

目次

第1回 1

數與式

建議完成時間 7月第2週

謝瓊瑤 老師

第2回 5

多項式函數

建議完成時間 7月第3週

李宗憲 老師

第3回 10

指數、對數函數

建議完成時間 7月第4週

巫權祐 老師

第4回 14

數列與級數

建議完成時間 8月第1週

黃信淳 老師

第5回 20

排列、組合

建議完成時間 8月第2週

蔡景州 老師

第6回 24

機率

建議完成時間 8月第3週

王香評 老師

第7回 29

數據分析

建議完成時間 8月第4週

洪榮良 老師

第8回 34

三角

建議完成時間 9月第1週

郭士彰 老師

第9回 39

直線與圓

建議完成時間 9月第2週

蔡承哲 老師

第10回 43

平面向量

建議完成時間 9月第3週

王安蘭 老師

第11回 47

空間向量

建議完成時間 9月第4週

林遠森 老師

第12回 51

空間中的平面與直線

建議完成時間 10月第1週

高孟鋤 老師

第13回 56

矩陣

建議完成時間 10月第2週

任維勇 老師

第14回 61

二次曲線

建議完成時間 10月第3週

張立群 老師

第15回 66

學測全範圍

建議完成時間 10月第4週

葉晉宏 老師



機 率

完成日期

月

日



臺中一中

王 香 評 老師



第壹部分：選擇題（占 55 分）

一、單選題（占 25 分，每題 5 分）

1. 設 A 、 B 為樣本空間 S 中的兩事件， $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A' \cup B) = \frac{4}{5}$ ， $P(B|A') = P(B)$ ，則 A 、 B 至少有一事件發生的機率為何？
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{7}{15}$ (E) $\frac{11}{15}$
2. 擲四個公正硬幣，每個硬幣出現正面、反面的機率相等，下列事件何者機率最大？
(A)四次正面 (B)三次正面，一次反面
(C)兩次正面，兩次反面 (D)至少三次正面
(E)正面次數比反面次數多
3. 已知 $\log_a b$ 有意義，且 a 、 b 為 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的兩個相異整數，則 $\log_a b$ 為有理數的機率為何？
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{3}{16}$
4. 將圖 1 塗上黑、白、灰、紅、黃、綠、藍、橘八種顏色，一區一色，圖形不得轉動，若黑、白、灰三色不相鄰的機率為 $\frac{a}{56}$ ，則 $a = ?$
(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

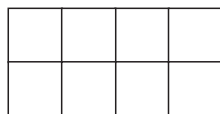


圖 1

5. 小明將六個 7 寫成一列，在相鄰的 7 之間隨機決定是否放入「+」，放與不放機率相等，但第一個 7 之前與最後一個 7 之後不放「+」，形成一個加法算式，最後再計算其和，如： $77+777+7$ ，和為 861，也可都不放「+」，和為 777777，則小明可以得到幾種不同的和？
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

二、多選題（占 30 分，每題 5 分）

6. 編號為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 的十張卡片，每張被取出的機率相等，從中任取一張。已知事件 $A=\{2,4,6,8,10\}$ 、 $B=\{7,8,9,10\}$ 為獨立事件，則下列哪些選項中的事件也是獨立事件？
- (A)「號碼為偶數」的事件與「號碼大於 6」的事件
(B)「號碼為奇數」的事件與「號碼大於 6」的事件
(C)「號碼為偶數」的事件與「號碼小於 6」的事件
(D)「號碼為奇數」的事件與「號碼小於 7」的事件
(E)「號碼為偶數」的事件與「號碼小於 7」的事件
7. 某人到夜市玩夾娃娃機，機器的設定為：
- ①每次 10 元，一次最多夾中一隻娃娃，第一次就夾中的機率為 $\frac{1}{7}$
②若沒夾中，可以考慮再投 10 元續關，此時夾中的機率會提高成兩倍
③若夾中，則不能再續關。再投 10 元，夾中的機率仍為 $\frac{1}{7}$
- 某人最後花了 20 元，則下列選項哪些正確？
- (A)夾中兩隻娃娃的機率為 $\frac{1}{49}$
(B)第一次沒夾中且第二次才夾到娃娃的機率為 $\frac{2}{7}$
(C)只夾中一隻娃娃的機率為 $\frac{18}{49}$
(D)完全沒夾中的機率為 $\frac{36}{49}$
(E)已知只有夾中一隻娃娃，則是第二次才夾到的機率為 $\frac{2}{3}$

8. 從撲克牌中拿出黑桃 $J、Q、K$ ，紅心 $J、Q、K$ ，梅花 $J、Q、K$ ，將九張牌放入箱子中，從中任取三張，每張牌被取到的機率相等。若三張牌中，恰有兩種花色的事件為 A ，恰有兩種點數的事件為 B ，則下列選項哪些正確？

- (A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(A) = \frac{9}{14}$ (C) $P(A \cap B) = \frac{3}{14}$
 (D) $P(B|A) = \frac{1}{3}$ (E) $P(A|B) = \frac{2}{3}$

9. 學科能力測驗的科目共有國文、英文、數學、自然、社會五科，每科滿級分為 15 級分，若小毛的成績為 70 級分，且恰有三科同級分，則下列選項哪些正確？

- (A) 五科的級分共有 20 種不同的情形
 (B) 五科中，最低可能為 11 級分
 (C) 至少有一科為滿級分
 (D) 國、英、數三科級分相同的機率為 $\frac{3}{5}$
 (E) 小毛想申請的校系必須國、英、數皆滿級分，則符合申請資格的機率 $\frac{1}{15}$

10. 某大學在 100 學年度一、二、三、四年級的人數比為 $4:2:1:3$ ，而分別調查各年級的住宿率，結果如表 1，若全校學生的住宿率為 0.6，則下列選項哪些正確？

表 1

年級	一	二	三	四
住宿率	0.8	0.3	p	0.6

- (A) 三年級學生的住宿率 $p=0.4$
 (B) 任選一名學生，此人為二年級的機率為 0.3
 (C) 任選一名學生，此人為二年級且住宿的機率為 0.3
 (D) 任選一名住宿生，則此人為二年級的機率為 0.1
 (E) 任選一名住宿生，則此人為三年級的機率為 0.4

11. 從 1000 ~ 9999 中任取一個四位數，將數字由大到小重新排列，產生一個新的四位數，例如取到 2012，則重新排列後為 2210，則下列選項哪些正確？
- (A)重新排列後所有可能的四位數有 210 個
- (B)任取一個四位數，重新排列後得「8521」的機率為 $\frac{1}{375}$
- (C)任取一個四位數，重新排列後得「9553」的機率為 $\frac{1}{750}$
- (D)任取一個四位數，重新排列後得「7610」的機率為 $\frac{1}{500}$
- (E)任取一個四位數，重新排列後得「原數字」的機率為 $\frac{7}{300}$



第貳部分：選填題（占 45 分，每題 5 分）

- A. A、B、C、D、E、F 6 人相約看電影，座位在同一排連續的 10 號至 15 號，若 A 的號碼大於 B，則 A、B 兩人位置相鄰的機率為 $\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。（化為最簡分數）
- B. 老師為了將報名參加籃球比賽的 15 位同學分成三組，先讓同學任意由 1 ~ 15 號中選一個數字，每人皆相異，再依該數字除以 3 的餘數為 0、1、2 分組，餘數相同的為同一組，若甲、乙都選到偶數，則他們兩人在同一組的機率為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15} \textcircled{16}}$ 。（化為最簡分數）
- C. 電子計算機的數字正確顯示為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，故障的螢幕卻使某些線條可能隨機消失，如：「ㄥ」可能是 5、8、0，若小毛按了一個二位數字，顯示出來卻變成「ㄣㄥ」，則此二位數大於 40 的機率為 $\frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。（化為最簡分數）
- D. 某工廠生產的產品依以往統計有 4% 為瑕疵品，出貨之前由檢驗員加以篩選，篩選為正常品的才能販售給顧客，而檢驗員對於正常品的正確判斷率為 95%，對於瑕疵品的正確判斷率為 90%。若顧客買了該工廠的一件產品，則此產品為瑕疵品的機率為 $\frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20} \textcircled{21} \textcircled{22}}$ 。（化為最簡分數）

E. 學校推行的整潔競賽是每週從同年級中選出兩個整潔表現優秀的班級，並發予鼓勵的獎旗，高二 A、B 兩班在第 1 週至第 10 週中分別都獲得了 3 面獎旗，則兩班有同週得到獎旗的機率為 $\frac{\textcircled{23} \textcircled{24}}{\textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。(化為最簡分數)

F. 學校有兩隊籃球校隊，A 隊實力較好，每場獲勝的機率為 $\frac{2}{3}$ ，B 隊實力略遜一籌，每場獲勝的機率為 $\frac{3}{5}$ ，且各隊勝負互不影響。今兩隊同時代表學校參加校外比賽，A 隊有兩場比賽，B 隊有一場比賽，則 A、B 隊共獲勝兩場的機率為 $\frac{\textcircled{27}}{\textcircled{28}}$ 。(化為最簡分數)

G. 甲袋中有 3 個紅球、2 個白球、1 個黑球，乙袋中有 3 個紅球、3 個白球，丙袋中有 4 個紅球、2 個黑球，任意選取兩袋，再分別從袋中取出一球，則所取到兩球同色的機率為 $\frac{\textcircled{29} \textcircled{30}}{\textcircled{31} \textcircled{32} \textcircled{33}}$ 。(化為最簡分數)

H. 小毛參加了「十萬大學堂」的答題拿獎金活動，題目共有 5 題，並有 2 張「求救卡」，小毛答對率為 0.4，使用求救卡的話必能答對題目，若 5 題都答對，即可獲得十萬元獎金。已知小毛闖關成功，則他只有使用了一張「求救卡」的機率為 $\frac{\textcircled{34} \textcircled{35}}{\textcircled{36} \textcircled{37} \textcircled{38}}$ 。(化為最簡分數)

I. 袋中有 5 顆球，分別編號為 1、2、3、4、5，每球被取出的機率相等，一次取一球，取出不放回。若取球的號碼大於前一次的號碼，則可以繼續取球，否則就停止。如：1 → 2 → 5 → 3 (停止)，5 → 2 (停止)，則所有被取到的球號碼總和為 8 的機率為 $\frac{\textcircled{39}}{\textcircled{40} \textcircled{41}}$ 。(化為最簡分數)

詳細解說請參見詳解本 p.13

I. 進門的方法： $C_2^4 \times 2! = 12$ 種

出門的方法：

① 曉明從曉心進來的門出去： $1 \times 3 = 3$ 種

② 曉明不是從曉心進來的門出去： $2 \times 2 = 4$ 種

全部的方法 $= 12 \times (3 + 4) = 84$ 種

第 6 回

請參見內容 p.24

1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (C) 5. (D) 6. (A)(B)(D)(E)
7. (A)(C)(E) 8. (A)(B)(E) 9. (B)(C)(E) 10. (A)(D) 11. (B)(C)(D)
A. ⑫1 ⑬3 B. ⑭5 ⑮2 ⑯1 C. ⑰2 ⑱3
D. ⑲1 ⑳2 ㉑2 ㉒9 E. ㉓1 ㉔7 ㉕2 ㉖4
F. ㉗4 ㉘9 G. ㉙4 ㉚1 ㉛1 ㉜0 ㉝8
H. ㉞2 ㉟5 ㊱1 ㊲5 ㊳2 I. ㊴7 ㊵6 ㊶0

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 由題設 $P(B|A') = P(B)$

$$\Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = P(B)$$

$$\therefore P(A' \cap B) = P(A')P(B),$$

即 A' 、 B 為獨立事件

則 A 、 B 也是獨立事件

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\text{又 } P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{2}{3}P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

則 A 、 B 至少有一事件發生之機率為

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

故選(B)

2. (A) $(\frac{1}{2})^4$ (B) $C_1^4 \cdot (\frac{1}{2})^4$

(C) $C_2^4 (\frac{1}{2})^4$ (D) $(C_3^4 + C_4^4) (\frac{1}{2})^4$

(E) 3 正 1 反或 4 正 $\Rightarrow (C_3^4 + C_4^4) (\frac{1}{2})^4$

$\therefore$ 2 正 2 反之機率最大

故選(C)

3. $\log_a b$ 有意義 $\Rightarrow a \neq 1$

$\therefore (a, b)$ 可能的情形有 $8 \times 8 = 64$ 種

又其中 $\log_a b$ 為有理數的情形為

$(a, b) = (2, 1), (3, 1), \dots, (9, 1), (2, 4),$
 $(2, 8), (3, 9), (4, 8), (4, 2), (8, 2),$
 $(9, 3), (8, 4)$

共有 16 種

$$\therefore \text{機率為 } \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

故選(C)

4. 將圖形各區編號如右

1	2	3	4
5	6	7	8

，則黑、白

、灰三色可塗在 $(1, 3, 6), (1, 3, 8), (1, 4, 6), (1, 4, 7),$
 $(1, 6, 8), (2, 4, 5), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (2, 5, 8),$
 $(3, 5, 8), (3, 6, 8), (4, 5, 7)$ ，共 12 種

$$\therefore \text{黑、白、灰不相鄰之機率為 } \frac{5! \times 3! \times 12}{8!} = \frac{12}{56}$$

故選(C)

5. 因為 $77 + 777 + 7 = 77 + 7 + 777 = 777 + 77 + 7$ ，放入 2 個「+」，拆成「3+2+1」的和都相同，因此討論「將 6 分解為正整數的和」有幾種方法即可

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$$

$$= 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$$

$$= 1 + 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 3$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

共 11 種

故選(D)

二、多選題

6. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 為取到偶數之事件， $P(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{7, 8, 9, 10\}$ 為大於 6 之事件， $P(B) = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{10} = P(A)P(B)$$

則 A 、 B 為獨立事件，由獨立事件之性質可知， A' 和 B 、 A 和 B' 、 A' 和 B' 皆為獨立

故(A)(B)(D)(E)皆正確

另外，號碼小於 6 之事件為 $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } A \cap C = \{2, 4\}, P(A \cap C) = \frac{2}{10} \neq P(A)P(C)$$

$\therefore A$ 、 C 不為獨立事件

故(C)錯誤

故選(A)(B)(D)(E)

$$\begin{aligned} 7. & \begin{cases} \frac{1}{7} \text{ 中 } \xrightarrow{\text{投10元}} \frac{1}{7} \text{ 中 } \Rightarrow \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49} \text{ 中2隻} \\ \frac{1}{7} \text{ 中 } \xrightarrow{\text{投10元}} \frac{6}{7} \text{ 不中 } \Rightarrow \frac{1}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{49} \\ \frac{6}{7} \text{ 不中 } \xrightarrow{\text{續開}} \frac{2}{7} \text{ 中 } \Rightarrow \frac{6}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{12}{49} \\ \frac{6}{7} \text{ 不中 } \xrightarrow{\text{續開}} \frac{5}{7} \text{ 不中 } \Rightarrow \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{49} \text{ 沒夾中} \end{cases} \end{aligned}$$

故選(A)(C)(E)

8. 9張牌依花色分類，黑桃、紅心、梅花各3張，
依點數分類 J、Q、K 也是各3張

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_1^3 \times C_2^3 \times C_1^2 \times C_1^3}{C_3^9} = \frac{9}{14} = P(B)$$

∴ (A)(B) 正確

(C) 如：

	黑桃	紅心	梅花
J			
Q	✓	✓	
K	✓	✓	

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{C_2^3 \times C_2^3 \times C_3^4}{C_3^9} = \frac{3}{7}$$

∴ (C) 錯誤

$$(D) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

∴ (D) 錯誤

$$(E) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

∴ (E) 正確

故選(A)(B)(E)

9. 可考慮一共被扣5級分

又 $5 = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 = 0 + 0 + 0 + 2 + 3 = 0 + 1 + 1 + 1 + 2$

(A) ×；共有 $\frac{5!}{3!} \times 3 = 60$

(B) ○；可能有一科被扣4級分，最低為11級分

(C) ○；不論何種方式，必都有一科為滿級分

(D) ×；同級分之三科為國、英、數之機率為 $\frac{2! \times 3}{60} = \frac{1}{10}$

(E) ○；國、英、數皆滿級分之機率為 $\frac{2! \times 2}{60} = \frac{1}{15}$

故選(B)(C)(E)

10. (A) ○；利用樹狀圖

全校住宿率 0.6

$$= 0.4 \times 0.8 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times p$$

$$+ 0.3 \times 0.6$$

$$\Rightarrow p = 0.4$$

(B) ×；二年級之機率為 $\frac{2}{10} = 0.2$

(C) ×；二年級且住宿之機率為 $0.2 \times 0.3 = 0.06$

(D) ○； $P(\text{二年級} | \text{住宿生}) = \frac{0.2 \times 0.3}{0.6} = 0.1$

(E) ×； $P(\text{三年級} | \text{住宿生}) = \frac{0.1 \times 0.4}{0.6} = \frac{1}{15}$

故選(A)(D)

11. (A) ×；重新排列後的四位數為 $abcd$ ，

其中 $a \geq b \geq c \geq d$ ，有 $H_4^{10} - 1 = 714$ 個

(B) ○；由8、5、2、1組成的四位數，重新排列後皆為「8521」，有 $4! = 24$ 個，機率為 $\frac{24}{9000} = \frac{1}{375}$

(C) ○；由9、5、5、3組成的四位數，重新排列後皆為「9553」，有 $\frac{4!}{2!} = 12$ 個，機率為 $\frac{12}{9000} = \frac{1}{750}$

(D) ○；由7、6、1、0組成的四位數，重新排列後皆為「7610」，有 $3 \times 3! = 18$ 個，機率為 $\frac{18}{9000} = \frac{1}{500}$

(E) ×；若四位數為 $abcd$ 滿足 $a \geq b \geq c \geq d$ ，則重新排列後仍為原數，因此機率為 $\frac{714}{9000} = \frac{119}{1500}$

故選(B)(C)(D)

第貳部分：選填題

$$A. P(A、B \text{ 相鄰} | A > B) = \frac{5 \times 4!}{C_2^6 \times 4!} = \frac{1}{3}$$

B. 將1~15依除以3之餘數分類如下：

A：1, 4, 7, 10, 13

B：2, 5, 8, 11, 14

C：3, 6, 9, 12, 15

$P(\text{甲、乙同一組} | \text{甲、乙皆偶數})$

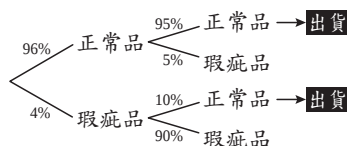
$$= \frac{\begin{matrix} \text{在A組} & \text{在B組} & \text{在C組} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2! + C_2^3 \times 2! + 2! \end{matrix}}{C_2^7 \times 2!} = \frac{5}{21}$$

C. 依題意得知

三可能為2、3、5、6、8、9，L可能為6、8、9

$$\text{所求機率} = \frac{4 \times 3}{6 \times 3} = \frac{2}{3}$$

D. 樹狀圖如右



$$\text{所求} = \frac{4\% \times 10\%}{96\% \times 95\% + 4\% \times 10\%} = \frac{40}{9160} = \frac{1}{229}$$

E. A班獲獎情形有 $C_3^{10} = 120$ 種

同理，B班也是 $C_3^{10} = 120$ 種

$$\begin{aligned} A、B \text{ 有同週得獎} &= \text{全} - (A、B \text{ 得獎恰錯開}) \\ &= 120 \times 120 - \frac{10!}{3!3!4!} = 10200 \end{aligned}$$

$$\text{所求} = \frac{10200}{120 \times 120} = \frac{17}{24}$$

F. A隊獲勝之機率為 $\frac{2}{3}$

B隊獲勝之機率為 $\frac{3}{5}$

3場勝2場的情形可能為：

① A得2勝，B負

② A得1勝1負，B勝

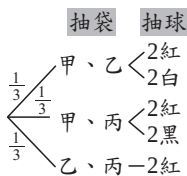
$$\text{所求} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + C_1^2 \cdot \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

G.可能情形如右

P(2球同色)

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6}$$

$$= \frac{9+6+12+2+12}{108} = \frac{41}{108}$$



H.P(只用一張求卡卡 | 答對5題)

$$= \frac{C_1^5 \times (0.4)^4}{(0.4)^5 + C_1^5 \times (0.4)^4 + C_2^5 \times (0.4)^3}$$

$$= \frac{2}{0.16 + 2 + 10} = \frac{25}{152}$$

I. $8 = 5 + 3 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$

因此取球順序可能有以下情形

$5 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

$$\Rightarrow P(\text{和為} 8) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{7}{60}$$

第7回

請參見內容 p.29

- 1.(C) 2.(D) 3.(A) 4.(C) 5.(B) 6.(A)(B)(D)(E)
7.(B)(D)(E) 8.(B)(D) 9.(A)(B)(C)(E) 10.(A)(C)(D)(E) 11.(E)
A. ⑫6 ⑬2 ⑭8 ⑮3 ⑯6 B. ⑰1 C. ⑱1 ⑲0
D. ⑳0 E. ㉑7 ㉒3 ㉓5 F. ㉔3 ㉕4 ㉖2
G. ㉗7 ㉘4 ㉙3 H. ㉚9 I. ㉛6 ㉜8 ㉝1

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 根據定義，故選(C)

2. 根據題意可以得到方程組：

$$\begin{cases} \frac{x_2 + x_3}{2} = 2 \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 2 \\ \sigma = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4 \times 2^2 \right)} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20 \end{cases}$$

又因為四個數都是正整數

根據第一個式子知

$$x_2 = 1, x_3 = 3 \text{ 或 } x_2 = 2, x_3 = 2,$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_4 = 3 \text{ 或 } x_1 = 2, x_4 = 2$$

代入第三個式子，只有 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 或 $x_3 = 3,$

$x_4 = 3$ 滿足條件，所以四個數分別是 1、1、3、3

故選(D)

3. 給出一組樣本資料，必可作出相應的散布圖，但不一定能分析出兩個變量的關係，更不一定符合線性相關或有函數關係

故選(A)

$$4. \because x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < -2$$

$$\text{可得 } -x_1 > -x_2 > -x_3 > -x_4 > -x_5 > 2$$

$$\text{故 } -x_1 > -x_4 > 2 > x_5 > x_3 > x_2$$

$$\text{所以中位數} = \frac{2 + x_5}{2}$$

故選(C)

$$5. \text{標準差 } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2}$$

$$\text{原來的算術平均數 } \mu = \frac{\sum_{i=1}^{48} x_i}{48} = 70,$$

$$\text{標準差 } \sigma = \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{i=1}^{48} x_i^2 - 70^2}$$

$$\text{後來的算術平均數 } \mu' = \frac{\sum_{i=1}^{48} x_i - 50 + 80 - 100 + 70}{48}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{48} x_i}{48} = 70$$

$$\begin{aligned} \text{標準差 } \sigma_1 &= \sqrt{\frac{1}{48} \left(\sum_{i=1}^{48} x_i^2 - 50^2 + 80^2 - 100^2 + 70^2 \right) - 70^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{i=1}^{48} x_i^2 - \frac{1}{48} \times 1200 - 70^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{i=1}^{48} x_i^2 - 70^2 - 25} \\ &= \sqrt{\sigma^2 - 25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sigma_1^2 &= \sigma^2 - 25 = (\sigma + 5)(\sigma - 5) \\ &\geq (\sigma - 5)(\sigma - 5) = (\sigma - 5)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma - 5, \text{ 又 } \sigma_1^2 = \sigma^2 - 25 < \sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma_1 < \sigma$$

$$\therefore \sigma - 5 \leq \sigma_1 < \sigma$$

故選(B)

二、多選題

6. 第一組資料：

$$\mu_1 = \frac{5 \times 9}{9} = 5, M_1 = 5,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{9} (0^2 \times 9)} = 0$$

第二組資料由小至大排列為 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

$$\mu_2 = \frac{4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3}{9} = 5, M_2 = 5,$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{9} [3(4-5)^2 + 3(5-5)^2 + 3(6-5)^2]} = \sqrt{\frac{6}{9}}$$