore\ (\sin\theta,\cos\theta)=(-\dfrac{1}{\sqrt{10}},-\dfrac{3}{\sqrt{10}})$ 或 $(-\dfrac{3}{\sqrt{10}},-\dfrac{1}{\sqrt{10}})$

故由根與係數關係知

$b=-(\sin\theta+\cos\theta)=-(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{3}{\sqrt{10}})=\dfrac{2}{5}\sqrt{10}$

$c=\sin\theta\cdot\cos\theta=(-\dfrac{1}{\sqrt{10}})(-\dfrac{3}{\sqrt{10}})=\dfrac{3}{10}$

$(b,c)=(\dfrac{2}{5}\sqrt{10},\dfrac{3}{10})$

概念 3

1. 3

基礎題　參見講義 P.126

5.(1) $\dfrac{3\sqrt{3}x}{4}$；$\sqrt{3}x$　(2) $3\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{12}{7}$　6.(1) $6\sqrt{2}$　(2) $6\sqrt{6}$

5.(1) $\because\ \overline{BD}$ 平分 $\angle ABC\quad\therefore\ \angle ABD=\angle CBD=60^\circ$

ΔABD 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}{2}\sin\angle ABD=\dfrac{3x}{2}\sin60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}x}{4}$

ΔBCD 面積 $=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{BD}}{2}\sin\angle CBD=\dfrac{4x}{2}\sin60^\circ=\sqrt{3}x$

(2) ΔABC 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}\sin\angle ABC=\dfrac{3\cdot4}{2}\sin120^\circ=3\sqrt{3}$

(3) ΔABC 面積 $=\Delta ABD$ 面積 $+\ \Delta BCD$ 面積

$=\dfrac{3\sqrt{3}x}{4}+\sqrt{3}x=3\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{12}{7}$

6.(1)由正弦定理：$2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{12}{\sin45^\circ}=12\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad R=6\sqrt{2}$

(2)由正弦定理：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R=12\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad\overline{AC}=12\sqrt{2}\cdot\sin B=12\sqrt{2}\cdot\sin60^\circ=6\sqrt{6}$

範例

7. $\angle B=75^\circ$，$\angle C=60^\circ$ 或 $\angle B=15^\circ$，$\angle C=120^\circ$

8. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

7.由正弦定理：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\sqrt{2}}{\sin45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$

$\therefore\ \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\angle C=60^\circ$ 或 120°

①當 $\angle C=60^\circ$ 時，$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=75^\circ$

②當 $\angle C=120^\circ$ 時，$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=15^\circ$

8.考慮 ΔBCF

$\because\ \angle2=\angle3=15^\circ$

$\therefore\ \angle BCF=\angle ACB-\angle3=60^\circ-15^\circ=45^\circ$，$\angle BFC=120^\circ$

由正弦定理 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BFC}=\dfrac{\overline{CF}}{\sin\angle2}=\dfrac{\overline{BF}}{\sin\angle BCF}$

即 $\dfrac{1}{\sin120^\circ}=\dfrac{\overline{CF}}{\sin15^\circ}=\dfrac{\overline{BF}}{\sin45^\circ}$

$\Rightarrow\quad\overline{CF}=\dfrac{\sin15^\circ}{\sin120^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

$\overline{BF}=\dfrac{\sin45^\circ}{\sin120^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \overline{EF}=\overline{BF}-\overline{BE}=\overline{BF}-\overline{CF}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

類題

7. $\angle B=105^\circ$，$\angle C=45^\circ$ 或 $\angle B=15^\circ$，$\angle C=135^\circ$
8.(B)(C)(D)

7.由正弦定理：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin C}$

$\therefore \sin C=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ $\angle C=45^\circ$ 或 135°

①當 $\angle C=45^\circ$ 時，$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=105^\circ$

②當 $\angle C=135^\circ$ 時，$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=15^\circ$

8.(A)×；$\because$ ΔAOB 和 ΔAOC 是等腰 Δ

且 $\angle AOB=120^\circ$，$\angle AOC=108^\circ$

$\therefore \angle OAB=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$

$\angle OAC=\dfrac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$

$\therefore \angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=30^\circ+36^\circ=66^\circ$

(B)○；$\because$ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$

$\therefore$ O 為 ΔABC 的外接圓圓心

(C)○；$\overline{AB}=2\cos\angle OAB=2\cos 30^\circ=\sqrt{3}$

(D)○；ΔABC 的外接圓半徑為 1

由正弦定理，$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=2$

$\Rightarrow$ $\overline{BC}=2\sin\angle BAC=2\sin 66^\circ$

概念 4

1. $\sqrt{13}$；$\dfrac{3}{4}$　2. $6\sqrt{6}$

基礎題

參見講義 P.128

7.(1) $\dfrac{7}{8}$　(2) $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$　8.(1) $\sqrt{13-12\cos\theta}$；$\sqrt{13+12\cos\theta}$
(2) 26

7.(1)由餘弦定理

$\cos B=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\dfrac{7}{8}$

(2)由餘弦定理

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\cos B$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{19}{4}$

$\Rightarrow$ $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

8.(1)由餘弦定理

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\cos\theta$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\cos\theta=13-12\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\overline{AC}=\sqrt{13-12\cos\theta}$

$\overline{CD}=\overline{AB}=2$，由餘弦定理

$\overline{BD}^2=\overline{CD}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{BC}\cos(180^\circ-\theta)$

$=2^2+3^2-2\times2\times3(-\cos\theta)=13+12\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\overline{BD}=\sqrt{13+12\cos\theta}$

(2) $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(13-12\cos\theta)+(13+12\cos\theta)=26$

範例

9. $\sqrt{\dfrac{55}{7}}$；$\sqrt{\dfrac{77}{5}}$　10. $\dfrac{441}{20}\pi$

9.$\because$ $ABCD$ 是圓內接四邊形

$\therefore$ $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$

$\Rightarrow$ $\cos A=-\cos C$，$\cos B=-\cos D$，由餘弦定理

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$，$\cos B=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$

$\cos C=\dfrac{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CD}}$，$\cos D=\dfrac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}$

$\cos A=-\cos C$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1^2+4^2-\overline{BD}^2}{2\times1\times4}=-\dfrac{2^2+3^2-\overline{BD}^2}{2\times2\times3}$

$\Rightarrow$ $\overline{BD}=\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

$\cos B=-\cos D$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1^2+2^2-\overline{AC}^2}{2\times1\times2}=-\dfrac{4^2+3^2-\overline{AC}^2}{2\times4\times3}$

$\Rightarrow$ $\overline{AC}=\sqrt{\dfrac{55}{7}}$

10.設三角形的三邊長 $a=7$，$b=8$，$c=9$

則半周長 $s=12$，設外接圓半徑為 R，則

ΔABC 面積 $=\dfrac{abc}{4R}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{7\times8\times9}{4R}=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=12\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ $R=\dfrac{21}{2\sqrt{5}}$

$\therefore$ ΔABC 外接圓面積為 $\pi R^2=\dfrac{441}{20}\pi$

類題

9. 5；6　10. $6\sqrt{6}$

9.$\because$ $ABCD$ 是圓內接四邊形

$\therefore$ $\angle B+\angle D=\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

$\cos B=-\cos D$，由餘弦定理

$\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=-\dfrac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{4^2+4^2-6^2}{2\times4\times4}=-\dfrac{4^2+\overline{CD}^2-6^2}{2\times4\times\overline{CD}}$

$\Rightarrow$ $\overline{CD}^2-\overline{CD}-20=0$ $\Rightarrow$ $(\overline{CD}-5)(\overline{CD}+4)=0$

$\therefore$ $\overline{CD}=5$

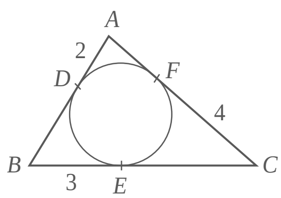
$\cos\angle BAD=-\cos\angle BCD$，由餘弦定理

$\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=-\dfrac{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CD}}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{4^2+4^2-\overline{BD}^2}{2\times4\times4}=-\dfrac{4^2+5^2-\overline{BD}^2}{2\times4\times5}$

$\Rightarrow$ $\overline{BD}^2=36$ $\therefore$ $\overline{BD}=6$

10.$\because$ D、E、F 是 ΔABC 內切圓與三邊的切點



$\therefore$ $\overline{AF}=\overline{AD}=2$，$\overline{BD}=\overline{BE}=3$

$\overline{CE}=\overline{CF}=4$

故 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=2+3=5$

$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=3+4=7$，$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}=2+4=6$

ΔABC 半周長 $s=\dfrac{5+7+6}{2}=9$

由海龍公式

ΔABC 面積 $=\sqrt{9\times(9-5)(9-7)(9-6)}=6\sqrt{6}$

基礎題 參見講義 P.130

9.(1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $2-\sqrt{3}$ 10.(1) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\sqrt{2}$

9.(1) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

10.由於 α、β 介於 0° ～ 90°，所以 $\sin\alpha$、$\cos\beta$ 皆為正數

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2}$

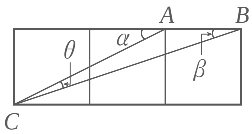
範例

11. $\dfrac{1}{7}$ 12. 2

11.考慮 ΔABC 外角等於兩內對角的和

$\Rightarrow\ \theta=\alpha-\beta$

又由圖形可知



$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{7}$

12. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，又 $\alpha+\beta=45^\circ$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\Rightarrow\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

$\Rightarrow\ \tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta=1$

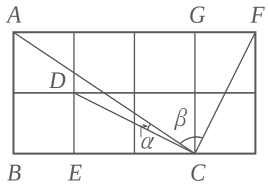
故 $(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)=\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta+1$

$=1+1=2$

類題

11. $\dfrac{1}{8}$；8 12. 1

11.如右圖



由 ΔABC 可知 $\tan\angle ACB=\dfrac{2}{3}$

由 ΔCDE 可知 $\tan\angle DCE=\dfrac{1}{2}$

由 ΔACG 可知 $\tan\angle ACG=\dfrac{3}{2}$

由 ΔCGF 可知 $\tan\angle FCG=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \tan\alpha=\tan(\angle ACB-\angle DCE)=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{8}$

$\tan\beta=\tan(\angle ACG+\angle FCG)=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=8$

12. $\tan 30^\circ=\tan(10^\circ+20^\circ)=\dfrac{\tan 10^\circ+\tan 20^\circ}{1-\tan 10^\circ\tan 20^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \sqrt{3}\tan 10^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ=1-\tan 10^\circ\tan 20^\circ$

$\Rightarrow\ \tan 10^\circ\tan 20^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ=1$

基礎題 參見講義 P.132

11.(1) $\dfrac{24}{25}$ (2) $\dfrac{7}{25}$ (3) $\dfrac{24}{7}$ (4) $\dfrac{117}{125}$ (5) $-\dfrac{44}{125}$

12.(1) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (3) -3

11.(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$

(2) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\frac{4}{5})^2-1=\dfrac{7}{25}$

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\dfrac{24}{7}$

(4) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\times\dfrac{3}{5}-4\times(\frac{3}{5})^3=\dfrac{117}{125}$

(5) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\times(\frac{4}{5})^3-3\times\dfrac{4}{5}=-\dfrac{44}{125}$

12. $\because\ \sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ $\therefore\ 180^\circ<\theta<270^\circ$

$\Rightarrow\ 90^\circ<\dfrac{\theta}{2}<135^\circ$，即 $\dfrac{\theta}{2}$ 為第二象限角

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) $\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1-\frac{4}{5}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(3) $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=-3$

範例

13. $\dfrac{1}{16}$　14. $\dfrac{24}{25}$

13.由二倍角公式

$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$

$=\cos 60^\circ\times\dfrac{2\times 2\times(2\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\times 2\times 2\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\times(2\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{16}$

14. $\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin 2\theta$

即 $(\dfrac{7}{5})^2=1+\sin 2\theta \quad\Rightarrow\quad \sin 2\theta=\dfrac{24}{25}$

類題

13. 1　14. $\dfrac{120}{169}$

13. $\overline{BC}=\overline{AC}\sin 18^\circ=\overline{CD}\cos 36^\circ\times\sin 18^\circ=4\cos 36^\circ\cos 72^\circ$

$=\dfrac{4\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\dfrac{2\sin 72^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}$

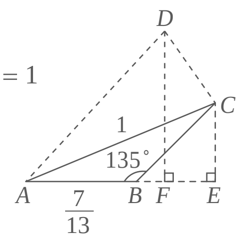
$=\dfrac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ}=1$

14.作 $\overline{CE}\perp\overleftrightarrow{AB}$ 於 E，$\overline{DF}\perp\overleftrightarrow{AB}$ 於 F

$\because\ \angle ABC=135^\circ$

$\therefore\ \Delta BCE$ 是等腰直角三角形，又 $\overline{AC}=1$

$\therefore\ \overline{BE}=\overline{CE}=\sin A$



故 $\overline{AB}=\overline{AE}-\overline{BE}=\cos A-\sin A=\dfrac{7}{13}$

則 $\overline{DF}=\overline{AD}\sin 2\angle DAB=\sin 2A$

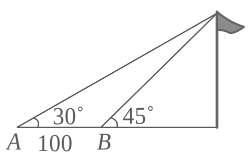
$=1-(\cos A-\sin A)^2=1-\dfrac{49}{169}=\dfrac{120}{169}$

基礎題

參見講義 P.134

13. $50\sqrt{3}+50$　14. $36^\circ 52'$

13.設旗桿高為 h 公尺，因為由 B 點量得旗桿頂的仰角為 45°，所以 B 點到旗桿底為 $\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=h$ 公尺



又 A 點量得旗桿頂的仰角為 30°

所以 $\tan 30^\circ=\dfrac{h}{100+h}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3}h=100+h$

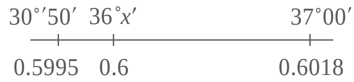
$\Rightarrow\quad h=\dfrac{100}{\sqrt{3}-1}=50\sqrt{3}+50$

14. $\sin 36^\circ 50'\approx 0.5995$，$\sin 37^\circ\approx 0.6018$

假設 $\sin 36^\circ x'\approx 0.6$，利用內插法可知

$\dfrac{36^\circ x'-36^\circ 50'}{37^\circ-36^\circ 50'}=\dfrac{x'-50'}{10'}\approx\dfrac{0.6-0.5995}{0.6018-0.5995}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{x'-50'}{10'}\approx\dfrac{5}{23}$



$\therefore\ x\approx 50+\dfrac{50}{23}\approx 52.17$

故 $\theta\approx 36^\circ 52'$

範例

15.(1) 104　(2)會　16. $\sqrt{15}$

15.(1)如下圖，設恆春為 A，颱風中心目前位置為 B，颱風中心與恆春最近距離的位置為 C，則 ΔABC 為直角三角形，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=60^\circ-45^\circ=15^\circ$，$\overline{AB}=400$

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{AB}\sin B$

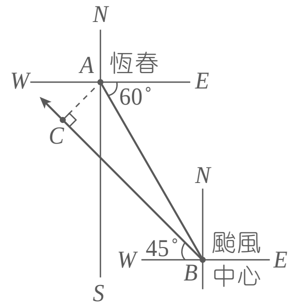
$=400\sin 15^\circ$

$=400\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$=100(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\approx 100(2.449-1.414)$

$=103.5\approx 104$



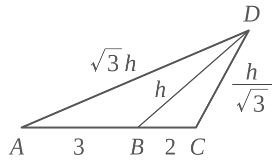
(2) $\overline{AC}<$ 暴風半徑，故恆春會進入暴風圈

16.設樹高為 h，樹的根部為 D 點

則 $\overline{AD}=\dfrac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}h$

$\overline{BD}=\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=h$

$\overline{CD}=\dfrac{h}{\tan 60^\circ}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$



考慮 ΔABD 和 ΔACD，由餘弦定理

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{AD}}$

即 $\dfrac{3^2+3h^2-h^2}{2\times 3\times\sqrt{3}h}=\dfrac{5^2+3h^2-\frac{h^2}{3}}{2\times 5\times\sqrt{3}h} \quad\Rightarrow\quad h^2=15$

所以樹高 $h=\sqrt{15}$

類題

15. $900\sqrt{3}$　16. $5\sqrt{6}$

15.設船在第一次測量時在 C 點

第二次測量時在 D 點

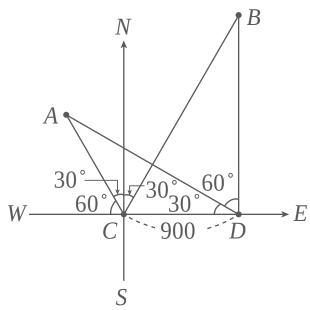
$\overline{CD}=900$

令 $C(0,0)$，$D(900,0)$

$\overline{BD}=900\tan 60^\circ=900\sqrt{3}$

$\therefore\ B(900,900\sqrt{3})$

設 $A(-x,y)$



則 $\tan 60^\circ=\dfrac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{3}x\cdots①$

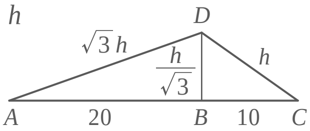
$\tan\angle ADC=\tan 30^\circ=\dfrac{y}{900+x} \quad\Rightarrow\quad 900+x=\sqrt{3}y\cdots②$

由①②解得 $x=450$，$y=450\sqrt{3}$　$\therefore\ A(-450,450\sqrt{3})$

$\overline{AB}=\sqrt{[900-(-450)]^2+(900\sqrt{3}-450\sqrt{3})^2}$

$=900\sqrt{3}$

16.設燈塔底部為 D 點，燈塔高為 h



$\overline{AD}=\dfrac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}h$

$\overline{BD}=\dfrac{h}{\tan 60^\circ}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

$\overline{CD}=\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=h$

考慮 ΔABD 和 ΔACD 的 $\angle A$，由餘弦定理

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\overline{AB}\times\overline{AD}}=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}{2\overline{AC}\times\overline{AD}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{20^2+3h^2-\frac{h^2}{3}}{2\times 20\times\sqrt{3}h}=\frac{30^2+3h^2-h^2}{2\times 30\times\sqrt{3}h}$$

$\therefore h^2=150$，$h=5\sqrt{6}$

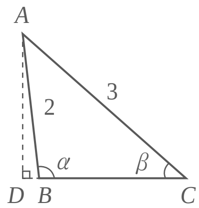
綜合實力測驗

參見講義 P.136

1.(A) 2.(E) 3.(D) 4.(B) 5.(A) 6.(B)(D) 7.(A)(E)
8.(A)(B) 9.(A)(D) 10. 45 11. $3-2\sqrt{2}$ 12. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 13. $\frac{1}{2}$
14. $15\sqrt{3}$ 15.(1) $6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$
16. 7 17.(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{5}$ 18. $\frac{11}{4}$ 19. $\frac{24}{7}$ 20. $\frac{120}{7}$
21. $45-15\sqrt{3}$ 22.(1) $5\sqrt{3}+5$ (2) 10 (3) 60 23. $\sqrt{3}$
24. $5\sqrt{30}$ 25. 170

一、單選題

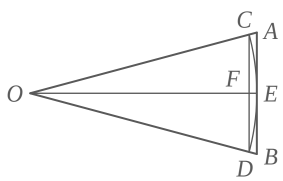
1.作 $\overline{AD}\perp\overleftrightarrow{BC}$ 且交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D



$\overline{BC}=\overline{CD}-\overline{BD}$
$=3\cos\beta-2\cos(180^\circ-\alpha)$
$=3\cos\beta+2\cos\alpha$

故選(A)

2.設圓外切正 12 邊形其中相鄰兩頂點為 A、B，內接正 12 邊形其中相鄰兩頂點為 C、D



設 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 中點分別為 E、F

則 $\angle AOE=\angle COF=15^\circ$

$\therefore \dfrac{L}{\ell}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{CF}}=\dfrac{\overline{OE}\tan 15^\circ}{\overline{OC}\sin 15^\circ}=\dfrac{\overline{OE}}{\overline{OC}\cos 15^\circ}$

又 $\overline{OC}=\overline{OE}=$ 半徑 $\quad\therefore \dfrac{L}{l}=\dfrac{1}{\cos 15^\circ}$

故選(E)

3.$\because \overline{AF}$ 平分 $\angle A$ 且 $\overline{DE}\perp\overline{AF}$

$\therefore \Delta AEF\cong\Delta ADF \quad\Rightarrow\quad \overline{DF}=\overline{EF}$

且由角平分線定理知 $\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{AB}:\overline{AC}$

且 $\angle BFD=\angle CFE=\theta$

$$\therefore \frac{\Delta BDF\text{ 面積}}{\Delta CEF\text{ 面積}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BF}\times\overline{DF}\sin\theta}{\frac{1}{2}\overline{EF}\times\overline{CF}\sin\theta}=\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\cos 2\theta$$

故選(D)

4.由餘弦定理

$$\cos B=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{3^2+5^2-6^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{15}$$

$\cos 90^\circ=0$，$\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos 120^\circ<\cos B<\cos 90^\circ \quad\Rightarrow\quad 90^\circ<\angle B<120^\circ$

故選(B)

5.因為 $\dfrac{\pi}{2}\approx\dfrac{3.14}{2}=1.57$，$\dfrac{3\pi}{2}\approx\dfrac{9.42}{2}=4.71$

所以 x° 約介於 1.57° 到 4.71° 之間，為第一象限角

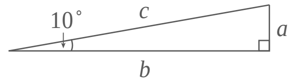
所以 $\cos x^\circ>0$。又 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$，所以 $\cos x\le 0$

故不存在實數 x 使得 $\cos x^\circ\le\cos x$

故選(A)

二、多選題

6.考慮 10° 的三角函數值，如右圖設斜邊為 c，兩股 $a<b$



(A) $\sin(-170^\circ)=-\sin 170^\circ=-\sin 10^\circ=-\dfrac{a}{c}$

(B) $\cos(-170^\circ)=\cos 170^\circ=-\cos 10^\circ=-\dfrac{b}{c}$

(C) $\tan(-170^\circ)=-\tan 170^\circ=\tan 10^\circ=\dfrac{a}{b}$

(D) $\cos 170^\circ=-\cos 10^\circ=-\dfrac{b}{c}$

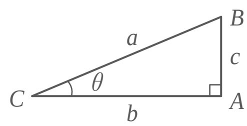
(E) $\sin 170^\circ=\sin 10^\circ=\dfrac{a}{c}$

$\because 0<a<b<c \quad\therefore -\dfrac{b}{c}<-\dfrac{a}{c}<\dfrac{a}{c}<\dfrac{a}{b}$

即 $-\cos 10^\circ<-\sin 10^\circ<\sin 10^\circ<\tan 10^\circ$

故選(B)(D)

7.若 $0^\circ<\theta<45^\circ$，則如右圖的直角三角形且 $a>b>c$



(A)○；$\sin\theta=\dfrac{c}{a}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{a}$

$\because b>c \quad\therefore \sin\theta<\cos\theta$

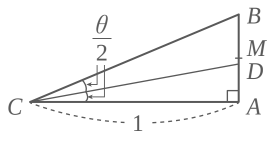
(B)×；$\tan\theta=\dfrac{c}{b}$，$\sin\theta=\dfrac{c}{a}$ $\quad\because a>b\quad\therefore \sin\theta<\tan\theta$

(C)×；$\cos\theta=\dfrac{b}{a}$，$\tan\theta=\dfrac{c}{b}$，在 $0^\circ<\theta<45^\circ$ 無法確定 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的大小關係

(D)×；$\because 0^\circ<\theta<45^\circ \quad\therefore 0^\circ<2\theta<90^\circ$

當 $45^\circ<2\theta<90^\circ$ 時，$\sin 2\theta>\cos 2\theta$

(E)○；設直角三角形 ABC



$\angle C=\theta$，$\angle A=90^\circ$

$\overline{CD}$ 平分 $\angle C$ 且交 $\overline{AB}$ 於 D，M 為 $\overline{AB}$ 中點

令 $\overline{AC}=1$，則 $\overline{AD}=\tan\dfrac{\theta}{2}$，$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

又 $\overline{BM}=\overline{AM}$，由角平分線定理知 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}<1$

$\therefore \overline{AD}<\overline{AM}$，即 $\tan\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

8.$\because \sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0 \quad\therefore \theta$ 是第四象限角

且 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\dfrac{5}{9} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(A)○；$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cos\theta>0$，$\sin\theta<0$ $\quad\therefore \tan\theta<0$

(B)○；$\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{4}{5}>\dfrac{4}{9}$

(C)×；$\sin^2\theta=\dfrac{4}{9}$，$\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$ $\quad\therefore \sin^2\theta<\cos^2\theta$

(D)×；$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，但 $\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$

$\therefore \sin 2\theta<0$

(E)×；θ 是第四象限角，且 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

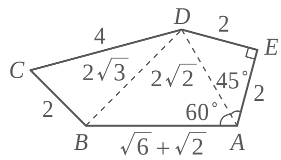
$\therefore -45^\circ+360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n$

$\therefore -90^\circ+360^\circ\times 2n<2\theta<360^\circ\times 2n$

即 2θ 也是第四象限角

9.(A)○；直角三角形 ADE，兩腰長 $\overline{AE}=\overline{DE}=2$，所以 ΔADE 為等腰直角三角形

故斜邊 $\overline{AD}=2\sqrt{2}$



(B)×；因為 ΔADE 為等腰直角三角形，所以 $\angle EAD=45^\circ$

故 $\angle DAB=105^\circ-45^\circ=60^\circ$

(C)×；考慮 ΔABD，由餘弦定理

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos 60^\circ$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=12$，$\overline{BD}=2\sqrt{3}$

(D)○；ΔABD 中，由正弦定理，$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin 60^\circ}$

$\Rightarrow \quad \sin\angle ABD=\dfrac{\overline{AD}\sin 60^\circ}{\overline{BD}}=\dfrac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \quad \angle ABD=45^\circ$

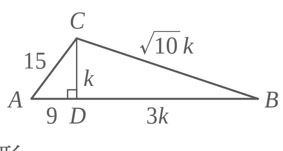
(E)×；$\overline{BC}:\overline{BD}:\overline{CD}=2:2\sqrt{3}:4=1:\sqrt{3}:2$

所以 ΔBCD 是 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形

故 ΔBCD 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

三、填充題

10.畫 ΔABC 如右圖，過 C 點作 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CD}$，則 ΔACD 是邊長比 $3:4:5$ 的直角三角形，ΔBCD 是邊長比 $1:3:\sqrt{10}$ 的直角三角形



$\because \overline{AC}=15 \quad \therefore \overline{AD}=9$，$\overline{CD}=12$

$\overline{BD}=\dfrac{\overline{CD}}{\tan B}=3\overline{CD}=36$，故 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=9+36=45$

11.$\sin\angle BDC=\dfrac{1}{3}$

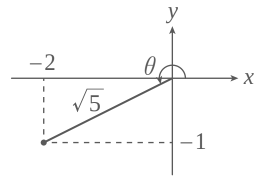
令 $\overline{BC}=1$，$\overline{BD}=\overline{AD}=3$，則 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{BC}^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AD}+\overline{CD}}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$

12.$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3 \quad\Rightarrow\quad 1+\tan\theta=3(1-\tan\theta)$

$\Rightarrow \quad \tan\theta=\dfrac{1}{2}$

又 $\sin\theta<0$，故 θ 是第三象限角



$\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta=-\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

13.$x^2-a=0$ 的兩根為 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$

即 $(\sin\theta,\cos\theta)=(\sqrt{a},-\sqrt{a})$ 或 $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$

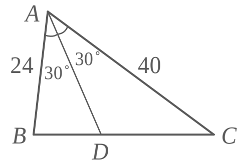
$\because \sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 為相反數且 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore \sin^2\theta=\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad (\sin\theta,\cos\theta)=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 或 $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

由根與係數關係，$a=-\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{2}$

14.$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$



$\therefore \angle BAD=\angle CAD=30^\circ$

ΔABC 面積

$=\Delta ABD$ 面積 $+\,\Delta ACD$ 面積

$\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD}\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AD}\sin 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\times 24\times 40\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times 24\times\overline{AD}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times 40\times\overline{AD}\times\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \overline{AD}=15\sqrt{3}$

15.(1) ΔOAB 面積 $=\Delta OAD$ 面積 $+\,\Delta OBD$ 面積

$\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}\sin\angle AOB$

$=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OD}\sin\angle AOD+\dfrac{1}{2}\overline{OB}\times\overline{OD}\sin\angle BOD$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 4\times\overline{OD}\sin 15^\circ+\dfrac{1}{2}\times 4\times\overline{OD}\sin 45^\circ$

$\Rightarrow \quad \overline{OD}=\dfrac{4\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ+\sin 45^\circ}=\dfrac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

(2) ΔABC 面積

$=\Delta OAC$ 面積 $+\,\Delta OBC$ 面積 $-\,\Delta OAB$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 15^\circ+\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 45^\circ-\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin 60^\circ$

$=8(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

16.$\because \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC} \quad \therefore \Delta ABC$ 是正三角形，$\angle B=60^\circ$

由餘弦定理，$\cos B=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-\overline{AD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BD}}$

$\Rightarrow \quad \cos 60^\circ=\dfrac{3^2+8^2-\overline{AD}^2}{2\times 3\times 8}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}=\dfrac{9+64-\overline{AD}^2}{2\times 3\times 8}$

$\Rightarrow \quad \overline{AD}^2=49 \quad \therefore \overline{AD}=7$

17.(1)由根與係數關係得 $\tan\alpha+\tan\beta=3$，$\tan\alpha\tan\beta=-5$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3}{1-(-5)}=\dfrac{1}{2}$

(2)由(1)知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{\sqrt5}$ 或 $-\dfrac{2}{\sqrt5}$

$\therefore \cos(2\alpha+2\beta)=2\cos^2(\alpha+\beta)-1=2\times(\dfrac{2}{\sqrt5})^2-1=\dfrac{3}{5}$

18. ΔAED 面積 $=\dfrac12\times\overline{AE}\times\overline{AD}\times\sin\angle EAD$

$=\dfrac12\times\overline{AE}\times\overline{AD}\times\cos\angle EAB$

$=\dfrac12\times\overline{AE}\times\overline{AD}\times\dfrac{\overline{AE}^2+\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}{2\times\overline{AE}\times\overline{AB}}$

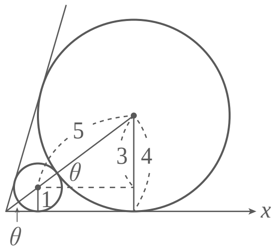
$=\dfrac12\times2\times4\times\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}=\dfrac{11}{4}$

19. 如右圖，連心線長為半徑和 $1+4=5$，連心線與 x 軸夾角 θ

故 $\sin\theta=\dfrac35\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\dfrac34$

L 的斜率 $m=\tan2\theta$

$=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac34}{1-(\frac34)^2}=\dfrac{24}{7}$



20. $d(C,\overleftrightarrow{AD})=\overline{AC}\times\tan\angle CAD=5\times\tan(\angle CAB+\angle BAD)$

又 $\tan\angle CAB=\dfrac34$

$\tan\angle BAD=\tan2\angle OAD=\dfrac{2\tan\angle OAD}{1-\tan^2\angle OAD}=\dfrac{2\times\frac13}{1-(\frac13)^2}=\dfrac34$

$\therefore d(C,\overleftrightarrow{AD})=5\times\dfrac{\tan\angle CAB+\tan\angle BAD}{1-\tan\angle CAB\tan\angle BAD}$

$=5\times\dfrac{\frac34+\frac34}{1-\frac34\times\frac34}=\dfrac{120}{7}$

21. 設防火巷寬 $=$ 較矮樓高 $=x$ 公尺

則 $x+x\tan30^\circ=30$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{30}{1+\tan30^\circ}=\dfrac{30}{1+\frac{1}{\sqrt3}}=45-15\sqrt3$

22. (1)設塔高為 x 公尺

則 B 點到塔底 C 距離也是 x 公尺

$(10+x)\times\tan30^\circ=x$

$\Rightarrow\quad\dfrac{10}{\sqrt3}=x-\dfrac{x}{\sqrt3}=\dfrac{(\sqrt3-1)}{\sqrt3}x$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{10}{\sqrt3}\times\dfrac{\sqrt3}{\sqrt3-1}=\dfrac{10(\sqrt3+1)}{2}=5\sqrt3+5$

(2)設旗桿長 y 公尺

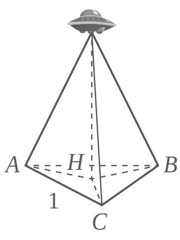
則 A 點到塔底 C 距離為 $(x+y)$ 公尺

又 $x+y=10+x$，故 $y=10$

(3) $\tan\theta=\dfrac{x+y}{x}=\dfrac{5\sqrt3+5+10}{5\sqrt3+5}=\sqrt3$

又 θ 為仰角，故 $\theta=60^\circ$

23. 設飛碟在地面的投影為 H，飛碟高度為 h，因為從 A、B、C 三點測得飛碟的仰角都是 60°



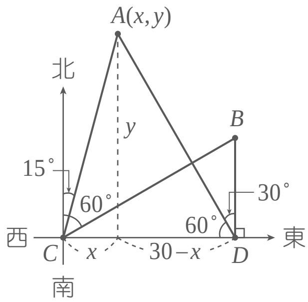
$\therefore\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{CH}=\dfrac{h}{\tan60^\circ}=\dfrac{h}{\sqrt3}$

$\therefore H$ 是 ΔABC 的外心，因此由正弦定理可知

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC}=2\times\dfrac{h}{\sqrt3}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{1}{\sin150^\circ}=\dfrac{2h}{\sqrt3}$

$\Rightarrow\quad h=\sqrt3$

24. 設初次發現燈塔時，船的坐標在 $C(0,0)$，第二次測量燈塔位置時，船的坐標在 $D(30,0)$，則 B 的坐標為 $(30,30\tan30^\circ)=(30,10\sqrt3)$



設 $A(x,y)$

$y=x\tan75^\circ=(30-x)\tan60^\circ$

$\Rightarrow\quad(2+\sqrt3)x=(30-x)\sqrt3$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{45-15\sqrt3}{2}$，$y=(2+\sqrt3)x=\dfrac{45+15\sqrt3}{2}$

$A(\dfrac{45-15\sqrt3}{2},\dfrac{45+15\sqrt3}{2})$

$\overline{AB}=\sqrt{(\dfrac{45-15\sqrt3}{2}-30)^2+(\dfrac{45+15\sqrt3}{2}-10\sqrt3)^2}$

$=5\sqrt{30}$

25. 設 $\overline{AB}=\overline{EF}=x$

則 $\overline{BC}=\overline{AB}\cos\angle ABC=\overline{AB}\cos60^\circ=\dfrac12x$

$\overline{FC}=\overline{EF}\cos\angle EFC=\overline{EF}\times\sqrt{1-\sin^2\angle EFC}=0.8\overline{EF}$

$\overline{BC}+\overline{FB}=\overline{FC}$，即 $\dfrac12x+51=0.8x\quad\Rightarrow\quad x=170$

9　直線與圓

基礎題

參見講義 P.140

1.(1) -2　(2) -193　2.(1) $2x+y-7=0$　(2) $2x+y-3=0$　(3) $4x+y-11=0$　(4) $3x-2y+6=0$

1.(1) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{3-(-1)}{2-4}=-2$

(2) $m_{\overline{AC}}=m_{\overline{AB}}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{k-3}{100-2}=-2$

$\Rightarrow\quad k=-193$

2.(1)由點斜式，直線方程式為 $y-3=-2(x-2)$

$\Rightarrow\quad 2x+y-7=0$

(2)由斜截式，直線方程式為 $y=-2x+3$

$\Rightarrow\quad 2x+y-3=0$

(3)由兩點式，直線方程式為 $\dfrac{y-3}{x-2}=\dfrac{7-3}{1-2}$

$\Rightarrow\quad y-3=-4(x-2)$

$\Rightarrow\quad 4x+y-11=0$

(4)由截距式，直線方程式為 $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$

$\Rightarrow\quad 3x-2y+6=0$

範例

1. $-1\le m\le1$　2. 24

高中數學 1-4 冊

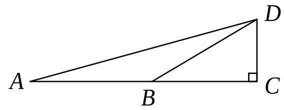
地毯式複習講義 課後練習本

8 三角

概念 1 銳角三角函數

參見詳解本 P.107

1. 如右圖，ΔACD 中，$\angle C = 90^\circ$，B 為 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AB} = \overline{BD}$。若 $\angle CBD = 30^\circ$，$\overline{CD} = 1$，則：



(1) $\overline{AD}$ 的長度為________ (2) $\cos 15^\circ =$ ________。

解

2. 試比較下列的大小關係：

(1) $\sin 50^\circ$ ________ $\sin 40^\circ$ (2) $\cos 50^\circ$ ________ $\cos 40^\circ$ (3) $\sin 50^\circ$ ________ $\cos 50^\circ$。

解

3. 下列何者與 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ 相同？________（單選）

(A) $2\sin\theta$ (B) $2\cos\theta$ (C) $\dfrac{2}{\sin\theta}$ (D) $\dfrac{2}{\cos\theta}$ (E) $\dfrac{2}{\tan\theta}$

解

4. 已知 $0^\circ < \theta < 45^\circ$，且 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，則：

(1) $\sin\theta\cos\theta =$ ________ (2) $\sin\theta-\cos\theta =$ ________。

解

概念 2 廣義角三角函數

5. $\dfrac{\cos 150^\circ+\sin 240^\circ}{\tan(-30^\circ)} =$ ________。

解

6. 若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，且 $\tan\theta = 3$，則 $\cos(270^\circ-\theta) =$ ________。

解

7. 設 $90^\circ \le \theta \le 270^\circ$，且方程式 $x^2 - a = 0$ 之兩根恰為 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$，則 $\theta =$ ________。

解

8. 請問 $\sin 73^\circ$、$\sin 146^\circ$、$\sin 219^\circ$、$\sin 292^\circ$、$\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？________（單選）

(A) $\sin 73^\circ$ (B) $\sin 146^\circ$ (C) $\sin 219^\circ$ (D) $\sin 292^\circ$ (E) $\sin 365^\circ$

105 學測 ● 答對率 53 %

解

9. 試比較下列的大小關係：

(1) $\sin\pi$ ________ $\sin\pi^\circ$ (2) $\cos 1$ ________ $\cos 1^\circ$ (3) $\cos 90$ ________ $\cos 90^\circ$。

解

10. 有一偵察小組發現敵方部隊集結，今偵察小組以目前所在位置為原點（極點），以極坐標方式回報資訊，欲以砲彈消滅敵方部隊。敵方部隊集結處的極坐標為 $[4, \frac{\pi}{3}]$，己方砲陣地的極坐標為 $[6, -\frac{\pi}{6}]$，則砲彈射程至少為________才能擊中敵方部隊。

解

概念 3 正弦定理

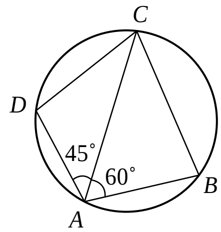
11. 在 ΔABC 中，若 $\angle A = 75^\circ$，$\angle B = 45^\circ$，$\overline{AB} = 6$，則 $\overline{AC}$ 的長度為________。

解

12. 在 ΔABC 中，若 $\angle A：\angle B：\angle C = 3：4：5$，則 $\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CA} =$ ________。

解

13. 如右圖，圓內接四邊形 $ABCD$，已知 $\angle BAC=60^{\circ}$，$\angle CAD=45^{\circ}$，$\overline{CD}=\sqrt{2}$，則 $\overline{BC}=$________。



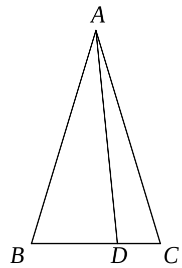
解

14. 有一個凸四邊形，其兩條對角線夾角為 60°，且對角線長分別為 1 和 4，則此四邊形的面積為________。

解

概念 4　餘弦定理

15. 如右圖，ΔABC 中，D 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$，若 $\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=1$，$\overline{AD}=5$，則 $\overline{AB}=$________。



解

16. 已知 $ABCD$ 是圓內接四邊形，若 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的長分別為 2、3、5、6，則對角線 $\overline{AC}$ 長為________。

解

17. 在 ΔABC 中，已知若 $\angle A=20^{\circ}$，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$。請選出正確的選項。________（多選）

(A)可以確定 $\angle B$ 的餘弦值　(B)可以確定 $\angle C$ 的正弦值
(C)可以確定 ΔABC 的面積　(D)可以確定 ΔABC 的內切圓半徑
(E)可以確定 ΔABC 的外接圓半徑

105 學測　● 全對率 19 %

解

概念 5　和角、差角公式

18. $\cos 141^\circ \cos 21^\circ + \sin 141^\circ \sin 21^\circ =$ ________。

解

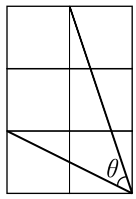
19. 已知 $180^\circ < \theta < 360^\circ$，且 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，則 $\sin(\theta + 60^\circ) =$ ________。

解

20. $\sqrt{3}\tan 63^\circ \tan 57^\circ - \tan 63^\circ - \tan 57^\circ =$ ________。

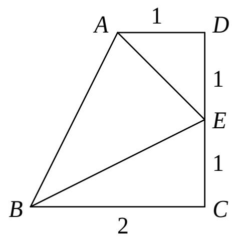
解

21. 如右圖，已知每一個方格都是正方形，兩條斜直線所夾的角度為 θ，則 $\sin\theta =$ ________。



解

22. 如右圖，$ABCD$ 為梯形，$\angle C = \angle D = 90^\circ$，$\overline{AD} = 1$，$\overline{BC} = \overline{CD} = 2$，且 E 點為 $\overline{CD}$ 中點，則 $\tan\angle AEB =$ ________。



解

概念 6　倍角、半角公式

23. 已知 θ 為第四象限角且 $\cos\theta = \frac{1}{3}$，則 $\sin 2\theta =$ ________，$\cos 2\theta =$ ________，$\tan 2\theta =$ ________。

解

24. 已知 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 且 $\cos\theta = -\frac{1}{5}$，則 $\sin\frac{\theta}{2} =$ ________，$\cos\frac{\theta}{2} =$ ________，$\tan\frac{\theta}{2} =$ ________。

解

25. 已知 $135^\circ < \theta < 180^\circ$ 且 $\sin 2\theta = -\dfrac{8}{9}$，則 $\sin\theta + \cos\theta =$ ________。

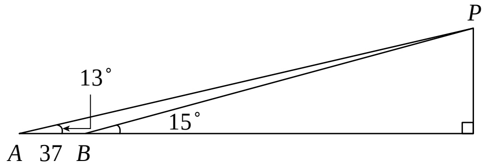
解

26. $\cos 36^\circ \cos 72^\circ =$ ________。

解

概念 7　三角測量

27. 如右圖，老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為 13°。老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 B，再測得山頂點 P 的仰角為 15°。則山高約為________公丈。（四捨五入至個位數，$\tan 13^\circ \approx 0.231$，$\tan 15^\circ \approx 0.268$）



104 學測　答對率 43 %

解

28. 甲、乙、丙三人分別在不共線的 A、B、C 三點看到天空中有一架飛機，他們三人測量出飛機的仰角都是 75°，且 $\overline{AB}$ 距離 300 公尺，$\angle ACB = 30^\circ$，則飛機的高度為________公尺。

解

29. 小綠想知道金字塔的高度，於是在一直線的 A、B、C 三點處，分別測量該點到金字塔頂的仰角分別為 α、β、γ，且 $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{5}$，$\tan\gamma = \dfrac{1}{9}$。若 $\overline{AB} = \overline{BC} = 300$ 公尺，則金字塔的高約為________公尺。

解

13.(D)

$B=2X-1$，$A=-2Y$，又 X 和 Y 的相關係數 $r_{XY}=r$

(A) $r_{AX}=r_{(-2Y)X}=-r_{YX}=-r$　　(B) $r_{AY}=r_{(-2Y)Y}=-1$

(C) $r_{AB}=r_{(-2Y)(2X-1)}=-r_{YX}=-r$　　(D) $r_{BY}=r_{(2X-1)Y}=r_{XY}=r$

14.0.7

$$\mu_X=\frac{\sum_{i=1}^{40}x_i}{40}=\frac{6000}{40}=150，\mu_Y=\frac{\sum_{i=1}^{40}y_i}{40}=\frac{2000}{40}=50$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{40}x_iy_i-40\mu_X\mu_Y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{40}x_i^2-40\mu_X^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{40}y_i^2-40\mu_Y^2}}$$

$$=\frac{303024-40\times150\times50}{\sqrt{905760-40\times150^2}\sqrt{103240-40\times50^2}}=0.7$$

概念 4　迴歸直線

15.$3x-y-6=0$

令 $X'=X-9$，$Y'=\frac{1}{4}(Y-32)$

則 $X=X'+9$，$Y=4Y'+32$

X'	-4	-3	0	4	8	$\sum_{i=1}^{5}x_i'=5$
Y'	-5	-7	-1	0	3	$\sum_{i=1}^{5}y_i'=-10$
$(X')^2$	16	9	0	16	64	$\sum_{i=1}^{5}x_i'^2=105$
$(Y')^2$	25	49	1	0	9	$\sum_{i=1}^{5}y_i'^2=84$
$X'Y'$	20	21	0	0	24	$\sum_{i=1}^{5}x_i'y_i'=65$

$$\mu_{X'}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i'}{5}=1，\mu_{Y'}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i'}{5}=-2$$

$$\sigma_{X'}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i'^2-5\mu_{X'}^2}{5}}=\sqrt{\frac{105-5\times1^2}{5}}=2\sqrt{5}$$

$$\sigma_{Y'}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i'^2-5\mu_{Y'}^2}{5}}=\sqrt{\frac{84-5\times(-2)^2}{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$r_{X'Y'}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i'y_i'-5\mu_{X'}\mu_{Y'}}{5\sigma_{X'}\sigma_{Y'}}=\frac{65-5\times1\times(-2)}{5\times2\sqrt{5}\times\frac{8}{\sqrt{5}}}=\frac{75}{80}=\frac{15}{16}$$

$\therefore$ Y' 對 X' 的迴歸直線為 $(y'-\mu_{Y'})=r_{X'Y'}\frac{\sigma_{Y'}}{\sigma_{X'}}(x'-\mu_{X'})$

$\Rightarrow\quad y'+2=\frac{3}{4}(x'-1)$

將 $y'=\frac{1}{4}(y-32)$，$x'=x-9$ 代入得 Y 對 X 的迴歸直線 $\frac{1}{4}(y-32)+2=\frac{3}{4}(x-9-1)\quad\Rightarrow\quad 3x-y-6=0$

16.$2x+4y-5=0$

將 $x'=3x-2$，$y'=-2y+1$ 代入 $2x'-6y'=5$

得 $2(3x-2)-6(-2y+1)=5\quad\Rightarrow\quad 6x+12y-15=0$

$\Rightarrow\quad 2x+4y-5=0$

17.(F)

$m=r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{6}{4}r_{XY}\quad\Rightarrow\quad r_{XY}=\frac{2}{3}m\quad\because A=-2X$

$\therefore$標準差 $\sigma_A=2\sigma_X$，且 A、Y 的相關係數 $r_{AY}=-r_{XY}$

故 Y 對 A 的迴歸直線斜率為

$$r_{AY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_A}=-r_{XY}\frac{\sigma_Y}{2\sigma_X}=-\frac{2}{3}m\times\frac{6}{2\times4}=-\frac{m}{2}$$

18.(B)

列出時間間隔與喝奶量，利用前 5 組資料求迴歸直線

X：時間間隔（hr）	2.5	3	2	2.5	2	x
Y：喝奶量（c.c.）	45	55	45	50	45	45

$$\mu_X=\frac{2.5+3+2+2.5+2}{5}=2.4$$

$$\mu_Y=\frac{45+55+45+50+45}{5}=48$$

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)^2}{5}}=\sqrt{0.14}，\sigma_Y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\mu_Y)^2}{5}}=4$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\mu_X\mu_Y}{5\sigma_X\sigma_Y}=\frac{582.5-5\times2.4\times48}{5\times\sqrt{0.14}\times4}=\frac{1.3}{4\sqrt{0.14}}$$

$\therefore$ Y 對 X 的迴歸直線 $y-\mu_Y=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

$\Rightarrow\quad y-48=\frac{65}{7}(x-2.4)$

將 $y=45$ 代入，得 $45-48=\frac{65}{7}(x-2.4)\quad\Rightarrow\quad x\approx2.08\text{hr}$

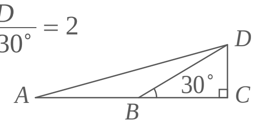
間隔約為 2 小時 4.8 分鐘，即 14：05

8　三角

概念 1　銳角三角函數

1.(1) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　(2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　參見課後練習本 P.34

$\overline{BC}=\frac{\overline{CD}}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}$，$\overline{AB}=\overline{BD}=\frac{\overline{CD}}{\sin30^\circ}=2$



(1) $\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}$

$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(2)$\because$ $\overline{AB}=\overline{BD}$

$\therefore\angle A=\angle ADB=\frac{1}{2}\angle CBD=15^\circ$

$\cos15^\circ=\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2.(1) >　(2) <　(3) >

如右圖，設圓半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$

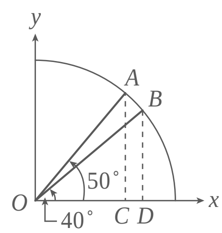
則 $\overline{AC}=\sin50^\circ$，$\overline{BD}=\sin40^\circ$

$\overline{OC}=\cos50^\circ$，$\overline{OD}=\cos40^\circ$

(1) $\sin50^\circ>\sin40^\circ$

(2) $\cos50^\circ<\cos40^\circ$

(3) $\sin50^\circ>\cos50^\circ$



3.(C)

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}+\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}$$

4.(1) $\frac{1}{8}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ (\frac{\sqrt{5}}{2})^2=1+2\sin\theta\cos\theta\ \Rightarrow\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

又 $0^\circ<\theta<45^\circ$ $\therefore \sin\theta<\cos\theta$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

概念 2 廣義角三角函數

5.3

$$\frac{\cos150^\circ+\sin240^\circ}{\tan(-30^\circ)}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=3$$

6.$-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\because$ θ 是第一象限角且 $\tan\theta=3$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

7.135°

$x^2-a=0$ 的兩根為 $x=\pm\sqrt{a}$

$\therefore$ $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 互為相反數

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ \Rightarrow\ (-\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow\ 2\cos^2\theta=1\ \Rightarrow\ \cos^2\theta=\frac{1}{2}$，又 $90^\circ\le\theta\le270^\circ$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，故 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore \theta=135^\circ$

8.(E)

化成銳角三角函數，$\sin146^\circ=\sin34^\circ$，$\sin219^\circ=-\sin39^\circ$，$\sin292^\circ=-\sin68^\circ$，$\sin365^\circ=\sin5^\circ$

又當 θ 為銳角時，θ 愈大，$\sin\theta$ 就愈大

$\therefore -\sin68^\circ<-\sin39^\circ<\sin5^\circ<\sin34^\circ<\sin73^\circ$

即 $\sin292^\circ<\sin219^\circ<\sin365^\circ<\sin146^\circ<\sin73^\circ$

故這五個數值的中位數是(E) $\sin365^\circ$

9.(1) < (2) < (3) <

(1) $\sin\pi=0$，$\sin\pi^\circ\approx\sin3.14^\circ>0$ $\therefore \sin\pi<\sin\pi^\circ$

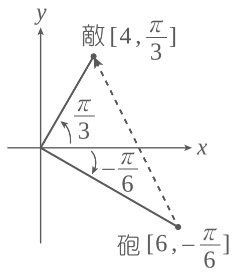
(2) 1 弧度約為 57.3°，$\cos1\approx\cos57.3^\circ<\cos1^\circ$

(3) $\frac{90}{3.14}\approx28.66$ 即 90 弧度約為 28.66π，為第二象限角

$\therefore \cos90<0$，又 $\cos90^\circ=0$

$\therefore \cos90<\cos90^\circ$

10.$2\sqrt{13}$



敵 $[4,\frac{\pi}{3}]=(4\cos\frac{\pi}{3},4\sin\frac{\pi}{3})$

$=(2,2\sqrt{3})$

砲 $[6,-\frac{\pi}{6}]=(6\cos(-\frac{\pi}{6}),6\sin(-\frac{\pi}{6}))$

$=(3\sqrt{3},-3)$

$\therefore$ 砲彈射程為

$\sqrt{(3\sqrt{3}-2)^2+(-3-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

概念 3 正弦定理

11.$2\sqrt{6}$

由 $\angle A=75^\circ$，$\angle B=45^\circ$

得 $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=60^\circ$

由正弦定理 $\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}\ \Rightarrow\ \frac{6}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin45^\circ}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{6\sin45^\circ}{\sin60^\circ}=\frac{6\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{6}$

12.$\sqrt{6}+\sqrt{2}:2\sqrt{2}:2\sqrt{3}$

$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$ 且 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

$\therefore \angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=75^\circ$

由正弦定理 $\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}$

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\sin C:\sin A:\sin B$

$=\sin75^\circ:\sin45^\circ:\sin60^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}:2\sqrt{2}:2\sqrt{3}$

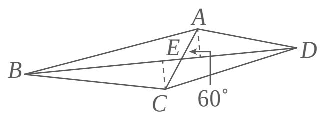
13.$\sqrt{3}$

設 $ABCD$ 的外接圓半徑為 R，由正弦定理知

$\frac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=2R=\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{\sin45^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}$

$\therefore \overline{BC}=\frac{\sqrt{2}\sin60^\circ}{\sin45^\circ}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$

14.$\sqrt{3}$



設 $\overline{AC}=1$，$\overline{BD}=4$

$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E 點且

$\angle AED=\angle BEC=60^\circ$

四邊形 $ABCD$ 面積 $=\Delta ABD$ 面積 $+\Delta BCD$ 面積

$=\frac{1}{2}\overline{BD}\times(\overline{AE}+\overline{CE})\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AC}\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

概念 4 餘弦定理

15.$3\sqrt{3}$

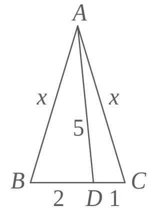
設 $\overline{AB}=\overline{AC}=x$，在 ΔABD 和 ΔACD 中

由餘弦定理 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$

$$\frac{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{BD}}=-\frac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}$$

即 $\frac{5^2+2^2-x^2}{2\cdot5\cdot2}=-\frac{5^2+1^2-x^2}{2\cdot5\cdot1}$

$\therefore x=3\sqrt{3}$，即 $\overline{AB}=3\sqrt{3}$



16. $\sqrt{21}$

$\because$ $ABCD$ 是圓內接四邊形

$\therefore$ $\angle B+\angle D=180^\circ$，$\cos B=-\cos D$

在 ΔABC 和 ΔADC 中，由餘弦定理

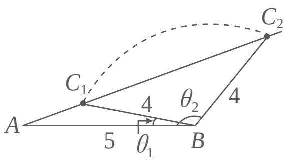
$$\cos B=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=-\frac{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{CD}}=-\cos D$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2^2+3^2-\overline{AC}^2}{2\times2\times3}=-\frac{6^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times6\times5}\quad\Rightarrow\quad \overline{AC}^2=21$$

$\therefore$ $\overline{AC}=\sqrt{21}$

17. (B)(E)

如右圖，C 點有兩個可能的位置 $\angle B$ 有兩個可能的值 θ_1 和 θ_2，因此無法確定(A) $\angle B$ 的餘弦值、(C) ΔABC 的面積、(D) ΔABC 的內切圓半徑



$\because$ $\angle AC_1B+\angle AC_2B=180^\circ$　$\therefore$ $\sin\angle AC_1B=\sin\angle AC_2B$

即可以確定(B) $\angle C$ 的正弦值，利用正弦定理，外接圓直徑 $=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$，因此也可以確定(E) ΔABC 的外接圓半徑

概念 5　和角、差角公式

18. $-\frac{1}{2}$

由差角公式得 $\cos141^\circ\cos21^\circ+\sin141^\circ\sin21^\circ$

$=\cos(141^\circ-21^\circ)=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$

19. $\frac{3-\sqrt{6}}{6}$

$\because$ $180^\circ<\theta<360^\circ$ 且 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\sin(\theta+60^\circ)=\sin\theta\cos60^\circ+\cos\theta\sin60^\circ$

$=(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})\times\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$

20. $\sqrt{3}$

$\because$ $\tan(63^\circ+57^\circ)=\frac{\tan63^\circ+\tan57^\circ}{1-\tan63^\circ\tan57^\circ}$

$\Rightarrow$　$-\sqrt{3}=\frac{\tan63^\circ+\tan57^\circ}{1-\tan63^\circ\tan57^\circ}$

$\Rightarrow$　$\sqrt{3}\tan63^\circ\tan57^\circ-\sqrt{3}=\tan63^\circ+\tan57^\circ$

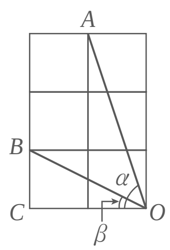
$\Rightarrow$　$\sqrt{3}\tan63^\circ\tan57^\circ-\tan63^\circ-\tan57^\circ=\sqrt{3}$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

設 $\angle AOC=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，則 $\theta=\alpha-\beta$

且由右圖可知 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$



$\therefore$ $\sin\theta=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

22. 3

$\tan\angle AEB=\tan(180^\circ-\angle AED-\angle BEC)$

$=-\tan(\angle AED+\angle BEC)$

$=-\frac{\tan\angle AED+\tan\angle BEC}{1-\tan\angle AED\tan\angle BEC}=-\frac{1+2}{1-1\times2}=3$

概念 6　倍角、半角公式

23. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$；$-\frac{7}{9}$；$\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\because$ θ 是第四象限且 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=-2\sqrt{2}$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})\times\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\frac{1}{3})^2-1=-\frac{7}{9}$

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{-4\sqrt{2}}{1-(-2\sqrt{2})^2}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

24. $\frac{\sqrt{15}}{5}$；$\frac{\sqrt{10}}{5}$；$\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\because$ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$　$\therefore$ $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ 為第一象限角，又 $\cos\theta=-\frac{1}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{1}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+(-\frac{1}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{1}{5})}{1+(-\frac{1}{5})}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

25. $-\frac{1}{3}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+\sin2\theta=1+(-\frac{8}{9})=\frac{1}{9}$

又 $135^\circ<\theta<180^\circ$

$\therefore$ $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ 且 $|\cos\theta|>|\sin\theta|$

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$

26. $\frac{1}{4}$

$\cos36^\circ\cos72^\circ=\frac{2\cdot(2\sin36^\circ\cos36^\circ)\cos72^\circ}{2\cdot2\sin36^\circ}$

$=\frac{2\sin72^\circ\cos72^\circ}{4\sin36^\circ}=\frac{\sin144^\circ}{4\sin36^\circ}=\frac{\sin36^\circ}{4\sin36^\circ}=\frac{1}{4}$

概念 7　三角測量

27. 62

設 P 點在地面的投影點為 Q，設山高 $\overline{PQ}=h$

則 $\overline{AQ}-\overline{BQ}=37$，即 $\frac{h}{\tan 13^\circ}-\frac{h}{\tan 15^\circ}=37$

$\Rightarrow \quad \frac{h}{0.231}-\frac{h}{0.268}=37 \quad \Rightarrow \quad \frac{(0.268-0.231)h}{0.231\times 0.268}=37$

$\Rightarrow \quad \frac{0.037h}{0.231\times 0.268}=37 \quad \Rightarrow \quad h=61.908\approx 62$

28. $600+300\sqrt{3}$

設飛機在地面的投影點為 D 點，飛機高為 h 公尺

則 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{h}{\tan 75^\circ}=\frac{h}{2+\sqrt{3}}$

$\therefore$ D 點為 ΔABC 的外心，$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 為 ΔABC 的外接圓半徑 R

由正弦定理 $\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}=2R=\frac{2h}{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \frac{300}{\sin 30^\circ}=\frac{2h}{2+\sqrt{3}}$

$\therefore\ h=\frac{300(2+\sqrt{3})}{2\sin 30^\circ}=600+300\sqrt{3}$

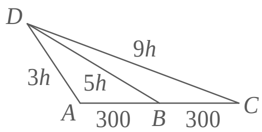
29. $30\sqrt{5}$

設金字塔底為 D，塔頂為 E，高 $\overline{DE}=h$

則 $h=\overline{AD}\tan\alpha=\overline{BD}\tan\beta=\overline{CD}\tan\gamma$

即 $\overline{AD}=3h$，$\overline{BD}=5h$，$\overline{CD}=9h$

作圖如右，由餘弦定理



$\cos A=\frac{\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}{2\overline{AD}\times\overline{AB}}$

$=\frac{\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}{2\overline{AD}\times\overline{AC}}$

$\Rightarrow \quad \frac{9h^2+300^2-25h^2}{2\cdot 3h\cdot 300}=\frac{9h^2+600^2-81h^2}{2\cdot 3h\cdot 600} \quad \Rightarrow \quad h^2=4500$

$\therefore\ h=30\sqrt{5}$

9 直線與圓

概念 1 直線的斜率與方程式

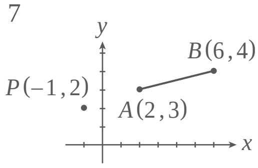
1. $-\frac{7}{2}\le k\le -3$ 參見課後練習本 P.39

$L: x+ky-2k+1=0 \quad \Rightarrow \quad y-2=\frac{-1}{k}(x+1)$

$\therefore$ L 恆過 $P(-1,2)$，斜率為 $-\frac{1}{k}$

$m_{\overline{AP}}=\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$，$m_{\overline{BP}}=\frac{2-4}{-1-6}=\frac{2}{7}$

$\because$ L 與 $\overline{AB}$ 相交 $\quad \therefore\ \frac{2}{7}\le -\frac{1}{k}\le\frac{1}{3}$



$\Rightarrow \quad 3\le -k\le\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{2}\le k\le -3$

2. $2x+3y=12$

設 $L: y-2=m(x-3)$，與兩軸交點為 $(3-\frac{2}{m},0)$、$(0,2-3m)$

$\therefore$ L 與兩軸所圍的三角形面積為 $\frac{1}{2}(3-\frac{2}{m})(2-3m)=12$

$\Rightarrow \quad 9m+\frac{4}{m}+12=0 \quad \Rightarrow \quad 9m^2+12m+4=0$

$\therefore\ (3m+2)^2=0$，$m=\frac{-2}{3}$

故 L：$y-2=\frac{-2}{3}(x-3)$，即 $2x+3y=12$

3. 4

$L: x+ky-2k+1=0 \quad \Rightarrow \quad y-2=-\frac{1}{k}(x+1)$

恆過 $P(-1,2)$，設 L 與兩軸交於 $(-a,0)$、$(0,b)$

則可設 L：$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$

$\because$ $P(-1,2)$ 在 L 上 $\quad \therefore\ \frac{-1}{-a}+\frac{2}{b}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$

由算幾不等式 $\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})\ge\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{b}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ge\sqrt{\frac{2}{ab}}$

$\Rightarrow \quad ab\ge 8$

$\therefore$ L 與兩軸在第二象限內所圍成的三角形面積

$=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\cdot 8=4$，最小值為 4

概念 2 兩直線的關係

4. (A)(E)

$kx+2y=1$ 與 $2x+ky=0$ 的斜率相同時，方程組無解

即 $\frac{-k}{2}=-\frac{2}{k} \quad \Rightarrow \quad k^2=4$

$\therefore\ k=2$ 或 -2 時，方程組無解

5. 5

$L: x+2y=8$ 的斜率為 $-\frac{1}{2}$，其垂直線斜率為 2

$\therefore$垂直 L 且過 A 的直線為 $y-1=2(x-1)$

$A(1,1)$ 在 $x+2y=8$ 的投影點 Q：$\begin{cases}x+2y=8\\ y-1=2(x-1)\end{cases}$

$\Rightarrow \quad Q(x,y)=(2,3)$

$\therefore$ A 對 L 的對稱點 $A'(a,b)$ 滿足 $(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2})=(2,3)$

$\Rightarrow \quad A'(a,b)=(3,5)$

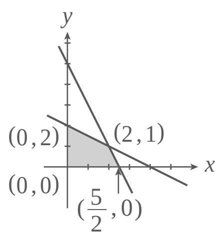
由三角形兩邊長的和大於第三邊知

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\ge\overline{A'B}=\sqrt{(3-3)^2+(5-0)^2}=5$

概念 3 線性規劃

6. $\frac{1}{2}\le k\le 2$

由頂點法，考慮可行解區域四個頂點代入 $x+ky$ 的值



(x,y)	$(0,0)$	$(0,2)$	$(\frac{5}{2},0)$	$(2,1)$
$x+ky$	0	$2k$	$\frac{5}{2}$	$2+k$

$\because$在 $(2,1)$ 處有最大值，因此有

$\begin{cases}2+k\ge 0\\ 2+k\ge 2k\\ 2+k\ge\frac{5}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\le k\le 2$