CONTENTS

第 1 章　三　角

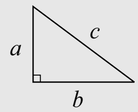
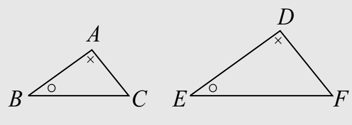
1-1　直角三角形的邊角關係

對我們來說，「長度」比「角度」更容易測量與計算，因此從直角三角形的邊長比值出發，我們將介紹六個三角函數的基本定義，加上以前學過的畢氏定理，可以得到這些三角函數之間的各種關係，對往後的學習是很重要的基礎，一定要學好！一定要熟透！

範例教學

溫　故　知　新

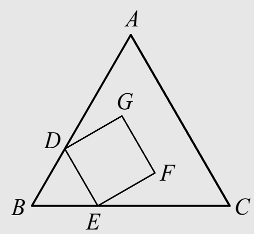
一、國中基礎知識

國二上	畢氏定理	又稱勾股定理、商高定理，直角三角形的兩股平方和等於斜邊平方 ⇒ $a^2+b^2=c^2$。 
國二下	三角形的邊角關係	◎三角形的內角和為 180°，且大角對大邊、小角對小邊。 ◎直角三角形角度為 30°-60°-90° 時，邊長比為 $2：1：\sqrt{3}$。 ◎任兩邊長之和會大於第三邊，任兩邊長之差會小於第三邊。
國三上	相似形	以 AA 相似性質最常用：兩三角形中，若二個內角對應相等，則兩三角形相似。  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

二、相關基測試題

◎右圖為正三角形 ABC 與正方形 $DEFG$ 的重疊情形，其中 D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BD}=\overline{BE}$。若 $\overline{AC}=18$，$\overline{GF}=6$，則 F 點到 $\overline{AC}$ 的距離為何？

(A) 2　(B) 3　(C) $12-4\sqrt{3}$　(D) $6\sqrt{3}-6$　【102 基測】



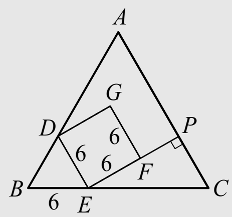
解 $\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=18-6=12$

$\because \Delta EPC$ 為 30°-60°-90°

$\therefore \overline{EP}=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

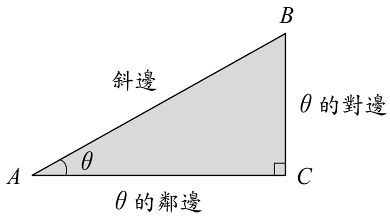
則 $\overline{FP}=\overline{EP}-\overline{EF}=6\sqrt{3}-6$

選(D)



一、銳角三角函數的基本定義

給任何一銳角 θ，即 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，作 ΔABC 使 $\angle A = \theta$，$\angle C$ 為直角，如右圖。



1. 定義 $\sin\theta = \dfrac{\theta\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，稱為 θ 的「正弦值」。

2. 定義 $\cos\theta = \dfrac{\theta\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，稱為 θ 的「餘弦值」。

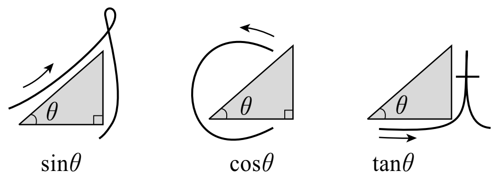
有了 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 之後，我們利用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 定義其它四個三角函數如下：

(1)定義 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，即 $\tan\theta = \dfrac{\theta\text{的對邊}}{\theta\text{的鄰邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，稱為 θ 的「正切值」。

(2)定義 $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$，即 $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，稱為 θ 的「餘切值」。

(3)定義 $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$，稱為 θ 的「正割值」。

(4)定義 $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$，稱為 θ 的「餘割值」。

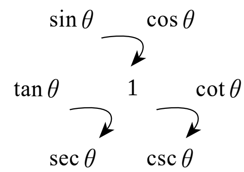


3. 注意：上述 $\cot\theta$、$\sec\theta$、$\csc\theta$ 皆為補充，高三才正式講授，本單元僅介紹基本定義。

二、基本恆等式

1. 平方關係：由直角三角形的畢氏（商高）定理，可推知：

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　(2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$　(3) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$。



2. 注意：$\sin\theta$ 的平方記為 $\sin^2\theta$，依此類推。

3. 餘角關係：對任一銳角 θ，其餘角為 $90^\circ - \theta$，由基本定義知：

(1) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$　(2) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

(3) $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$　(4) $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

(5) $\sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$　(6) $\csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$。

三、銳角三角函數值的變動趨勢

1. 若 θ 由 0° 增加到 90°，則 $\sin\theta$ 由 0 遞增到 1，$\cos\theta$ 由 1 遞減到 0，在 45° 時兩者相等，即 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

2. 若 θ 由 0° 增加到 90°，則 $\tan\theta$ 由 0 遞增到無限大。

(1) $\tan 45^\circ = 1$　(2) 0° 到 45°，$\tan\theta$ 值比 1 小　(3) 45° 到 90°，$\tan\theta$ 值比 1 大。

四、三角恆等式的證明

有關三角函數的等式證明，其題型瑣碎繁多，有的題目可以用不同的手法來證明，也有些題目證明時必須同時用到幾種手法。分為：

1. 由繁而簡：如 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\theta}$，由左式通分合併，逐步化成右式。

2. 兩邊各自化簡：如 $(\cos^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta})\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}+(\cos^2\theta-1)\tan^2\theta$，兩邊都化成相等的式子。

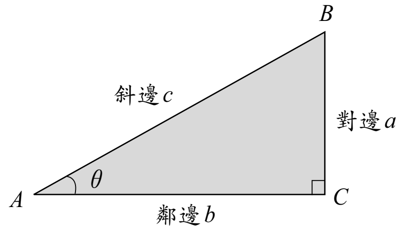
3. tan 化成 sin 與 cos：如 $\cos\theta(\tan\theta+2)(1+2\tan\theta)=\frac{2}{\cos\theta}+5\sin\theta$。

4. 左式減右式：如 $\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta-\sin\theta-1}=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}$，左式減右式後，通分合併化簡使分子為 0。

Part 1 銳角三角函數的定義

連連看，並大聲唸出：

$\sin\theta$	$\frac{\text{對邊 } a}{\text{鄰邊 } b}$	θ 的餘弦
$\cos\theta$	$\frac{\text{斜邊 } c}{\text{鄰邊 } b}$	θ 的餘割
$\tan\theta$	$\frac{\text{鄰邊 } b}{\text{對邊 } a}$	θ 的正弦
$\cot\theta$	$\frac{\text{對邊 } a}{\text{斜邊 } c}$	θ 的正切
$\sec\theta$	$\frac{\text{斜邊 } c}{\text{對邊 } a}$	θ 的餘切
$\csc\theta$	$\frac{\text{鄰邊 } b}{\text{斜邊 } c}$	θ 的正割



範例 1 銳角三角函數的定義　銳角 θ 有六個三角函數值，可以「知一得五」。 ★★★★☆

1. 直角 ΔABC，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，求 $\angle A$ 的六個三角形函數值：

⑴正弦值 $\sin A=$ ________　⑵餘弦值 $\cos A=$ ________　⑶正切值 $\tan A=$ ________

⑷餘切值 $\cot A=$ ________　⑸正割值 $\sec A=$ ________　⑹餘割值 $\csc A=$ ________。

解

KEY
cot、sec、csc 到高三會正式介紹，這邊先知道也不賴！

2. 銳角 θ，請心算求出各值：

(1)若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，則 $\cos\theta=$ ________，$\tan\theta=$ ________。

(2)若 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，則 $\sin\theta=$ ________，$\tan\theta=$ ________。

(3)若 $\tan\theta=\dfrac{24}{7}$，則 $\sin\theta=$ ________，$\cos\theta=$ ________。

解

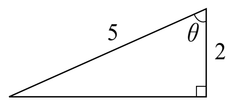
KEY
常用直角三角形的整數邊長比：
3：4：5
5：12：13
7：24：25
8：15：17
9：40：41

3. θ 為銳角，若 $\dfrac{2\tan\theta-1}{\tan\theta+2}=\dfrac{1}{8}$，求 $\sin\theta+\cos\theta=$ ________。

解

類題 1 直角 ΔABC，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=13$，$\overline{AC}=5$，求 $\sin A=$ ________，$\cos A=$ ________，$\tan A=$ ________，$\cot A=$ ________，$\sec A=$ ________，$\csc A=$ ________。

類題 2 如右圖，$\sin\theta=$ ________，$\cos\theta=$ ________，$\tan\theta=$ ________，$\cot\theta=$ ________，$\sec\theta=$ ________，$\csc\theta=$ ________。



類題 3 已知 θ 為銳角，滿足 $\dfrac{\tan\theta+2}{\tan\theta+1}=5-2\sqrt{3}$，求 $\sin\theta=$ ________，$\cos\theta=$ ________。

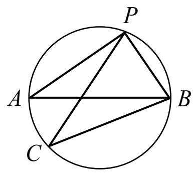
類題 4 銳角 θ，求：(1)若 $\sin\theta=\dfrac{7}{25}$，則 $\cos\theta=$ ________，$\tan\theta=$ ________

(2)若 $\cos\theta=\dfrac{8}{17}$，則 $\sin\theta=$ ________，$\tan\theta=$ ________。

類題 5 ΔABC 為直角三角形，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=1$，$\overline{CD}$ 為斜邊上的高，則 $\overline{BD}$ 的長為下列哪一個選項？________

(A) $\sin A$ (B) $\cos A$ (C) $\sin A\cos A$ (D) $\sin^2 A$ (E) $\cos^2 A$。

類題 6　如右圖，P、A、B、C 四點在圓上，且 $\overline{AB}$ 為直徑，$\overline{AB}=39$，$\sin\angle PCB=\dfrac{5}{13}$，求 $\overline{PA}+\overline{PB}=$______。



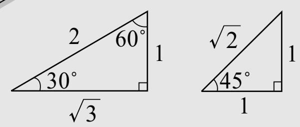
範例 2　特別角的三角函數

30°、45°、60° 是常見的特別角，並可作圖求出 15° 與 75°。★★★★★

1. (1) $\sin 30^\circ=$______，$\cos 30^\circ=$______，$\tan 30^\circ=$______，$\cot 30^\circ=$______，$\sec 30^\circ=$______，$\csc 30^\circ=$______。
   (2) $\sin 45^\circ=$______，$\cos 45^\circ=$______，$\tan 45^\circ=$______，$\cot 45^\circ=$______，$\sec 45^\circ=$______，$\csc 45^\circ=$______。

解

KEY



2. 求 $\sin 30^\circ\cos^2 45^\circ+\dfrac{1}{\cos 60^\circ}-\dfrac{\tan 30^\circ}{\sin 60^\circ}+\dfrac{\tan 45^\circ}{\tan^2 30^\circ}=$______。

解

KEY 習慣將 $(\sin\theta)^n$ 寫成 $\sin^n\theta$

3. 作圖求：(1) $\sin 15^\circ=$______　(2) $\sin 75^\circ=$______。

解

KEY
1. 運用外角性質
2. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

15° 和 75° 這兩個特別角的數字比較複雜，要背嗎？

在後續的單元有不少題目會用到 $\sin 15^\circ$ 與 $\sin 75^\circ$，遇到才推要花時間，還怕推錯卡住，所以不背是不行的。其實這兩個 sin 值只差中間加減號，很好記的，至於 $\cos 15^\circ$ 和 $\cos 75^\circ$ 就不用背了

類題 7 $\sin 60^\circ =$ ________，$\cos 60^\circ =$ ________，$\tan 60^\circ =$ ________，$\cot 60^\circ =$ ________，$\sec 60^\circ =$ ________，$\csc 60^\circ =$ ________。

類題 8 $\tan^2 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ - \dfrac{1}{\cos^2 60^\circ} + \dfrac{1}{\sin^2 30^\circ} - \dfrac{1}{\tan^2 60^\circ} =$ ________。

類題 9 若 $\theta = 30^\circ$，求 $\dfrac{\sin\theta + \sin\dfrac{3\theta}{2} + \sin 2\theta}{\dfrac{1}{\tan\theta\tan 2\theta} + \tan\dfrac{3\theta}{2}} =$ ________。

類題 10 若 $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = k(\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ)$，求 $k =$ ________。

類題 11 求 $\tan 15^\circ =$ ________，$\tan 75^\circ =$ ________。（要背，三角測量會用到）

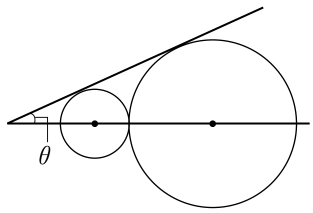
類題 12 求：(1) $\sin 22.5^\circ =$ ________ (2) $\tan 22.5^\circ =$ ________。

類題 13 若 $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2} =$ ________，$\tan\dfrac{\theta}{4} =$ ________。

範例 3 各種圖形求三角函數

許多進階的題目要先作輔助線，才能套定義求三角。 ★★★★★

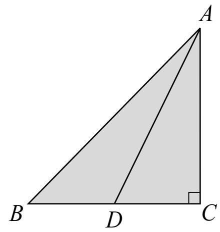
1. 兩圓互相外切，半徑分別為 2 與 5，若連心線與外公切線的夾角為 θ，如右圖，求 $\tan\theta =$ ________。



解

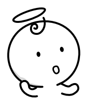
KEY 過小圓圓心作外公切線的平行線

2. 如右圖，等腰直角 ΔABC，$\angle C = 90^\circ$，$\overline{AC} = \overline{BC}$，$D$ 為 $\overline{BC}$ 中點，求 $\sin\angle BAD =$ ________。



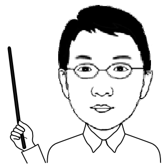
解

KEY ΔABD 用 $\overline{BD}$ 當底或 $\overline{AB}$ 當底，求出的面積相同



過 D 作 $\overline{AB}$ 的高 $\overline{DH}$，就是 $\overline{BD}$ 的長除以 $\sqrt{2}$，這樣不是很快嗎？幹嘛用面積？

面積是比較 *powerful* 的方法，希望同學學起來，這樣才能解類題 17



3. 銳角 ΔABC，$\overline{AB}=50$，若 $\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\cos C=\dfrac{8}{17}$，求：

⑴ $\overline{BC}=$______　⑵ ΔABC 的面積 $=$______。

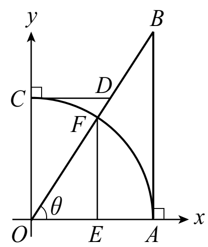
解

KEY
給你三角函數值，就等於知道邊長的比例

4. 如右圖，圓弧以原點為圓心，半徑為 1，試以 θ 的三角函數表示下列的線段長：

⑴ $\overline{EF}=$______　⑵ $\overline{OE}=$______　⑶ $\overline{AB}=$______

⑷ $\overline{CD}=$______　⑸ $\overline{OB}=$______　⑹ $\overline{OD}=$______。



解

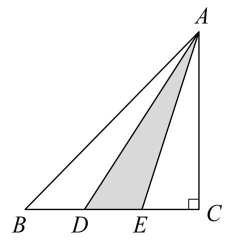
KEY
1. 利用 $\overline{OC}=\overline{OF}=\overline{OA}=1$ 當分母，找直角三角形化成三角函數
2. 六個三角函數依序為圖中的線段，記法口訣為：
「直橫　直橫　斜　斜」
　內　　外　　右　左

類題 14　兩圓互相外切，半徑分別為 a 與 b，$a>b$，若連心線與外公切線的夾角為 θ，以 a、b 表示 $\sin\theta=$______。

類題 15　扇形半徑為 30，中心角 60°，則內切圓半徑為______。

類題 16　正方形 $ABCD$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\tan\angle MAC=$______。

類題 17 如右圖，等腰直角 ΔABC，$\angle C = 90^\circ$，$\overline{AC} = \overline{BC} = 3$，$D$、$E$ 為 $\overline{BC}$ 上的三等分點，$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$，求 $\sin\angle DAE =$ ＿＿＿＿＿。



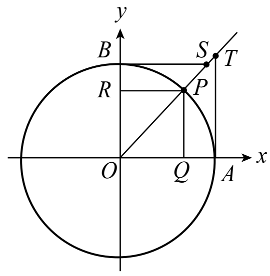
類題 18 銳角 ΔABC，$\overline{AB} = 10$，若 $\sin B = \dfrac{4}{5}$，$\cos C = \dfrac{15}{17}$，求：

(1) $\overline{BC} =$ ＿＿＿　(2) ΔABC 的面積 $=$ ＿＿＿。

類題 19 如右圖，A、P、B 在以原點為圓心的單位圓（半徑為 1 的圓）上，$\overline{PQ}$、$\overline{TA}$ 都垂直 x 軸，$\overline{PR}$、$\overline{SB}$ 都垂直 y 軸。若 $\angle POR = 43^\circ$，則下列敘述何者正確？＿＿＿

(A) $\overline{OS} = \sin 43^\circ$　(B) $\overline{OS} = \cos 43^\circ$　(C) $\overline{OS} = \tan 43^\circ$

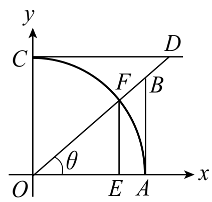
(D) $\overline{OS} = \dfrac{1}{\tan 43^\circ}$　(E) $\overline{OS} = \dfrac{1}{\cos 43^\circ}$。



類題 20 如右圖，$\overline{OA} = \overline{OC} = 1$，下列選項哪些正確？＿＿＿

(A) $\sin\theta = \overline{EF}$　(B) $\cos\theta = \overline{OA}$　(C) $\tan\theta = \overline{AB}$

(D) $\dfrac{1}{\tan\theta} = \overline{FB}$　(E) $\dfrac{1}{\cos\theta} = \overline{CD}$　(F) $\dfrac{1}{\sin\theta} = \overline{OB}$。



Part 2　三角函數的各種關係

範例 4　商數及餘角關係　從定義容易看出商數及餘角關係，注意角度！ ★★★★☆

1. 若 $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$，求 $\dfrac{2\sin\theta - 5\cos\theta}{3\sin\theta + \cos\theta} =$ ＿＿＿＿。

解

KEY　利用 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

2. $\dfrac{\sin 23^\circ}{\cos 67^\circ} + \dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} - \tan(45^\circ + \theta)\cdot\tan(45^\circ - \theta) =$ ＿＿＿＿。

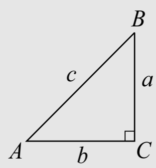
解

KEY　$A + B = 90^\circ$，稱 A、B 互餘，則

(1) $\sin A = \cos B = \dfrac{a}{c}$

(2) $\tan A = \cot B = \dfrac{a}{b}$

(3) $\sec A = \csc B = \dfrac{c}{b}$



3. $\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ =$ ________。

解

類題 21　θ 為銳角，若 $\tan\theta = 2$，求 $\dfrac{2\sin\theta + 4\cos\theta}{2\sin\theta - \cos\theta} =$ ______。

類題 22　θ 為銳角，若 $3\sin\theta = 5\cos\theta$，求 $\sin\theta =$ ________。

類題 23　設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，且 $\dfrac{4\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta} = \dfrac{14}{17}$，求 $\tan\theta =$ ______。

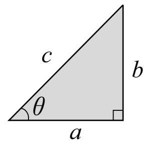
類題 24　$\dfrac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + \dfrac{\cos 31^\circ}{\sin 59^\circ} + \tan 22^\circ \tan 68^\circ =$ ______。

類題 25　$\tan 10^\circ \times \tan 20^\circ \times \tan 30^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan 50^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 70^\circ \times \tan 80^\circ =$ ______。

類題 26　化簡 $\dfrac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)} - \dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos\theta} =$ ______。

平方關係：__________________

【證】$\sin^2\theta + \cos^2\theta = (\dfrac{b}{c})^2 + (\dfrac{a}{c})^2 = \dfrac{b^2 + a^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2} = 1$



範例 5　平方關係 I

平方關係是畢氏定理很自然的結果，非常、非常重要！是最常用的關係式。★★★★★

1. 求 $(\sin 43^\circ - \sin 47^\circ)^2 + (\cos 43^\circ + \cos 47^\circ)^2 =$ ________。

解

KEY　注意角度的數字關係

2. 化簡 $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta =$ ________。

解

3. $\sum_{k=1}^{89}\cos^2 k^\circ =$ ______。

解

KEY
1. 遇 Σ 可展開，幫助了解題意
2. 後半部取餘角，再合併用平方關係

類題 27 $\sin^2 77^\circ+\sin^2 13^\circ=$ ______。

類題 28 $\sin^2(73^\circ+\theta)+\sin^2(17^\circ-\theta)=$ ______。

類題 29 化簡 $\sin^4\theta-\cos^4\theta+2\cos^2\theta=$ ______。

類題 30 化簡 $\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta=$ ______。

類題 31 化簡 $\dfrac{1}{\cos^2 50^\circ}-\dfrac{1}{\tan^2 40^\circ}=$ ______。

類題 32 化簡 $(\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}+1)(\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}+1)=$ ______。

類題 33 $\sum_{k=31}^{60}\sin^2 k^\circ=$ ______。

範例 6 平方關係 II

$\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 給加減問乘積，或反過來求，真是百考不厭！ ★★★★★

1. 銳角 θ，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$，求：⑴ $\sin\theta\cos\theta=$ ______ ⑵ $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ ______。

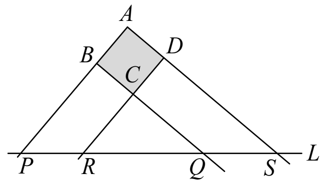
解

KEY
1. 看到 $\sin\theta\pm\cos\theta=\cdots$，馬上想到要平方，重要！
2. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

2. 已知 $0^\circ<\theta<45^\circ$，若 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，求：⑴ $\sin\theta-\cos\theta=$ ______ ⑵ $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=$ ______。

解

3. 平面上有一正方形 $ABCD$，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DA}$ 分別交直線 L 於 P、Q、R、S。已知 $\overline{PR}=6$，$\overline{QS}=8$，則正方形 $ABCD$ 的邊長為________。



解

類題 34 銳角 θ，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，求：(1) $\sin\theta\cos\theta=$________ (2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=$________ (3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=$________ (4) $\sin\theta+\cos\theta=$________。

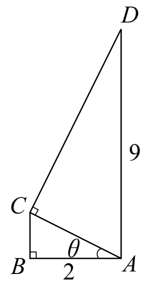
類題 35 $45^\circ<\theta<90^\circ$，若 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，求：

(1) $\sin\theta+\cos\theta=$________ (2) $\sin\theta-\cos\theta=$________ (3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=$________。

類題 36 $\angle A$ 為銳角，若 $2\cos^2 A+5\sin A-4=0$，求 $\angle A=$________。

類題 37 設 $0^\circ<\theta<45^\circ$，若 $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$，求 $\tan\theta=$________。

類題 38 平面上有直角 ΔABC 與直角 ΔACD 如右圖，且 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=9$，令 $\angle BAC=\theta$，求 $\sin\theta+\cos\theta=$________。



範例 7　三角函數的比較與趨勢

由 0° 到 90°，要掌握三角函數值的個別變動與整體比較。★★★★★

1. 設 $a=\dfrac{1}{\tan 21^\circ}$、$b=\dfrac{1}{\sin 20^\circ}$、$c=\tan 70^\circ$、$d=\sin 89^\circ$，比較其大小為________。

解

KEY
常識：
(1) sin 取銳角必小於 1
(2) 若 $45^\circ<\theta<90^\circ$，則 $\tan\theta>1$
(3) 0° 到 90°，$\tan\theta$ 由 0 遞增到 ∞

2. $\angle A$ 與 $\angle B$ 為銳角，則下列選項哪些為真？________

(A) $\sin A < \cos A$ (B) $\sin A < \tan A$ (C) $\tan A < \dfrac{1}{\cos A}$ (D) $(\sin A - 1)(\dfrac{1}{\cos B} - 1) < 0$

(E)若 $A < B$，則 $(\sin A - \sin B)(\cos A - \cos B)(\tan A - \tan B) < 0$。

解

KEY
1. θ 為銳角，則 $0 < \sin\theta < 1$，$0 < \cos\theta < 1$，所以 $\sec\theta > 1$，$\csc\theta > 1$
2. 正數同分母，則分子大者值較大，正數同分子，則分母大者值較小
3. θ 由 0° 增加到 90°，則
(1) $\sin\theta$、$\tan\theta$、$\sec\theta$ 為遞增
(2) $\cos\theta$、$\cot\theta$、$\csc\theta$ 為遞減

類題 39 比較 $\sin 58^\circ$、$\cos 58^\circ$、$\tan 58^\circ$ 的大小為________________。

類題 40 設 $a = \sin 79^\circ$、$b = \cos 13^\circ$、$c = \tan 50^\circ$、$d = \dfrac{1}{\sin 40^\circ}$、$e = 1$，比較其大小為________________。

範例 8 由關係式求三角函數值 解三角函數的方程式，想辦法求值吧！絕對必考！ ★★★★★

1. θ 為銳角，若 $2\sin\theta - \cos\theta = 1$，則 $\sin\theta =$ ________，$\cos\theta =$ ________。

解

KEY
猜猜看！
用 3：4：5
或 5：12：13
或 7：24：25
或 8：15：17，
應該不難猜出答案

2. θ 為銳角，若 $2\cos^2\theta + 7\sin\theta - 5 = 0$，求 $\theta =$ ________。

解

3. 銳角 θ 滿足 $\cos\theta=\tan\theta$，則：(1) $\sin\theta=$ ________ (2) $\cos^2\theta+3\cos^4\theta+\cos^6\theta=$ ________。

解

KEY
1. 可以查表找到 θ 使得 $\cos\theta=\tan\theta$ 成立，θ 約為 $38°10'$
2. 利用 $\cos^2\theta=\sin\theta$，可以把 $\cos\theta$ 的高次方數給降下來

類題 41 θ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{17}{13}$，則 $\tan\theta=$ ________。

類題 42 θ 為銳角，若 $\sin\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$，則：(1) $\cos\theta=$ ________
(2) $\sin^2\theta+\cos^4\theta+\sin^6\theta=$ ______。

類題 43 θ 為銳角，$\cos\theta+\cos^2\theta=1$，求 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=$ ________。

類題 44 θ 為銳角，已知 $\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}=3$，求 $\sin\theta=$ ______。

類題 45 ΔABC 中，$\angle C=90°$，若 $2\cos A+3\cos B=3$，求 $\tan A=$ ______。

類題 46 θ 為銳角，解 $2\sin^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta+1=0$，得 $\theta=$ ______。

範例 9 結合方程式的根與係數

看到二次方程式若不好解，要想到根與係數。 ★★★★★

1. $3x^2-4x+a=0$ 有兩根為 $\sin\theta$、$\cos\theta$，求 $a=$ ________。

解

KEY
$ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 α、β
(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
(2) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2. 若 $x^2-(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta})x+7=0$ 有一根為 $3-\sqrt{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta=$ ________。

解

類題 47 $4x^2-5x+t=0$ 有兩根為 $\sin\theta$、$\cos\theta$，求 $t=$______。

類題 48 θ 為銳角，若 $x^2-(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta})x+1=0$ 有一根為 $2-\sqrt{3}$，求：

(1) $\sin\theta\cos\theta=$______ (2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$______。

類題 49 若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，則 $x^2+(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta})x+1=0$ 的兩根和為______。

範例 10 三角恆等式

注意各小題的證明手法，請靈活運用。 ★★★★☆

1. 證明：$\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{4\tan\theta}{\cos\theta}$。（方法：由繁而簡通分合併）

解

2. 證明：$\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\dfrac{2}{\cos\theta}}{1+\dfrac{2}{\sin\theta}}=\dfrac{1}{\sin\theta}(\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta)$。（方法：兩邊各自化簡後相等）

解

3. 證明：$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$。（方法：左減右化為 0）

解

KEY 重點在分子想化成 0，分母照抄即可

類題 50 證明：$\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$。

類題 51 證明：$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$。

類題 52　證明：$\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}\times\dfrac{1}{\cos^2\theta}$。

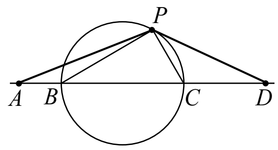
類題 53　證明：$(\tan^2\theta+1)\sin^2\theta+\cos^2\theta-1=\tan^2\theta-\sin^2\theta$。

類題 54　證明：$\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$。

類題 55　設 $f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$，證明：$2f(6)-3f(4)=-1$。

資　優　園　地

1. 如右圖，直線 L 上依序四個點 $A-B-C-D$，$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=1:3:2$，以 $\overline{BC}$ 為直徑作圓，取圓上一點 P，P 不在 L 上，求 $\tan\angle APB\cdot\tan\angle CPD=$ ________。



解

2. ΔABC 為銳角三角形，$\overline{BC}=a$，試證明過 A 的高為 $\overline{AH}=\dfrac{a\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$。

解

3. 設 $\cos A=\cos x\sin C$，$\cos B=\sin x\sin C$，求 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=$ ________。

解

4. 銳角 ΔABC，若 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$ 的中點 M，而 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 於 H，$\overline{MH}=5$，求 $\overline{BC}=$______，$\overline{AH}=$______，$\overline{AM}=$______。【72 年社】

解

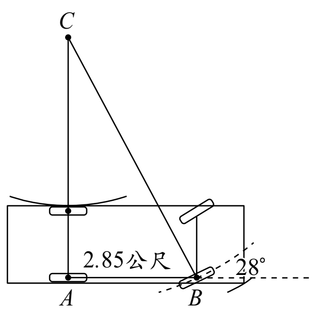
KEY 這一題歷史悠久，但測驗卷還是常常看到，像老酒愈陳愈香

歷屆大考精采試題觀摩

1. 設 H 為銳角三角形 ABC 的垂心（三高之交點），若以 c 表線段 $\overline{AB}$ 之長，則線段 $\overline{AH}$ 之長等於：______
(A) $c\cos A\sin C$ (B) $c\cos A\cos C$ (C) $c\cos A\tan C$ (D) $c\cos A\sec C$ (E) $c\cos A\csc C$。
【89 年自】

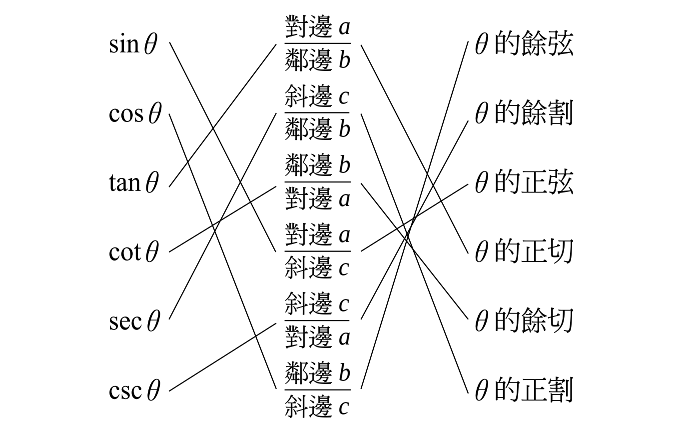
2. 某人在 O 點測量到遠處有一物作等速直線運動。開始時該物位置在 P 點，一分鐘後，其位置在 Q 點，且 $\angle POQ=90^\circ$。再過一分鐘後，該物位置在 R 點，且 $\angle QOR=30^\circ$。請以最簡分數表示 $\tan^2(\angle OPQ)=$______。【91 指考甲】

3. 右圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為______公尺。（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28^\circ\fallingdotseq 0.4695$，$\cos 28^\circ\fallingdotseq 0.8829$）【104 學測】



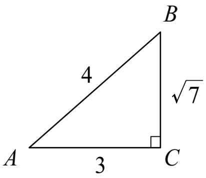
第 *1* 章　三　角

1-1　直角三角形的邊角關係



範例 1

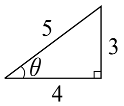
1. $\overline{BC}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，如右圖



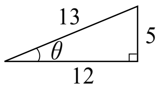
$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\cos A=\dfrac{3}{4}$

$\tan A=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

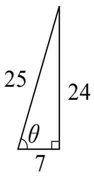
$\sec A=\dfrac{1}{\cos A}=\dfrac{4}{3}$，$\csc A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

2.(1)


$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

(2)


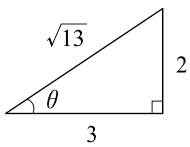
$\therefore \sin\theta=\dfrac{5}{13}$，$\tan\theta=\dfrac{5}{12}$

(3)


$\therefore \sin\theta=\dfrac{24}{25}$，$\cos\theta=\dfrac{7}{25}$

*3.*交叉相乘　$\Rightarrow$　$16\tan\theta-8=\tan\theta+2$　$\therefore \tan\theta=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$

作三角形使鄰邊 3，對邊 2



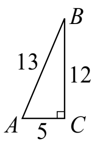
則斜邊 $=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

所求 $=\dfrac{2}{\sqrt{13}}+\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

類 題

1. $\dfrac{12}{13}$；$\dfrac{5}{13}$；$\dfrac{12}{5}$；$\dfrac{5}{12}$；$\dfrac{13}{5}$；$\dfrac{13}{12}$　*2.* $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$；$\dfrac{2}{5}$；$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$；$\dfrac{2}{\sqrt{21}}$；$\dfrac{5}{2}$；$\dfrac{5}{\sqrt{21}}$　*3.* $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$；$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　*4.*(1) $\dfrac{24}{25}$；$\dfrac{7}{24}$ (2) $\dfrac{15}{17}$；$\dfrac{15}{8}$　*5.*(D)　*6.* 51

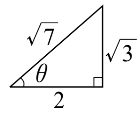
*1.*圖為


*2.*另一股長為 $\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

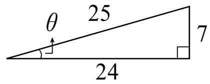
*3.*即 $1+\dfrac{1}{\tan\theta+1}=5-2\sqrt{3}$

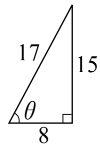
$\therefore \tan\theta+1=\dfrac{1}{4-2\sqrt{3}}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

得 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，作圖如右

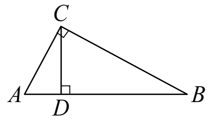


$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

4.(1)為


(2)為


*5.*看 ΔABC



$\because \sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BC}}{1}$　$\therefore \overline{BC}=\sin A$

看 ΔBCD

$\because \cos B=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin A}$

$\therefore \overline{BD}=\sin A\cos B=\sin A\cdot\sin A=\sin^2 A$

$\therefore$選(D)

6. $\angle A=\angle C$（等弧對等圓周角）

且 $\angle APB=90^\circ$（$\because \overline{AB}$ 為直徑）

$\therefore \sin\angle PCB=\sin\angle PAB=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{PB}}{39}=\dfrac{5}{13}$

得 $\overline{PB}=15$，則 $\overline{PA}=\sqrt{39^2-15^2}=36$

故 $\overline{PA}+\overline{PB}=51$

範例 2

1.(1) $\dfrac{1}{2}$；$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；$\sqrt{3}$；$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$；2

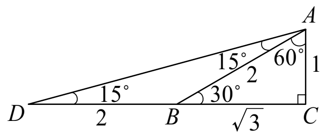
(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；1；1；$\sqrt{2}$；$\sqrt{2}$

*2.*所求 $=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2+\dfrac{2}{1}-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}$

$=\dfrac{1}{4}+2-\dfrac{2}{3}+3=\dfrac{60+3-8}{12}=\dfrac{55}{12}$

3. ΔABC 的邊長為 2、1、$\sqrt{3}$

如右圖



在 $\overrightarrow{CB}$ 上找 D 使 $\overline{BD}=2$

則 ΔABD 為等腰三角形，$\angle D=15^\circ$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(1) $\sin 15^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 75^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

類 題

7. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\dfrac{1}{2}$；$\sqrt{3}$；$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；2；$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　*8.* $\dfrac{1}{2}$　*9.* $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

10. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　*11.* $2-\sqrt{3}$；$2+\sqrt{3}$　*12.*(1) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(2) $\sqrt{2}-1$

13. $\dfrac{1}{3}$；$\sqrt{10}-3$

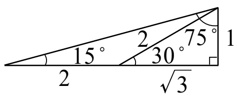
8. 所求 $=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2^2+2^2-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2=\frac{1}{2}$

9. 所求 $=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

10. 即 $1^2-(\frac{1}{2})^2=k(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3})$

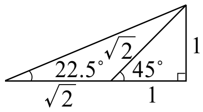
$\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}k \quad \therefore k=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. $\therefore \tan 15^\circ=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$



$\tan 75^\circ=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$

12. 斜邊 $=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

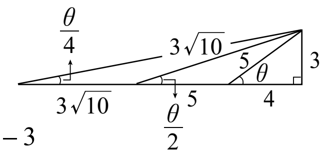


(1) $\sin 22.5^\circ=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

$=\sqrt{\frac{1\times(4-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(2) $\tan 22.5^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

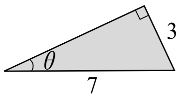
13. 作圖如右

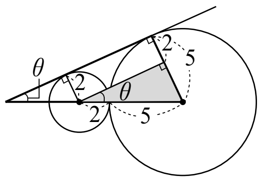


$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5+4}=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\frac{\theta}{4}=\frac{3}{3\sqrt{10}+5+4}=\sqrt{10}-3$

範例 3

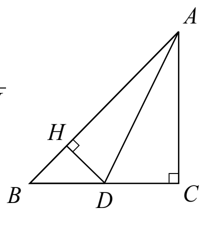
1. 由  知



鄰邊為 $\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$

2. 過 D 作 $\overline{AB}$ 的高為 $\overline{DH}$，令 $\overline{BD}=1$



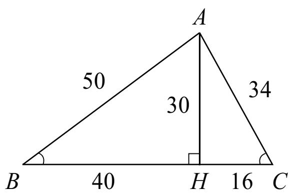
$\overline{AB}=2\sqrt{2}$，$\overline{AD}=\sqrt{5}$

ΔABD 的面積 $=\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\overline{DH}$

$\therefore \overline{DH}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sin\angle BAD=\frac{\overline{DH}}{\overline{AD}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

3. 作高 $\overline{AH}$



由 $\sin B=\frac{3}{5}$ 知

ΔABH 邊長比為 3：4：5

$\therefore \overline{AH}=30$，$\overline{BH}=40$

由 $\cos C=\frac{8}{17}$ 知

ΔACH 邊長比為 8：15：17

$\therefore \overline{HC}=16$，$\overline{AC}=34$

(1) $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}=40+16=56$

(2) ΔABC 的面積 $=\frac{1}{2}\times56\times30=840$

4. (1) $\overline{EF}=\frac{\overline{EF}}{\overline{OF}}=\sin\theta$（看 ΔOEF）

(2) $\overline{OE}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}}=\cos\theta$（看 ΔOEF）

(3) $\overline{AB}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\tan\theta$（看 ΔOAB）

(4) $\overline{CD}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\dfrac{1}{\frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}}=\frac{1}{\tan\theta}$（看 ΔOCD，$\angle CDO=\theta$）

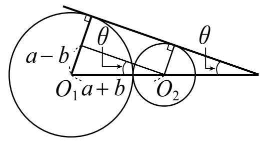
(5) $\overline{OB}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{1}{\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}}=\frac{1}{\cos\theta}$（看 ΔOAB）

(6) $\overline{OD}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\dfrac{1}{\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}}=\frac{1}{\sin\theta}$（看 ΔOCD，$\angle CDO=\theta$）

類 題

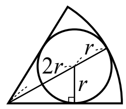
14. $\frac{a-b}{a+b}$ 15. 10 16. $\frac{1}{3}$ 17. $\frac{3}{\sqrt{130}}$ 18. (1) 21 (2) 84 19. (E)
20. (A)(C)

14. 過小圓圓心作外公切線的平行線



$\therefore \sin\theta=\frac{a-b}{a+b}$

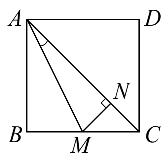
15. 設內切圓半徑為 r



則 $2r+r=3r=30$

$\therefore r=10$

16. M 對 $\overline{AC}$ 的垂足為 N



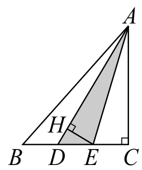
設 $\overline{MN}=1$，則 $\overline{BM}=\overline{MC}=\sqrt{2}$，

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$

$\overline{AN}=\overline{AC}-\overline{NC}=4-1=3$

$\therefore \tan\angle MAC=\frac{\overline{MN}}{\overline{AN}}=\frac{1}{3}$

17. E 對 $\overline{AD}$ 的垂足為 H，



$\overline{AD}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

$\overline{AE}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

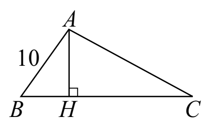
$\because \Delta ADE$ 面積 $=\frac{1}{2}\times1\times3$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\overline{EH}$

$\Rightarrow \overline{EH}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sin\angle DAE=\frac{\overline{EH}}{\overline{AE}}=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{130}}$

18. 如右圖



$\because \sin B=\frac{4}{5}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$，而 $\overline{AB}=10$

$\therefore \overline{AH}=8$，$\overline{BH}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

由 $\cos C=\frac{15}{17}$ 得 $\sin C=\frac{8}{17}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{8}{\overline{AC}}$

$\therefore \overline{AC}=17$，$\overline{HC}=15$

(1) $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}=6+15=21$

(2) ΔABC 的面積 $=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot21\cdot8=84$

19. 在 ΔOBS 中，$\cos 43^\circ=\frac{\overline{OB}}{\overline{OS}}=\frac{1}{\overline{OS}}$

$\therefore \overline{OS}=\frac{1}{\cos 43^\circ}$，選(E)

20.(A)$\sin\theta=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{OF}}=\dfrac{\overline{EF}}{1}$，合

(B)$\cos\theta=\dfrac{\overline{OE}}{\overline{OF}}=\dfrac{\overline{OE}}{1}$，不合

(C)$\tan\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AB}}{1}$，合

(D)$\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{CD}}{1}$，不合

(E)$\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB}}{1}$，不合

(F)$\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{OD}}{1}$，不合

範例 4

1.所求$=\dfrac{(2\sin\theta-5\cos\theta)\times\dfrac{1}{\cos\theta}}{(3\sin\theta+\cos\theta)\times\dfrac{1}{\cos\theta}}=\dfrac{2\tan\theta-5}{3\tan\theta+1}=\dfrac{2\cdot\dfrac{2}{3}-5}{3\cdot\dfrac{2}{3}+1}$

$=\dfrac{-11}{9}$

2.所求$=\dfrac{\sin 23^\circ}{\sin 23^\circ}+\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin(45^\circ+\theta)}{\cos(45^\circ+\theta)}\cdot\dfrac{\sin(45^\circ-\theta)}{\cos(45^\circ-\theta)}$

$=1+1-\dfrac{\sin(45^\circ+\theta)}{\cos(45^\circ+\theta)}\cdot\dfrac{\cos(45^\circ+\theta)}{\sin(45^\circ+\theta)}$

$=1+1-1=1$

3.$\because \tan 89^\circ=\cot 1^\circ=\dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 89^\circ=\tan 1^\circ\times\dfrac{1}{\tan 1^\circ}=1$

同理，$\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ=1$，$\tan 3^\circ\times\tan 87^\circ=1$，…

所求$=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)\times\cdots$

$\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ=1\times1\times1\times\cdots\times1=1$

類 題

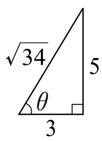
21. $\dfrac{8}{3}$　22. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$　23. $\dfrac{5}{6}$　24. 3　25. 1　26. 0

21.所求$=\dfrac{(2\sin\theta+4\cos\theta)\times\dfrac{1}{\sin\theta}}{(2\sin\theta-\cos\theta)\times\dfrac{1}{\sin\theta}}=\dfrac{2+\dfrac{4}{\tan\theta}}{2-\dfrac{1}{\tan\theta}}=\dfrac{2+4\times\dfrac{1}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}$

$=\dfrac{4}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{8}{3}$

22.移項得$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{3}$，即$\tan\theta=\dfrac{5}{3}$

作圖如右，得$\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$



23.交叉相乘，$68\sin\theta-17\cos\theta=14\sin\theta+28\cos\theta$

$\Rightarrow\quad 54\sin\theta=45\cos\theta$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{45}{54}=\dfrac{5}{6}$

24.所求$=\sin 17^\circ\times\dfrac{1}{\sin 17^\circ}+\cos 31^\circ\times\dfrac{1}{\cos 31^\circ}+\tan 22^\circ\times\dfrac{1}{\tan 22^\circ}$

$=1+1+1=3$

25.$\because \tan 10^\circ\times\tan 80^\circ=\tan 10^\circ\times\cot 10^\circ=\tan 10^\circ\times\dfrac{1}{\tan 10^\circ}=1$

同理 $\tan 20^\circ\times\tan 70^\circ=1$，$\tan 30^\circ\times\tan 60^\circ=1$，

$\tan 40^\circ\times\tan 50^\circ=1$

所求$=1\times1\times1\times1=1$

26.所求$=\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta=1-1=0$

平方關係：$\underline{\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ }$。

範例 5

1.所求$=(\sin^2 43^\circ+\sin^2 47^\circ-2\sin 43^\circ\sin 47^\circ)$

$+(\cos^2 43^\circ+\cos^2 47^\circ+2\cos 43^\circ\cos 47^\circ)$

$=(\sin^2 43^\circ+\cos^2 43^\circ)+(\sin^2 47^\circ+\cos^2 47^\circ)$

$+2(\cos 43^\circ\cos 47^\circ-\sin 43^\circ\sin 47^\circ)$

$=1+1+2(\cos 43^\circ\cos 47^\circ-\cos 47^\circ\cos 43^\circ)=2+0=2$

2.原式$=(\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3+3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$

$+3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1\times(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)+3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1^2=1$

3.所求$=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ$

$=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 44^\circ+\cos^2 45^\circ$

$+\sin^2 44^\circ+\cdots+\sin^2 2^\circ+\sin^2 1^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)$

$+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{共44個}}+(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2=44+\dfrac{1}{2}=\dfrac{89}{2}$

類 題

27. 1　28. 1　29. 1　30. 1　31. 1　32. 2　33. $\dfrac{61}{4}$

27.原式$=\sin^2 77^\circ+\cos^2 77^\circ=1$

28.所求$=\sin^2(73^\circ+\theta)+\cos^2(73^\circ+\theta)=1$

29.原式$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta+2\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

30.原式$=\sin^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta\times1+\cos^2\theta=1$

31.原式$=\dfrac{1}{\cos^2 50^\circ}-\dfrac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 50^\circ}-\dfrac{\sin^2 50^\circ}{\cos^2 50^\circ}=\dfrac{\cos^2 50^\circ}{\cos^2 50^\circ}=1$

32.原式$=(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}+1)(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}+1)$

$=\dfrac{\sin\theta+1+\cos\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta-1+\sin\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1^2}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{(1+2\sin\theta\cos\theta)-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$

33.所求$=\sin^2 31^\circ+\sin^2 32^\circ+\cdots+\sin^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\cdots+\sin^2 60^\circ$

$=\sin^2 31^\circ+\sin^2 32^\circ+\cdots+\sin^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\cos^2 44^\circ$

$+\cdots+\cos^2 31^\circ+\sin^2 60^\circ$

$=(\sin^2 31^\circ+\cos^2 31^\circ)+(\sin^2 32^\circ+\cos^2 32^\circ)+\cdots$

$+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{共14個}}+(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=14+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{61}{4}$

範例 6

1.(1)平方得 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{25}{16}$

$\Rightarrow\quad 2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16}-1=\dfrac{9}{16}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{5}{4}(1-\dfrac{9}{32})=\dfrac{115}{128}$

2.(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad \sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（取負，因 $\sin\theta<\cos\theta$）

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4$

3.設 $\overline{AB}=x$，$\angle DSQ=\theta$

則 $\sin\theta=\dfrac{x}{QS}=\dfrac{x}{8}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{PR}=\dfrac{x}{6}$

$\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore (\dfrac{x}{8})^2+(\dfrac{x}{6})^2=\dfrac{36x^2+64x^2}{64\times 36}=\dfrac{100x^2}{64\times 36}=1$

得 $x^2=\dfrac{64\times 36}{100}$，開根號得 $x=\dfrac{8\times 6}{10}=\dfrac{24}{5}$

類 題

34.(1) $\dfrac{4}{9}$ (2) $\dfrac{13}{27}$ (3) $\dfrac{49}{81}$ (4) $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ 35.(1) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(3) 3 36. 30° 37. $\dfrac{1}{2}$ 38. $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

34.(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{4}{9})=\dfrac{13}{27}$

(3) $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\therefore \sin^4\theta+\cos^4\theta=1^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1-2\times\dfrac{16}{81}=\dfrac{49}{81}$

(4) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{17}{9}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{17}{9}}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

35.(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（取正，因 $45^\circ<\theta<90^\circ$，$\sin\theta>\cos\theta$）

(3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$

36.即 $2(1-\sin^2A)+5\sin A-4=0$

$\Rightarrow\quad 2\sin^2A-5\sin A+2=0$

$\Rightarrow\quad (2\sin A-1)(\sin A-2)=0$

$\Rightarrow\quad \sin A=\dfrac{1}{2}$ 或 2

但 $0<\sin A<1\quad\therefore \sin A=\dfrac{1}{2}$，得 $\angle A=30^\circ$

37.利用 $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

得 $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$

整理得 $2\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=0$

分解得 $(2\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=0$

$\therefore 2\sin\theta=\cos\theta$ 或 $\sin\theta=\cos\theta$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$ 或 1（不合，因 $0^\circ<\theta<45^\circ$）

38. $\angle CAD=90^\circ-\theta$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AD}\times\cos(90^\circ-\theta)=9\sin\theta$

則 $\overline{AB}=\overline{AC}\times\cos\theta=9\sin\theta\cos\theta=2\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{9}$

由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{13}{9}$

得 $\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{13}{9}}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

範例 7

1. $a=\dfrac{\cos 21^\circ}{\sin 21^\circ}=\dfrac{\sin 69^\circ}{\cos 69^\circ}=\tan 69^\circ>1$

$b=\dfrac{1}{\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{\cos 70^\circ}>\dfrac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}=\tan 70^\circ=c>1$

$d=\sin 89^\circ<1\quad\therefore d<a<c<b$

2.(A)×；不一定，在 $0^\circ<A<45^\circ$ 時才對

(B)○；由 $\left.\begin{aligned}\sin A&=\dfrac{\sin A}{1}\\ \tan A&=\dfrac{\sin A}{\cos A}\end{aligned}\right]$ 同分子

$\because\ 1>\cos A\quad\therefore \sin A<\tan A$

(C)○；$\because \tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}<\dfrac{1}{\cos A}$

(D)○；$\because \sin A<1$ 且 $\dfrac{1}{\cos B}>1\quad\therefore$ 負 × 正 <0

(E)×；$\because\ \sin A<\sin B$ 且 $\cos A>\cos B$ 且 $\tan A<\tan B$

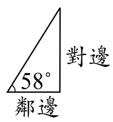
$\therefore$ 負 × 正 × 負 >0 才對

故選(B)(C)(D)

類 題

39. $\tan 58^\circ>\sin 58^\circ>\cos 58^\circ$ 40. $d>c>e>a>b$

39. $\because\ 45^\circ<58^\circ\quad\Rightarrow\quad\tan 58^\circ>1$

而 

知鄰邊 < 對邊

$\therefore \cos 58^\circ<\sin 58^\circ<1$

故得 $\tan 58^\circ>\sin 58^\circ>\cos 58^\circ$

40.先看出 $a<1$，$b<1$，$c>1$，$d>1$，$e=1$

而 $b=\cos 13^\circ=\sin 77^\circ<\sin 79^\circ=a$

而 $d=\dfrac{1}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos 50^\circ}>\tan 50^\circ=c$

$\therefore d>c>e>a>b$

範例 8

1. 移項 $\Rightarrow$ $2\sin\theta = 1+\cos\theta$

平方 $\Rightarrow$ $4\sin^2\theta = 1+2\cos\theta+\cos^2\theta$

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\therefore 4(1-\cos^2\theta) = 1+2\cos\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow$ $5\cos^2\theta+2\cos\theta-3=0$

$\Rightarrow$ $(5\cos\theta-3)(\cos\theta+1)=0$

$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$ 或 -1（不合）

代回原式 $\Rightarrow$ $2\sin\theta-\frac{3}{5}=1$ $\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$

2. 即 $2(1-\sin^2\theta)+7\sin\theta-5=0$

$\Rightarrow$ $2\sin^2\theta-7\sin\theta+3=0$

$\Rightarrow$ $(2\sin\theta-1)(\sin\theta-3)=0$

若 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，得 $\theta=30^\circ$

若 $\sin\theta=3$，無解

3. (1)即 $\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\Rightarrow$ $\cos^2\theta=\sin\theta$

$\Rightarrow$ $1-\sin^2\theta=\sin\theta$ $\Rightarrow$ $\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

公式解得 $\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$（取正）

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) $\because \cos^2\theta=\sin\theta$ $\therefore \cos^4\theta=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\sin\theta$

$\cos^6\theta=\cos^2\theta\cos^4\theta=\sin\theta(1-\sin\theta)$

$=\sin\theta-\sin^2\theta=\sin\theta-(1-\sin\theta)$

$=2\sin\theta-1$

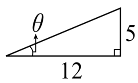
$\therefore$所求 $=\sin\theta+3(1-\sin\theta)+(2\sin\theta-1)=2$

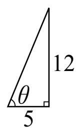
類 題

41. $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{12}$　42. (1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　(2) 1　43. $3+\sqrt{5}$　44. $\frac{4}{5}$

45. $\frac{5}{12}$　46. 30°

41. 《速解》看出 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $\frac{5}{13}$ 與 $\frac{12}{13}$

即 

或 

$\therefore \tan\theta=\frac{5}{12}$ 或 $\frac{12}{5}$

42. (1)即 $\sin\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\Rightarrow$ $\sin^2\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow$ $1-\cos^2\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$\therefore \cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$（取正）$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2)利用 $\sin^2\theta=\cos\theta$ 與 $\cos^2\theta=1-\cos\theta$

而 $\cos^4\theta=(\cos^2\theta)^2=(1-\cos\theta)^2$

$=1-2\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\cos\theta+(1-\cos\theta)=2-3\cos\theta$

$\sin^6\theta=(\sin^2\theta)^3=\cos^3\theta=\cos^2\theta\cdot\cos\theta$

$=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta$

$=\cos\theta-(1-\cos\theta)=2\cos\theta-1$

$\therefore$所求 $=\cos\theta+(2-3\cos\theta)+(2\cos\theta-1)=1$

43. 移項得 $\cos\theta=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

由公式解得 $\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$（取正）$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore$所求 $=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{1-\cos\theta}$

$=\frac{2}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$=3+\sqrt{5}$

44. 即 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}=3$

$\therefore \sin\theta+1=3\cos\theta$

平方 $\Rightarrow$ $\sin^2\theta+2\sin\theta+1=9\cos^2\theta=9(1-\sin^2\theta)$

$\Rightarrow$ $10\sin^2\theta+2\sin\theta-8=0$

$\Rightarrow$ $(5\sin\theta-4)(\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$ 或 -1（不合）$\Rightarrow$ $\sin\theta=\frac{4}{5}$

45. $\because \angle C=90^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle A+\angle B=90^\circ$

即 $2\cos A+3\sin A=3$ $\Rightarrow$ $3\sin A=3-2\cos A$

平方 $\Rightarrow$ $9\sin^2 A=9-12\cos A+4\cos^2 A$

$\Rightarrow$ $9(1-\cos^2 A)=9-12\cos A+4\cos^2 A$

$\Rightarrow$ $0=13\cos^2 A-12\cos A$

$\therefore$得 $\cos A=0$（不合）或 $\frac{12}{13}$

故 $\tan A=\frac{5}{12}$

46. 即 $2(1-\cos^2\theta)-\sqrt{3}\cos\theta+1=0$

$\therefore 2\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-3=0$

公式解得 $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+24}}{4}$（取正）$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta=30^\circ$

範例 9

1. 兩根和 $=\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

平方 $\Rightarrow$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$

兩根積 $=\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{3}$

$\therefore \frac{7}{18}=\frac{a}{3}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{7}{6}$

2. 設另一根為 β

兩根積 $=(3-\sqrt{2})\cdot\beta=\frac{7}{1}$

$\Rightarrow$ $\beta=\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\frac{7\times(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=3+\sqrt{2}$

兩根和 $=(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=-\frac{-(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta})}{1}$

$\Rightarrow$ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=6$

$\Rightarrow$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=6$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$

類　題

47. $\dfrac{9}{8}$　48.(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$　49. -4

47. $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{-5}{4}=\dfrac{5}{4} & \cdots① \\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{t}{4} & \cdots② \end{cases}$

①平方　$\Rightarrow$　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}=\dfrac{t}{4}$，得 $t=\dfrac{9}{8}$

48.(1)另一根 β，則 $(2-\sqrt{3})\cdot\beta=\dfrac{1}{1}$

$\therefore \beta=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

兩根和 $=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\Rightarrow\quad 4=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$（取正）$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

故 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

49.兩根和 $=-(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta})=-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{6}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，得所求 $=-\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=-4$

範例 10

1.左式 $=\dfrac{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{(1+\sin^2\theta+2\sin\theta)-(1+\sin^2\theta-2\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{4\tan\theta}{\cos\theta}=$ 右式，得證

2.左式 $=\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\dfrac{2}{\cos\theta}}{1+\dfrac{2}{\sin\theta}}$

$=\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}\cdot\dfrac{(\cos\theta+2)\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}}{(\sin\theta+2)\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

右式 $=\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore$左式 $=$ 右式

3.左式 $-$ 右式

$=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}-\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta-\cos\theta+1)\cos\theta-(1+\sin\theta)(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta-1)\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta+\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta-1+\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta-1)\cos\theta}$

$=\dfrac{-\cos^2\theta+1-\sin^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta-1)\cos\theta}=0$

$\therefore$左式 $=$ 右式

類　題

50.～55.見詳解

50.左式 $=\dfrac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\dfrac{2+2\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{\cos\theta}=$ 右式，故得證

51.左式 $=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\dfrac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta-\cancel{2(1+\sin\theta)\cos\theta}+(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta+\cancel{2(1+\sin\theta)\cos\theta}}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)+2\cos^2\theta}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2+4\sin\theta+(2\sin^2\theta+2\cos^2\theta)}{(1-\cos^2\theta)+2\sin\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{4(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}=$ 右式，故得證

52.左式 $=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=$ 右式

53.左式 $=(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta})\cdot\sin^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta-\sin^2\theta=$ 右式

54.左式 $=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

右式 $=\dfrac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$\therefore$左式 $=$ 右式

55. $2f(6)-3f(4)$

$=2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)-3\sin^4\theta-3\cos^4\theta$

$=2\sin^4\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta+2\cos^4\theta-3\sin^4\theta-3\cos^4\theta$

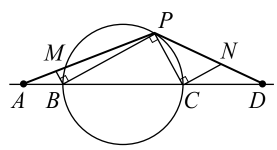
$=-\sin^4\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta-\cos^4\theta$

$=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=-1$

故得證

資　優　園　地

1.過 B 作 $\overline{PC}$ 的平行線交 $\overline{PA}$ 於 M



則 $\overline{MB}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:4$

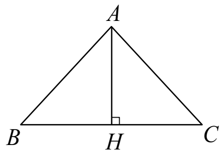
過 C 作 $\overline{PB}$ 的平行線交 $\overline{PD}$ 於 N

則 $\overline{NC}:\overline{PB}=\overline{CD}:\overline{BD}=2:5$

$\therefore \tan\angle APB\cdot\tan\angle CPD=\dfrac{\overline{MB}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{NC}}{\overline{PC}}\underset{\uparrow}{=}\dfrac{\overline{MB}}{\overline{PC}}\cdot\dfrac{\overline{NC}}{\overline{PB}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{10}$

分母對調

2. $\tan B=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$，$\tan C=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$



$\therefore a=\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\dfrac{\overline{AH}}{\tan B}+\dfrac{\overline{AH}}{\tan C}$

$=\overline{AH}\cdot\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C}$

則 $\overline{AH}=\dfrac{a\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$

3. 平方，得 $\cos^2 A=\cos^2 x\sin^2 C\cdots①$

$\cos^2 B=\sin^2 x\sin^2 C\cdots②$

① + ②得 $\cos^2 A+\cos^2 B=\cos^2 x\sin^2 C+\sin^2 x\sin^2 C$

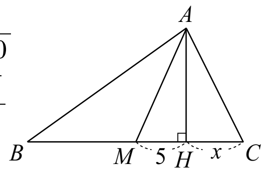
$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C(\cos^2 x+\sin^2 x)=\sin^2 C$

所求 $=\sin^2 A+\sin^2 B+(\cos^2 A+\cos^2 B)=1+1=2$

4. $\because \cos B>\cos C \quad\Rightarrow\quad \angle B<\angle C$

設 $\overline{HC}=x$，則 $\overline{BM}=x+5$

$\cos B=\dfrac{4}{5} \quad\Rightarrow\quad \tan B=\dfrac{3}{4}=\dfrac{\overline{AH}}{x+10}$



$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \quad\Rightarrow\quad \tan C=2=\dfrac{\overline{AH}}{x}$

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{3x+30}{4}=2x$，得 $x=6$

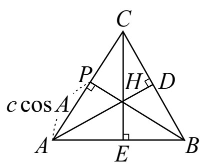
則 $\overline{BC}=2x+10=22$，$\overline{AH}=2x=12$，

$\overline{AM}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

歷屆大考精采試題觀摩

1. 各選項均為 $c\cos A$ 再乘 $\angle C$ 的三角函數

過 B 的高為 $\overline{BP}$，則 $c\cos A=\overline{AP}$



ΔACD 中，$\angle HAP+\angle C=90^\circ$

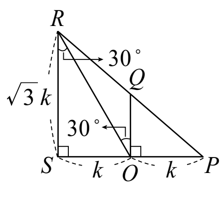
$\therefore \cos\angle HAP=\cos(90^\circ-\angle C)$

$=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AH}}$（$\dfrac{鄰}{斜}$）

即 $\sin C=\dfrac{c\cos A}{\overline{AH}}$

得 $\overline{AH}=\dfrac{c\cos A}{\sin C}=c\cos A\csc C$，選(E)

2. 令 R 投影到 $\overleftrightarrow{OP}$ 為 S，設 $\overline{OP}=k$



$\because \overline{PQ}=\overline{QR} \quad \therefore \overline{OS}=k$

$\because \Delta ORS$ 邊長為 $2：1：\sqrt{3}$

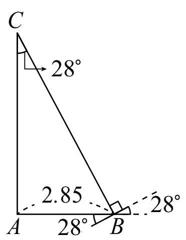
$\therefore \overline{RS}=\sqrt{3}k$

則 $\tan\angle OPQ=\dfrac{\overline{RS}}{\overline{PS}}=\dfrac{\sqrt{3}k}{2k}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan^2(\angle OPQ)=\dfrac{3}{4}$

3. $\angle ABC=90^\circ-28^\circ=62^\circ$

$\angle ACB=90^\circ-62^\circ=28^\circ$



$\sin C=\sin 28^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \therefore 0.4695=\dfrac{2.85}{\overline{BC}}$

得 $\overline{BC}=\dfrac{2.85}{0.4695}\fallingdotseq 6.07\fallingdotseq 6.1$ 公尺

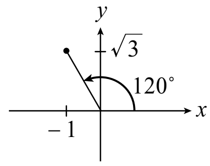
1-2 廣義角與極坐標

範例 1

1. $\theta=360^\circ+150^\circ=510^\circ$

$\phi=-360^\circ\times 2-50^\circ=-770^\circ$

2. 作圖，看出 θ 與 120° 互為同界角



則 $120^\circ+360^\circ\times 10=3720^\circ$

$3720^\circ+360^\circ=4080^\circ$

$4080^\circ+360^\circ=4440^\circ$

$4440^\circ+360^\circ=4800^\circ$

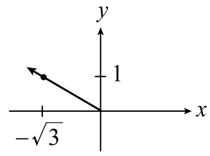
$\therefore \theta=4800^\circ$

3. $2334\div 360=6\cdots 174$

為第二象限角，最小正同界角為 174°

最大負同界角 $=174^\circ-360^\circ=-186^\circ$

4. 作圖如右，看出所求為 150°



5. $0^\circ<\theta<90^\circ$

$\Rightarrow \quad 0^\circ<\dfrac{\theta}{2}<45^\circ$，$\theta$ 在 I

$360^\circ<\theta<450^\circ \quad\Rightarrow\quad 180^\circ<\dfrac{\theta}{2}<225^\circ$，$\theta$ 在Ⅲ

$720^\circ<\theta<810^\circ \quad\Rightarrow\quad 360^\circ<\dfrac{\theta}{2}<405^\circ$，$\theta$ 在 I

⋮

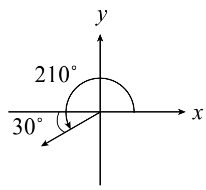
$\therefore \dfrac{\theta}{2}$ 可為第一或第三象限角

類 題

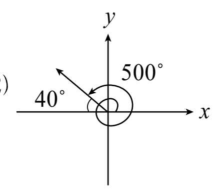
1.(C) 2.見詳解 3. -830° 4.(B)(D) 5.二；170°；-190°
6. $-\sqrt{3}$ 7.三；$267^\circ 19'$；$-92^\circ 41'$ 8.一或二或四

1. $-1000^\circ=-720^\circ-280^\circ$，從 x 軸正向順時針轉 2 圈後，再順時針轉 280°，故選(C)

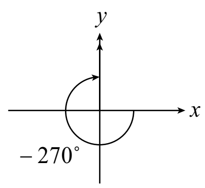
2.(1)



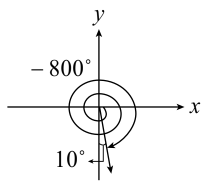
(2)



(3)



(4)



3. $\theta=-360^\circ\times 2-90^\circ-20^\circ=-830^\circ$

4.(A) $-400^\circ+720^\circ=320^\circ$，在第四象限

(B) $-1000^\circ+1080^\circ=80^\circ$，在第一象限

(C) $2000^\circ-1800^\circ=200^\circ$，在第三象限

(D) $4000^\circ\div 360^\circ=11\cdots 40^\circ$，在第一象限

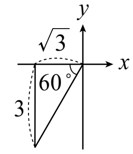
故選(B)(D)

5. $\therefore -19990^\circ$ 與 -190° 為同界角，為第二象限角

$-190^\circ+360^\circ=170^\circ$ 即最小正同界角

$$\begin{array}{r} 55 \\ 360\overline{)19990} \\ 1800 \\ \hline 1990 \\ 1800 \\ \hline 190 \end{array}$$

6.



看出 $k=-\sqrt{3}$

7. $\therefore$ 最小正同界角為 $267^\circ 19'$，為第三象限角

最大負同界角為 $267^\circ 19'-360^\circ$

$=-(360^\circ-267^\circ-19')=-92^\circ 41'$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 360\overline{)3147} \\ 2880 \\ \hline 267 \end{array}$$

對話式®

高中數學 第 3 冊 講義

葉晉宏

[課後練習本]

第 1 回 範圍：1-1　銳角三角函數的定義

1 直角三角形有內角 θ，其對邊為 a，鄰邊為 b，斜邊為 c，問下列哪些正確？________

(A) $\sin\theta=\dfrac{b}{c}$　(B) $\cos\theta=\dfrac{b}{c}$　(C) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$　(D) $\cot\theta=\dfrac{a}{b}$　(E) $\sec\theta=\dfrac{c}{a}$　(F) $\csc\theta=\dfrac{c}{a}$

解

2 θ 為銳角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$________。

解

3 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，則 $\tan B=$________，$\tan A=$________。

解

4 銳角 ΔABC 的面積為 5，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，則 $\cos A=$________。

解

5 已知 θ 為銳角，$\tan\theta=2$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}=$________。

解

6 等腰直角 ΔABC，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A=90^\circ$，$D$ 為 $\overline{AC}$ 中點，求 $\cos\angle DBC=$________。

解

7 圓直徑 $\overline{AB}$ 的長為 26，在圓上取 C、D 兩點使 $ACBD$ 為圓內接四邊形。若 $\sin\angle BCD=\dfrac{12}{13}$，求 $\overline{AD}+\overline{BD}=$________。

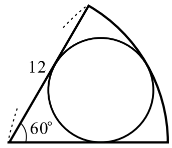
解

第 2 回　範圍：1-1　特別角的三角函數

1 一個正六邊形，邊長為 6，則：⑴外接圓半徑為________，內切圓半徑為__________
⑵截去六個角後成為正十二邊形，求邊長為________。

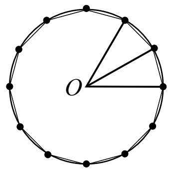
解

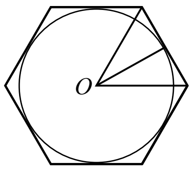
2 扇形的中心角為 60°，半徑 12，求內切圓的半徑為________。



解

3 如右圖，圓的內接正 12 邊形與外切正 6 邊形之面積比值為________。





解

4 $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \tan 45^\circ \cdot \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cdot \csc 30^\circ =$________。

解

5 求 $\dfrac{1}{1+\sin 45^\circ}+\dfrac{1}{1+\cos 30^\circ}-\dfrac{1}{1-\tan 60^\circ}=$________。

解

6 $\dfrac{2\log\tan 60^\circ+\log\tan 45^\circ-3\log\sin 30^\circ+\log 5}{1+\frac{1}{2}\log 36+2\log\dfrac{1}{\cos 45^\circ}}=$________。

解

第 3 回 範圍：1-1　三角函數的關係（Ⅰ）

1 $\angle A$、$\angle B$ 為銳角，若 $\sin 62^\circ = \cos A$，且 $\tan(A+14^\circ) = \cot B$，則 $\angle A + \angle B =$________。

解

2 設 $\tan\theta = 2$，求 $\dfrac{3\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} =$________。

解

3 化簡 $(\sin 50^\circ - \sin 40^\circ)^2 + (\cos 50^\circ + \cos 40^\circ)^2 =$________。

解

4 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ =$________。

解

5 設 $0^\circ < \theta < 45^\circ$，求 $\sin^2(45^\circ + \theta) + \sin^2(45^\circ - \theta) + \tan(45^\circ + \theta)\cdot\tan(45^\circ - \theta) =$________。

解

6 化簡 $1 + \tan^2\theta + (1 - \tan^4\theta)\cos^2\theta =$________。

解

第 4 回 範圍：1-1 三角函數的關係（Ⅱ）

1 θ 為銳角，若 $3\cos^2\theta+5\sin\theta-5=0$，求 $\sin\theta=$________。

解

2 θ 為銳角，若 $\sin\theta=\cos^2\theta$，則 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=$________。

解

3 θ 為銳角，若 $\sin\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$，則：(1) $\cos\theta=$________

(2) $\log_5(\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}-1)=$________。

解

4 若 $\cos\theta+\cos^2\theta=1$，求 $\sin^2\theta+\sin^6\theta+\sin^8\theta=$________。

解

5 $a=\dfrac{1}{\cos 48^\circ}$、$b=\tan 48^\circ$、$c=\sin 48^\circ$、$d=\cos 48^\circ$，則其大小關係為________。

解

6 四個數 $\dfrac{1}{\cos 44^\circ}$、$\sin 46^\circ$、$\cos 47^\circ$、$\dfrac{1}{\sin 48^\circ}$ 中，最大的是________，最小的是________。

解

第 5 回　範圍：1-1　三角函數結合乘法公式、根與係數

1 θ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$，求：(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta=$________ (2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$________

(3) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=$________。

解

2 θ 為銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，求：(1) $\sin\theta+\cos\theta=$________ (2) $\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=$________。

解

3 θ 為銳角，若 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$，求：(1) $\sin\theta+\cos\theta=$________ (2) $\sin\theta-\cos\theta=$________。

解

4 θ 為銳角，若 $\tan\theta-\cot\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求：(1) $\sin\theta+\cos\theta=$________

(2) $\log_2(\tan\theta)\cdot\log_2(\frac{1}{\tan\theta})=$________。

解

5 若 $x^2-(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta})x+1=0$ 有一根為 $2+\sqrt{3}$，求 $\sin\theta\cdot\cos\theta=$________。

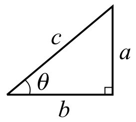
解

6 若 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 為 $5x^2-6x+k=0$ 的兩根，求 $k=$________。

解

第❶回

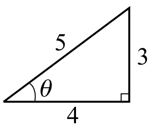
1. $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$，$\cot\theta=\dfrac{b}{a}$，



$\sec\theta=\dfrac{c}{b}$，$\csc\theta=\dfrac{c}{a}$

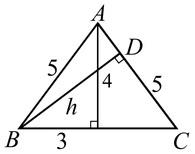
$\therefore$ 選(B)(C)(F)

2. 作圖知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$



所求 $=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{1}{5}$

3. ①

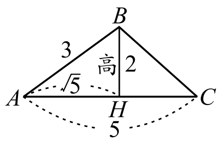


$\therefore\ \tan B=\dfrac{4}{3}$

② ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot h\quad\Rightarrow\quad h=\dfrac{24}{5}$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{25-(\dfrac{24}{5})^2}=\dfrac{7}{5}\qquad\therefore\ \tan A=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{7}{5}}=\dfrac{24}{7}$

4. $\because\Delta ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot$ 高 $=5$

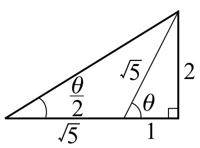


$\Rightarrow$ 高 $=\overline{BH}=2$

$\therefore\overline{AH}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

故 $\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

5. $\because\ \tan\theta=\dfrac{2}{1}$

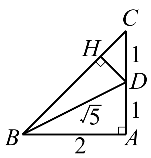


作三角形使兩股為 1 與 2，斜邊 $\sqrt{5}$，

延伸底邊為 $\sqrt{5}+1$

$\therefore\ \tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

6. 設 $\overline{AB}=\overline{AC}=2$，則 $\overline{BD}=\sqrt{5}$



D 對 $\overline{BC}$ 的垂足為 H

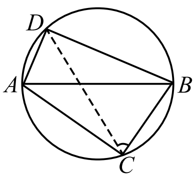
$\because\Delta CHD$ 之邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$

則 $\overline{HC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\overline{BH}=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \cos\angle DBC=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BD}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

7. $\because$ 等弧對等圓周角　$\therefore\ \angle BCD=\angle BAD$



而 $\angle C=\angle D=90^\circ$

$\therefore\ \sin\angle BCD=\sin\angle BAD=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{12}{13}$

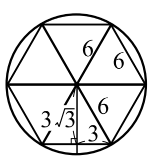
又 $\overline{AB}=26\quad\Rightarrow\quad\overline{BD}=\dfrac{12}{13}\times 26=24$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{26^2-24^2}=10$

故所求 $=10+24=34$

第❷回

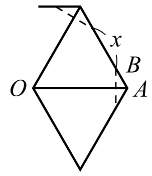
1. ⑴外接圓半徑即邊長 6



內切圓半徑為 $6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

⑵設正十二邊形邊長為 x

$\overline{AB}=\dfrac{6-x}{2}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{6-x}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{x}{2}$

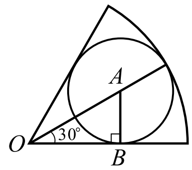


$\Rightarrow\quad 6\sqrt{3}-\sqrt{3}x=2x$

$\therefore\ x=\dfrac{6\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{1}$

$=12\sqrt{3}-18$

2. 設所求為 $\overline{AB}=x$，$\overline{OA}=12-x$

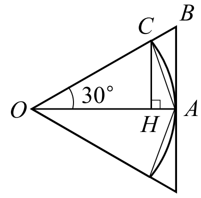


$\because\ \overline{OA}=2\overline{AB}$

$\Rightarrow\quad 12-x=2x$

$\therefore\ x=4$

3. 設半徑 $\overline{OA}=\overline{OC}=r$，$\angle BOA=30^\circ$



圓內接正 12 邊形面積

$=\ \Delta OAC$ 面積 $\times 12=(\dfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{CH})\cdot 12$

$=\dfrac{1}{2}r\cdot r\sin 30^\circ\cdot 12=3r^2$

圓外切正 6 邊形面積

$=\ \Delta OAB$ 面積 $\times 12=(\dfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{BA})\cdot 12$

$=\dfrac{1}{2}r\cdot r\sin 30^\circ\cdot 12=2\sqrt{3}r^2$

$\therefore$ 所求 $=\dfrac{3r^2}{2\sqrt{3}r^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 所求 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot 1+2\cdot 2=\dfrac{3}{4}+1+4=\dfrac{23}{4}$

5. 所求 $=\dfrac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\dfrac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

$=(2-\sqrt{2})+2(2-\sqrt{3})-\dfrac{1+\sqrt{3}}{-2}$

$=\dfrac{13-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$

6. 所求 $=\dfrac{\log(\sqrt{3})^2+\log 1-\log(\frac{1}{2})^3+\log 5}{\log 10+\log 6+\log(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{\log 3+0-\log\frac{1}{8}+\log 5}{\log 120}=\dfrac{\log 120}{\log 120}=1$

第❸回

1. $\sin 62^\circ=\cos A\quad\Rightarrow\quad\angle A=90^\circ-62^\circ=28^\circ$

$\tan(A+14^\circ)=\tan 42^\circ=\cot B$

$\Rightarrow\quad\angle B=90^\circ-42^\circ=48^\circ$

$\therefore$ 所求 $=28^\circ+48^\circ=76^\circ$

2. 所求 $=\dfrac{(3\cos\theta+\sin\theta)\times\frac{1}{\cos\theta}}{(\cos\theta-\sin\theta)\times\frac{1}{\cos\theta}}=\dfrac{3+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{3+2}{1-2}=-5$

3. 原式 $=(\sin^2 50^\circ+\sin^2 40^\circ-2\sin 50^\circ\sin 40^\circ)$

$+(\cos^2 50^\circ+\cos^2 40^\circ+2\cos 50^\circ\cos 40^\circ)$

$=(\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ)+(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ)$

$-2\sin 50^\circ\cos 50^\circ+2\cos 50^\circ\sin 50^\circ$

$=1+1=2$

4. 所求 $=\cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 30^\circ$

$+\sin^2 20^\circ+\sin^2 10^\circ$

$=1+1+1+1=4$

5. $\because$ $45^\circ+\theta$ 與 $45^\circ-\theta$ 互餘

$\therefore$ 所求 $=[\sin^2(45^\circ+\theta)+\cos^2(45^\circ+\theta)]+\tan(45^\circ+\theta)\cdot\dfrac{1}{\tan(45^\circ+\theta)}$

$=1+1=2$

6. 原式 $=1+\tan^2\theta+(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta$

$=(1+\tan^2\theta)+(1+\tan^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=(1+\tan^2\theta)(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=(1+\tan^2\theta)\cdot 2\cos^2\theta=2\cos^2\theta+2\sin^2\theta=2$

第 4 回

1. $\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow$ $3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5=0$

$\Rightarrow$ $-3\sin^2\theta+5\sin\theta-2=0$

$\Rightarrow$ $-(3\sin\theta-2)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ 或 1（不合，因 $0<\sin\theta<1$），故 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$

2. 即 $\sin\theta=1-\sin^2\theta$ $\Rightarrow$ $\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

公式解得 $\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

（取 +，因 $0<\sin\theta<1$）

$\therefore$ 所求 $=\dfrac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

$=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+1$

3. (1) $\because$ $\sin\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\Rightarrow$ $\sin^2\theta=\cos\theta$ $\Rightarrow$ $1-\cos^2\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

公式解得 $\cos\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$（取 +）$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) 所求 $=\log_5[\dfrac{2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}-1]$

$=\log_5(\dfrac{2}{1-\cos^2\theta}-1)=\log_5(\dfrac{2}{\cos\theta}-1)$

$=\log_5(\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}-1)=\log_5(\sqrt{5}+1-1)$

$=\log_5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$

4. $\because$ $\cos\theta+\cos^2\theta=1$ $\Rightarrow$ $\cos^2\theta=1-\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\cos\theta$

$\therefore$ 所求 $=\sin^2\theta+(\sin^2\theta)^3+(\sin^2\theta)^4=\cos\theta+\cos^3\theta+\cos^4\theta$

$=\cos\theta+\cos\theta\cdot\cos^2\theta+(\cos^2\theta)^2$

$=\cos\theta+\cos\theta\cdot(1-\cos\theta)+(1-\cos\theta)^2$

$=\cos\theta+\cos\theta-\cos^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta=1$

5. $a=\dfrac{1}{\cos 48^\circ}>1$，$b=\dfrac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ}>1$，$c=\sin 48^\circ<1$，

$d=\cos 48^\circ<1$

a 與 b 同分母，比較分子得 $a>b$

$\because$ 超過 45° $\Rightarrow$ $c>d$ $\therefore$ $a>b>c>d$

6. ①比 1 大的為 $\dfrac{1}{\cos 44^\circ}$ 與 $\dfrac{1}{\sin 48^\circ}$，而 $\dfrac{1}{\cos 44^\circ}=\dfrac{1}{\sin 46^\circ}$

$\because$ $\sin 46^\circ<\sin 48^\circ$ $\therefore$ $\dfrac{1}{\cos 44^\circ}>\dfrac{1}{\sin 48^\circ}$

② $\because$ $\cos 47^\circ=\sin 43^\circ$ $\Rightarrow$ $\sin 46^\circ>\cos 47^\circ$

$\therefore$ 此四數中，最大為 $\dfrac{1}{\cos 44^\circ}$，最小為 $\cos 47^\circ$

第 5 回

1. (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

$\therefore$ $\sin\theta\cos\theta=(\dfrac{5}{4}-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(1-\dfrac{1}{8})=\dfrac{7\sqrt{5}}{16}$

(3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=8$

2. $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{4}$

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{7}{4}}$（取 +）$=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(2) $\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{1-2\times\dfrac{9}{64}}{\dfrac{9}{64}}=\dfrac{\dfrac{46}{64}}{\dfrac{9}{64}}=\dfrac{46}{9}$

3. (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$（取 +）$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

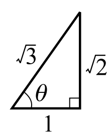
$\therefore$ $\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. 即 $\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ $\tan^2\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan\theta-1=0$

公式解得 $\tan\theta=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}+4}}{2}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}{2}$（取 +）$=\sqrt{2}$

(1)作三角形，如右圖



$\Rightarrow$ $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

(2) $\log_2(\tan\theta)\cdot\log_2(\dfrac{1}{\tan\theta})$

$=\log_2\sqrt{2}\cdot\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{4}$

5. $\because$ 兩根積為 $\dfrac{1}{1}$ $\therefore$ 另一根為 $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

兩根和為 $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\Rightarrow$ $4=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\therefore$ $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

6. 兩根和 $=\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{6}{5}$

平方 $\Rightarrow$ $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{36}{25}$

$\therefore$ $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{11}{50}$

兩根積 $=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{5}$ $\therefore$ $\dfrac{11}{50}=\dfrac{k}{5}$，得 $k=\dfrac{11}{10}$