數學考科

超越顛峰

歷屆學科能力測驗試題の精粹

106 學年度學科能力測驗數學考科試題分析

東山高中 數學科教師／李善文

壹、試題分析

一、各題出處、中心概念、難易度

題　號	出題範圍	中心概念	難易度
單選 *1.*	第一冊單元一 數與式	日常生活中比率的計算	中偏易
單選 *2.*	第一冊單元三 指數、對數函數	指數律的應用	中偏易
單選 *3.*	第四冊單元四 二次曲線	雙曲線的圖形及其漸近線的相關位置與拋物線部分圖形的狀況	中
單選 *4.*	第四冊單元一 空間向量	空間中兩質點在運動中之距離的變化	中
單選 *5.*	第二冊單元四 數據分析	散布圖的製作與正、負相關及相關性強弱的判斷	中
單選 *6.*	第三冊單元一 三角	角度的度度量與弳度量（弧度）的定義與角之餘弦值的大小比較	中
單選 *7.*	第二冊單元二 排列、組合	加法原理、乘法原理及排列計數的綜合應用	中偏難
多選 *8.*	第一冊單元二 多項式函數	兩單項式函數的圖形之相異交點個數即為它們相應之方程式的相異實根；邏輯推理	中偏難
多選 *9.*	第三冊單元二 圓與直線	圓心與圓的內部及外部各一點之位置關係與圓心所在象限及半徑大小的判定	難
多選 *10.*	第四冊單元二 空間中的平面與直線	空間中兩直線的相交情形（平行、相交於一點及歪斜）的判斷及判定兩直線是否共一平面	中
多選 *11.*	第三冊單元一 三角	畢氏定理、正弦定理與餘弦定理的應用	中
多選 *12.*	第二冊單元二 排列、組合	集合元素之個數的計算；邏輯推理	中偏難
多選 *13.*	第三冊單元三 平面向量 第四冊單元一 空間向量	向量內積的定義及其性質的應用；兩向量內積的值與其夾角為銳角、直角與鈍角的關係	中偏難
選填 *A*	第一冊單元二 多項式函數 第二冊單元一 數列與級數	遞迴數列與差值多項式的應用	中
選填 *B*	第三冊單元三 平面向量	三點共線與向量的線性組合係數間的關係與坐標表示法的係數積	中
選填 *C*	第一冊單元二 多項式函數	整係數多項式方程式的有理根判別及根與係數的關係之應用	中偏難
選填 *D*	第二冊單元一 數列與級數 第四冊單元二 空間中的平面與直線 第四冊單元三 矩陣	等差數列與三元一次聯立方程組有解的應用，或由方程組的增廣矩陣利用列運算判斷	中
選填 *E*	第一冊單元一 數與式 第一冊單元三 指數、對數函數	分點公式與對數性質的應用	中
選填 *F*	第二冊單元三 機率	古典機率的計算	中偏易
選填 *G*	第三冊單元一 三角 第三冊單元二 圓與直線	圓的直徑就是其兩平行切線的距離	中偏難

二、各冊占分

冊　別	第一冊	第二冊	第三冊	第四冊
配　分	20 分	30 分	25 分	25 分

今年學測試題之分布，若以四冊來論，各冊分配尚稱均衡，第二冊較第一冊重些。因為學測試題總共只有 20 題，即使跨單元結合不同概念來命題也不可能涵蓋所有章節，但每年都會出現一些近年較沒有考的課綱內容（如度度量與弳度量（弧度）的定義與角之餘弦值的大小比較），較特別的是歷年常考的和角公式、三角測量及矩陣的運算性質與轉移矩陣、反方陣等矩陣的應用皆沒有命題，頂多有些題目可應用方程組的增廣矩陣，利用列運算判斷來解題，但不是唯一的解題方法。

三、題型分配

學測題型有單選、多選及選填三種，總題數為 20 題，每題 5 分，共 100 分。每年各類型題數略有不同，最近幾年單選、多選之題數互有多寡或相等，但總共題數不超過 13 題，而選填題數大多為 7 或 8 題。今年三種題型之題數為單選 7 題、多選 6 題、選填 7 題，亦與去年一樣題數最相近，只不過單選、多選題數互換。

四、難易度分析

難易度	題　號	題　數	占　分	比　例
中偏易	單選 *1.*、*2.*、選填 *F*	3	15	15%
中	單選 *3.*、*4.*、*5.*、*6.*、多選 *10.*、*11.*、選填 *A*、*B*、*D*、*E*	10	50	50%
中偏難	單選 *7.*、*8.*、多選 *12.*、*13.*、選填 *C*、*G*	6	30	30%
難	多選 *9.*	1	5	5%

筆者認為今年學測試題沒有簡易的題目，也沒有非常難的試題，只有一題勉強算是難的試題，難度適中的試題占了一半，有少部分中偏易的試題及三成中偏難的試題。試題內容雖不算難，但不像往年較容易看出所考的內容，幾乎每題都包裝過，必須耐心看懂題意，分析、推理並拆解包裝才能解題。雖然沒有繁雜的計算，但對中下程度的同學仍相當不利，中等程度及中上程度的同學若一時慌了，也未必能表現平時的水準，只有上等程度的同學不受影響且能拿到 95 分以上的高分。

今年試題中多選題的答案仍是兩個或三個選項，只有一題正確答案為一個，一般同學不容易全答對，應頗具鑑別度，筆者認為前標、均標、後標及底標應皆較去年降 1 級分。

貳、特殊試題分析

一、【單選 *1.*】日常生活中可能遇到的情境題，完全不需要深入的數學知識，只要耐心看完試題，有基礎判斷能力就能答對的題目，可鑑別學生的耐性與閱讀能力。但此題有一點瑕疵，選項(D)全校師生人數容易讓學生解讀為全校老師人數及學生人數，所以若將選項(D)改為全校師生「總」人數，就完美了。

二、【單選 *7.*】此題為加法原理、乘法原理及排列計數的綜合應用，較往年排列與組合的試題難，但還好出在單選題，算錯可重新檢視，若出在選填題，答對率應更低。

三、【多選 *9.*】此題為圓心與圓的內部及外部各一點之位置關係與圓心所在象限及半徑大小的判定，且此題只有一個正確選項，必須整體觀念非常清楚才能答對，算是綜合評量的考題，也是一般學生認為在此份試題中較難的一題。

四、【選填 G】此題評量考生是否能由情境拆解包裝，將求圓的直徑轉為求其兩平行切線的距離，若想得到就簡單，想不到就不知道題目在說什麼。

參、其他分析與應考對策

今年試題所考各單元之概念幾乎與去年完全一樣，連順序都一樣，都是平常學校常考的題型，但不同的是每題都包裝過，著重閱讀與理解題目的能力，必須耐心看懂題意，才會覺得親切，且必須觀念清楚才能想到好的、快速的解題方法。因為大多數試題必須具有綜合各概念之連結能力才能答對，所以對中下程度的學生而言的確有一定難度，對中等程度及中上程度但平常沒有確實理解只靠記憶、觀念不是非常清楚的同學，此次考試不容易拿高分，而對上等程度的同學只要不粗心就能拿高分，所以此份試題是蠻有鑑別度的。

近年來大考中心持續非常用心、謹慎地選題，藉由考試導正老師的教學方法及學生正確學習的態度，尤其今年更著重分析與推理的能力，相信今後會慢慢收到效果。同學只要仔細研讀課本，選擇適當的一本參考書，自己整理概念，將平常做錯的試題確實訂正並理解，而非只靠記憶，就能在考試中獲得佳績。下面提供給不同程度的同學一些老生常談但確有實效的應考策略：

一、對於程度較差的同學

1. 收集近十年的學測、指考乙試題，刪除過時的章節試題，將其餘題目回歸課本各章節的觀念、定理，配合上述的分類，將同系列的這些定理的敘述、使用時機確實掌握清楚，多做幾次相關的課本範例、隨堂練習與習題。
2. 務必捨棄冷門的、繁雜的、特殊技巧的題型，坊間一般的總複習講義多半選了較多的題型，對程度差的同學毫無助益。
3. 想要進步，在數學上該花的時間是不能少的，數學程度之所以差，就是因為之前沒有深入理解且練習太少所導致，把應該還給數學的練習時間還了，數學才可能有起色。

二、對於程度中等的同學，應把學測目標定在前標甚至頂標

1. 先把課本的公式、定理弄清楚並記牢使用條件，至於證明則量力而為。
2. 除了坊間新版的參考書之外，也可以配合近五年的學測及指考數乙試題做練習，刪除舊課綱的部分，剩下的題目對於自身程度的增長仍頗有助益。
3. 每章節複習完要做模擬試題檢驗複習成效，較理想的進度是一章花一週半複習，四冊共十四章，複習完一輪大約五個月，最後一個月做總複習衝刺。
4. 所有考卷錯誤都要詳細檢討、訂正，**最好能準備一本筆記專門整理以往做錯的題目，考前短短幾十分鐘看這最有效**。

三、對於程度優等的同學，基本都有前標水準，應保持水準並往頂標甚至滿級分邁進

1. 總複習時請把課本相關的證明自行演算一次，不單是為了學測，也是為了往後大學的學習方式做準備。
2. 觀念弄清之後，可收集近十年的大學學測及指考甲試題做練習，對於做不出來的題目，請多花心思去想相關定理，而非直接翻閱解答，這是最差的學習方式。
3. 每週要安排模擬試題做檢測，程度優秀的同學應該有能力做到一週複習一章，大約三到四個月可以複習完一輪。

4. 做大範圍的模擬試題或考古題作為最後衝刺。因為範圍大，所以不是重點的部分就不會出現。做愈多的考題（注意：自己做而不是看解答做）就是幫自己複習愈多次，關鍵時刻才不會忘記。

肆、結論

數學的學習，沒有一步登天的技巧，你付出的愈多，收穫才會愈多。誠實的面對自己的問題，尋求解決之道，不要輕易的放棄，程度的提升不是立竿見影的。或許有時候覺得花了時間卻沒有成效，甚至成績更差，但實際上你比以前更會思考而不自知。若能對自己有信心並持續努力，一旦達到一定水準，厚積而薄發，成績一定會突飛猛進。

11 106學年度學科能力測驗

第一次練習____月____日完成 分數____
第二次複習____月____日完成 分數____
第三次衝刺____月____日完成 分數____

頂標（11級） 100～62.9分 優秀！你成功守住自己的獵場！
前標（ 9級）62.8～50.3分 你奪得頂標的決心比奇萊山還堅定！
均標（ 6級）50.2～31.4分 加油！只有英勇的靈魂才能不斷向前
後標（ 3級）31.3～12.5分 你是要入挫敗的黑洞嗎？
底標（ 2級）12.4～ 6.3分 再不關掉 Facebook，怎能過彩虹橋？

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1. 題至第 7. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

______ 1. 已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1，而學生玩過的比率為 r_2，其中 $r_1 \neq r_2$。由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項。

(A)全校老師與學生比率
(B)全校老師人數
(C)全校學生人數
(D)全校師生人數
(E)全校師生玩過「寶可夢」人數 【第一冊單元一 數與式】

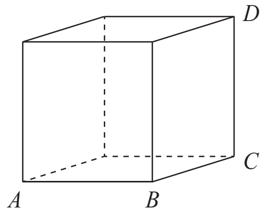
______ 2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(A) 1.7　(B) 3　(C) 5.2
(D) 9　(E) 81 【第一冊單元三 指數、對數函數】

______ 3. 設 Γ：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 為坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為 ℓ。考慮動點 (t,t^2)，從時間 $t=0$ 時出發。當 $t>0$ 時，請選出正確的選項。

(A)此動點不會碰到 Γ，也不會碰到 ℓ
(B)此動點會碰到 Γ，但不會碰到 ℓ
(C)此動點會碰到 ℓ，但不會碰到 Γ
(D)此動點會先碰到 Γ，再碰到 ℓ
(E)此動點會先碰到 ℓ，再碰到 Γ 【第四冊單元四 二次曲線】

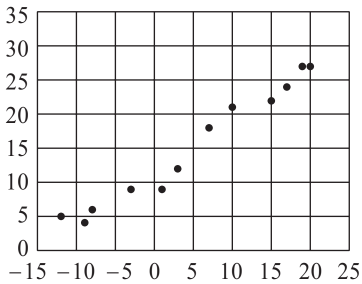
_______ 4. 在右圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A、C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B、D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B、D。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。



(A)兩質點的距離固定不變
(B)兩質點的距離愈來愈小
(C)兩質點的距離愈來愈大
(D)在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小
(E)在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大

【第四冊單元一 空間向量】

_______ 5. 右圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x）與最高溫（縱軸 y）的散布圖。今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散布圖。試依此選出正確的選項。



(A)最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
(B)最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
(C)最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
(D)最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
(E)最高溫與溫差為零相關

【第二冊單元四 數據分析】

_______ 6. 試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \le \cos x$？

(A) 0 個　(B) 1 個　(C) 2 個
(D) 4 個　(E)無窮多個

【第三冊單元一 三角】

_______ 7. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
(甲)每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
(乙)連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

(A) 52　(B) 60　(C) 68
(D) 76　(E) 84

【第二冊單元二 排列、組合】

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8. 題至第 13. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

______ 8. 設 m、n 為小於或等於 4 的相異正整數且 a、b 為非零實數。已知函數 $f(x)=ax^m$ 與函數 $g(x)=bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項。

(A) m、n 皆為偶數且 a、b 同號

(B) m、n 皆為偶數且 a、b 異號

(C) m、n 皆為奇數且 a、b 同號

(D) m、n 皆為奇數且 a、b 異號

(E) m、n 為一奇一偶 【第一冊單元二 多項式函數】

______ 9. 設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0,0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2,6)$ 在 Γ 的內部。請選出正確的選項。

(A) Γ 的圓心不可能在第二象限

(B) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

(C) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於 10

(D) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於 10

(E) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10 【第三冊單元二 圓與直線】

______ 10. 坐標空間中有三直線 L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$，$L_2$：$\begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$，$L_3$：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t$ 為實數。請選出正確的選項。

(A) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直

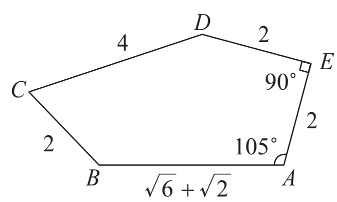
(B) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直

(C) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_2

(D) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_3

(E) 有一個平面同時包含 L_2 與 L_3 【第四冊單元二 空間中的平面與直線】

______ 11. 最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如右。關於這五邊形，請選出正確的選項。



(A) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$

(B) $\angle DAB=45^\circ$

(C) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$

(D) $\angle ABD=45^\circ$

(E) ΔBCD 的面積為 $2\sqrt{2}$ 【第三冊單元一 三角】

______ 12. 某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

(A) $x+y=39$

(B) $y\le 11$

(C)三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人

(D)三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人

(E)三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人　【第二冊單元二 排列、組合】

______ 13. 空間中有一四面體 $ABCD$。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

(A) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(B)若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角

(C)若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角

(D)若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角

(E)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角　【第三冊單元三 平面向量】、【第四冊單元一 空間向量】

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（⑭～㉞）。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\ge 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=12$，則 $a_5=$ ___⑭⑮___。　【第一冊單元二 多項式函數】、【第二冊單元一 數列與級數】

B. 在坐標平面上，ΔABC 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=(\frac{4}{3},\frac{5}{6})$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。若 A、P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M，則 $\overrightarrow{AM}=(\frac{⑯⑰}{⑱⑲},\frac{⑳㉑}{㉒㉓})$。（化成最簡分數）　【第三冊單元三 平面向量】

C. 若 a 為正整數且方程式 $5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$ 的根都是有理根，則 $a=$ ___㉔___。
【第一冊單元二 多項式函數】

D. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組 $\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 \end{cases}$ 有解，則 $k=$ ___㉕㉖___。
【第二冊單元一 數列與級數】、【第四冊單元二 空間中的平面與直線】、【第四冊單元三 矩陣】

E. 設 a、b、x 皆為正整數且滿足 $a \le x \le b$ 及 $b-a=3$。若用內插法從 $\log a$、$\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為 $\log x \fallingdotseq \frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)+\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)$，則 x 的值為 ㉗㉘ 。

【第一冊單元一 數與式】、【第一冊單元三 指數、對數函數】

F. 一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為 $\frac{㉙}{㉚㉛}$ 。（化成最簡分數）

【第二冊單元三 機率】

G. 地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 ㉜㉝.㉞ 公尺。

【第三冊單元一 三角】、【第三冊單元二 圓與直線】

第11回 自我檢測表

說明 請在框內打「v」，針對答錯的題目作記號，三次練習、三次驗收。答錯的題目依照「關鍵字」尋找它的觀念出處，把不熟的地方再複習一遍吧！

題號/關鍵字	三次作答結果 1	2	3
1. 比率的計算	□	□	□
2. 指數律的應用	□	□	□
3. 拋物線、雙曲線的圖形	□	□	□
4. 空間中兩動點的距離變化	□	□	□
5. 散布圖、相關性強弱的判斷	□	□	□
6. 弧度的定義與餘弦值大小比較	□	□	□
7. 排列組合	□	□	□
8. 單項函數的圖形	□	□	□
9. 圓與直線	□	□	□
10. 空間中兩直線的關係	□	□	□

題號/關鍵字	三次作答結果 1	2	3
11. 正弦定理、餘弦定理的應用	□	□	□
12. 集合元素個數的計算	□	□	□
13. 向量內積的應用	□	□	□
A. 遞迴數列	□	□	□
B. 向量的線性組合	□	□	□
C. 整係數一次因式檢驗法	□	□	□
D. 三元一次聯立方程組	□	□	□
E. 對數性質的應用	□	□	□
F. 古典機率	□	□	□
G. 圓與直線、兩平行線間的距離	□	□	□

本書參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上兩點 $P_1(x_1\,,y_1)$，$P_2(x_2\,,y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3. 通過 $(x_1\,,y_1)$ 與 $(x_2\,,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$

4. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r（$r\neq 1$）的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

5. 級數公式：$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

7. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

8. 【選修】棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 為一正整數

9. 一維數據 X：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}((\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2)-n\mu_X{}^2)}$

10. 二維數據 (X,Y)：$(x_1\,,y_1),(x_2\,,y_2),\cdots,(x_n\,,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

    迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

11. 【選修】常態分布：常態分布的資料對稱於平均數 μ，且當標準差為 S 時，該資料大約有 68% 落在區間 $(\mu-S,\mu+S)$ 內，約有 95% 落在區間 $(\mu-2S,\mu+2S)$ 內，約有 99.7% 落在區間 $(\mu-3S,\mu+3S)$ 內。

12. 【選修】95% 信心水準下的信賴區間：$\left[\hat{p}-2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,,\hat{p}+2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

13. 參考數值：$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41\fallingdotseq 4$，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.732$，$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$，$\sqrt{6}\fallingdotseq 2.449$，$\pi\fallingdotseq 3.142$，$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

    $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

14. 對數值：$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$，$\log_{10}3\fallingdotseq 0.4771$，$\log_{10}5\fallingdotseq 0.6990$，$\log_{10}7\fallingdotseq 0.8451$

15. 角錐體積 $=\dfrac{1}{3}$ 底面積 $\times$ 高

得 A 亦在平面 BDG 上

此與 A、B、C、D 四點不共面矛盾，故得 $a=\frac{4}{3}$

《方法二》適當建立坐標系

令 $\overrightarrow{AB}=p$、$\overrightarrow{AD}=q$、$\overrightarrow{AE}=r$

因為 $ABCD-EFGH$ 為一長方體

建立坐標系：

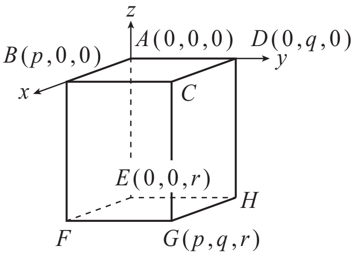
以 A 為原點

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$ 分別為

x 軸、y 軸、z 軸的正向

則 $B(p,0,0)$、$D(0,q,0)$、

$E(0,0,r)$、$G(p,q,r)$



所以 $\overrightarrow{BD}=(-p,q,0)$

$\overrightarrow{BG}=(0,q,r)$

得 $\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BG}=(\begin{vmatrix} q & 0 \\ q & r \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & -p \\ r & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -p & q \\ 0 & q \end{vmatrix})=(qr\,,pr\,,-pq)$

為平面 BDG 的一法向量

由點法式知平面 BDG 的方程式為 $qrx+pry-pqz=pqr$

又 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(p,0,0)+2(0,q,0)+a(0,0,r)$

$=(\frac{p}{3},2q,ar)$

得 P 之坐標為 $(\frac{p}{3},2q,ar)$。因為已知 P 在平面 BDG 上

所以 $(qr)\frac{p}{3}+pr(2q)-pq(ar)=pqr$

得 $apqr=\frac{4}{3}pqr$，故得 $a=\frac{4}{3}$

《方法三》適當建立坐標系

令 $\overrightarrow{CD}=p$、$\overrightarrow{CB}=q$、$\overrightarrow{CG}=r$

因為 $ABCD-EFGH$ 為一長方體

建立坐標系：

以 C 為原點

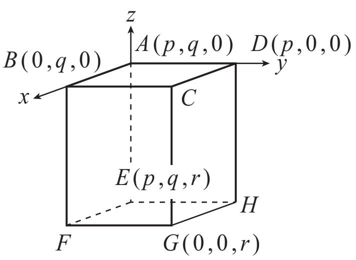
$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CG}$ 分別為

x 軸、y 軸、z 軸的正向，

則 $D(p,0,0)$、$B(0,q,0)$、

$G(0,0,r)$、$A(p,q,0)$、

$E(p,q,r)$



由截距式得平面 BDG 方程式為

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$

即 $qrx+rpy+pqz=pqr$

又已知 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(-p,0,0)+2(0,-q,0)+a(0,0,r)$

$=(-\frac{1}{3}p,-2q,ar)$

得 P 之坐標為 $(\frac{2}{3}p,-q,ar)$。因為已知 P 在平面 BDG 上

所以 $\frac{2}{3}pqr-pqr+apqr=pqr$，得 $apqr=\frac{4}{3}pqr$

故得 $a=\frac{4}{3}$

11 106學年度學科能力測驗

1.(A) 2.(C) 3.(E) 4.(D) 5.(D) 6.(A) 7.(B) 8.(A)(C)

9.(E) 10.(B)(C)(D) 11.(A)(D) 12.(B)(E) 13.(C)(E)

A. ⑭ 2 ⑮ 5

B. ⑯ 4 ⑰ 0 ⑱ 2 ⑲ 1 ⑳ 2 ㉑ 5 ㉒ 2 ㉓ 1

C. ㉔ 7 D. ㉕ − ㉖ 5

E. ㉗ 4 ㉘ 7 F. ㉙ 9 ㉚ 6 ㉛ 4

G. ㉜ 1 ㉝ 4 ㉞ 4

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1

而學生玩過「寶可夢」的比率為 r_2，其中 $r_1\neq r_2$

設該校老師與學生人數分別為 m 及 n

則玩過「寶可夢」的老師與學生人數分別為 mr_1 及 mr_2

可得全校師生玩過「寶可夢」的比率公式為 $\frac{mr_1+nr_2}{m+n}$

(A)若知道全校老師與學生的比率 r，即知道 $m=nr$，雖不知 m 及 n 確切的值，仍可得全校師生玩過「寶可夢」的比率

$\frac{nrr_1+nr_2}{nr+n}=\frac{rr_1+r_2}{r+1}$

(B)只知道全校老師人數 m，是無法得知全校學生人數 n

(C)只知道全校學生人數 n，是無法得知全校老師人數 m

(D)只知道全校老師與學生總人數 $m+n$，是無法得知 m 與 n 的確切值

(E)只知道全校師生玩過「寶可夢」的總人數 mr_1+nr_2，是無法得知 m 與 n 及 $m+n$ 的確切值

所以只知(B)(C)(D)(E)選項之個別的資訊皆無法算出全校師生玩過「寶可夢」的比率 $\frac{mr_1+nr_2}{m+n}$

故選(A)

2. 由已知得 $b^8=81^3$

所以 $b=(81^3)^{\frac{1}{8}}=[(3^4)^3]^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}\fallingdotseq 5.196$

所以 b 最接近選項中的數值 5.2

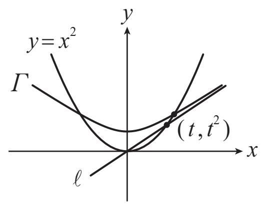
故選(C)

3. 因為 Γ：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 表一上下開口的雙曲線

且其通過第一象限之漸近線 ℓ 的方程式為 $\frac{y}{a}-\frac{x}{b}=0$（即 $y=\frac{a}{b}x$）

而動點 (t,t^2) 從時間 $t=0$ 出發

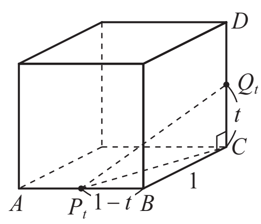
當 $t>0$ 時，此動點的軌跡為開口



向上之拋物線 $y=x^2$ 在 y 軸右側（即第一象限內）的部分圖形，且由下而上移動，所以此動點會先碰到 ℓ 再碰到 Γ

故選(E)

4. 因為右圖的正方體上有兩質點分別自頂點 A、C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B、D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B、D，為方便（不失一般原則性）我們



令此正方體的邊長為 1 單位，並令 t 秒時兩質點的位置分別為 P_t 與 Q_t，其中 $0 \le t \le 1$（如圖所示）

則由畢氏定理知 t 秒時兩質點的距離為

$$\overline{P_tQ_t} = \sqrt{(1-t)^2+1^2+t^2} = \sqrt{2t^2-2t+2} = \sqrt{2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}$$

所以兩質點的距離由開始 $t=0$ 時的 $\sqrt{2}$ 單位逐漸變小

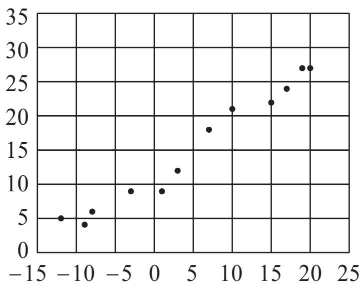
到 $t=\frac{1}{2}$ 秒時有最小值 $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 單位，然後再逐漸變大

到 $t=1$ 秒時回到原開始的距離 $\sqrt{2}$ 單位

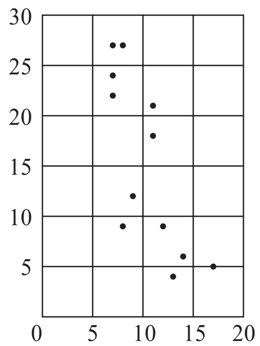
故選(D)

5. 依題目所給某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸）與最高溫（縱軸）散布圖（如圖㈠）

重新繪製以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸，且最高溫為縱軸之散布圖（如圖㈡）



圖㈠



圖㈡

由於圖㈡為左上往右下之趨勢，且散布圖中的點較分散，不像圖㈠中的點那麼密集在一直線附近，所以可知最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

故選(D)

6. 因為實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 時，$-1 \le \cos x \le 0$

且 $1.57^\circ \fallingdotseq (\frac{\pi}{2})^\circ \le x \le (\frac{3\pi}{2})^\circ \fallingdotseq 4.71^\circ$，得知 $\cos x^\circ > 0$

所以沒有實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 且使 $\cos x^\circ \le \cos x$

故選(A)

7. 依題意小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫有下列兩種類型，並令 N 表麵食、R 表飯食

①三天 N 二天 R：由限制條件知順序只有 $NRNRN$ 一種形式

所以有 $C_1^2 \times \frac{3!}{2!1!} \times 2! = 12$ 種安排法

②二天 N 三天 R：由限制條件知順序有 $RRNRN$、$RNRNR$、$NRNRR$、$RNRRN$、$NRRNR$、$NRRRN$ 六種形式

其中 $RRNRN$、$NRNRR$、$RNRRN$ 與 $NRRNR$ 皆有 $2! \times 2! \times 2 = 8$ 種安排法

$RNRNR$ 有 $C_1^2 \times \frac{3!}{2!1!} \times 2! = 12$ 種安排法

$NRRRN$ 有 $2! \times C_1^2 \times 1 = 4$ 種安排法

所以小明五天的午餐計畫在題目的限制條件下共有

$12+8\times 4+12+4=60$ 種安排法

故選(B)

二、多選題

8. 因為 m、n 為小於或等於 4 的相異正整數，且 a、b 為兩非零實數函數 $f(x)=ax^m$ 與函數 $g(x)=bx^n$ 的圖形恰有 3 個交點，即 $ax^m-bx^n=0$ 有 3 個相異實根

為方便（不失一般原則性），我們令 $m>n$

(A)(B)當 m、n 均為偶數時，則 $m=4$，$n=2$

得 $ax^m-bx^n=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^4-bx^2=0$

$\Leftrightarrow \quad ax^2(x^2-\frac{b}{a})=0$

所以 m、n 均為偶數時，只有 a、b 同號時，

$ax^m-bx^n=0$ 才有 3 個相異實根，故(A)○，(B)×

(C)(D)當 m、n 均為奇數時，則 $m=3$，$n=1$

得 $ax^m-bx^n=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^3-bx=0$

$\Leftrightarrow \quad ax(x^2-\frac{b}{a})=0$

所以 m、n 均為奇數時，只有 a、b 同號時，

$ax^m-bx^n=0$ 才有 3 個相異實根，故(C)○，(D)×

(E)×；當 m、n 為一奇一偶時，則 $\begin{cases} m=4 \\ n=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=4 \\ n=1 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$，其中

$\begin{cases} m=4 \\ n=3 \end{cases}$ 時，得 $ax^m-bx^n=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^4-bx^3=0$

$\Leftrightarrow \quad ax^3(x-\frac{b}{a})=0$，有 2 個相異實根

$\begin{cases} m=4 \\ n=1 \end{cases}$ 時，得 $ax^m-bx^n=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^4-bx=0$

$\Leftrightarrow \quad ax(x^3-\frac{b}{a})=0$，有 2 個相異實根

$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$ 時，得 $ax^m-bx^n=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^3-bx^2=0$

$\Leftrightarrow \quad ax^2(x-\frac{b}{a})=0$，有 2 個相異實根

$\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$ 時，得 $ax^m-bx^n=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2-bx=0$

$\Leftrightarrow \quad ax(x-\frac{b}{a})=0$，有 2 個相異實根

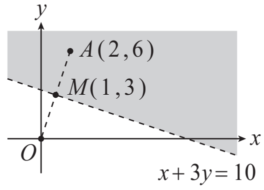
所以 m、n 為一奇一偶時，$ax^m-bx^n=0$ 恰有 2 個相異實根

故選(A)(C)

9. 令圓 Γ 的圓心為 $K(a,b)$，半徑為 r，O 表原點，A 表坐標為 $(2,6)$ 之點

因為 O 在圓 Γ 的外部且 A 在圓 Γ 的內部，所以 $\overline{KA} < r < \overline{KO}$

所以 $K(a,b)$ 在線段 $\overline{OA}$ 之垂直平分線 L：$x+3y=10$ 的右側半平面 H 上，如右圖所示



(A)×；圓 Γ 的圓心為 $K(a,b)$ 可能在第二象限

【例如】K 的坐標為 $(-2,9)$ 且 $r=6$ 時，

$\overline{KA}=5<6=r<\sqrt{85}=\overline{KO}$，所以滿足題意

(B)×；因為半平面 H 不含第三象限的點，所以 Γ 的圓心不可能在第三象限

(C)×；Γ 的圓心 K 在第一象限時，半徑為 r 不一定小於 10

【例如】K 的坐標為 $(10,12)$ 且 $r=12$ 時，

$\overline{KA}=10<12=r<\sqrt{244}=\overline{KO}$

此時 Γ 的圓心 K 在第一象限，半徑 r 大於 10

(D)×；K 在 x 軸上時，則 $a>10$，$b=0$，得

$r>\overline{KA}=\sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}>\sqrt{(10-2)^2+36}=10$

(E)○；K 在第四象限時，則 $a>10$，$b<0$，得

$r>\overline{KA}=\sqrt{(a-2)^2+(b-6)^2}>\sqrt{(10-2)^2+36}=10$

所以圓 Γ 的圓心可能在第四象限且半徑大於 10

故選(E)

10. 因為 L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$ 之一方向向量為 $(2,2,1)$，

且過點 $(1,-1,0)$

L_2：$\begin{cases}x-2y+2z=-4\\x+y-4z=5\end{cases}$ 之一參數式為 $\begin{cases}x=2+2t\\y=3+2t\text{，}t\in R\\z=t\end{cases}$

（令 $z=t$，可解得 $x=2+2t$，$y=3+2t$）

L_2 之一方向向量為 $(2,2,1)$，但點 $(1,-1,0)$ 不在 L_2 上，故得知 L_1 與 L_2 平行

L_3：$\begin{cases}x=-t\\y=-2-t\text{，}t\in R\\z=4+4t\end{cases}$ 之一方向向量為 $(-1,-1,4)$，

且過點 $(1,-1,0)$，又 $(2,2,1)\cdot(-1,-1,4)=-2-2+4=0$，所以 L_1 與 L_3 為垂直於點 $(1,-1,0)$ 之兩直線

(A)×；因為 $(2,2,1)$ 皆為 L_1 與 L_2 之一方向向量，所以 L_1 與 L_2 之方向向量互相平行

(B)○；因為向量 $(2,2,1)$ 與向量 $(-1,-1,4)$ 垂直，所以 L_1 與 L_3 之方向向量互相垂直

(C)○；因為 L_1 與 L_2 平行，所以恰有一平面包含 L_1 與 L_2

(D)○；因為 L_1 與 L_3 垂直於點 $(1,-1,0)$，所以恰有一平面包含 L_1 與 L_3

(E)；因為 L_2 之方向向量 $(2,2,1)$ 與 L_3 之方向向量 $(-1,-1,4)$ 不平行，且 L_2 與 L_3 不相交

（因為 $\begin{cases}2+2t=-s\\3+2t=-2-s\\t=4+4s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s+2t=-2\\s+2t=-5\\4s-t=-4\end{cases}$ 明顯 (s,t) 無解）

得知 L_2 與 L_3 為兩歪斜線，所以不會有一平面包含 L_2 與 L_3

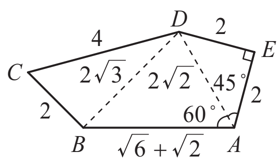
故選(B)(C)(D)

11. (A)○；因為 ΔAED 中 $\angle AED=90^\circ$

$\overline{EA}=\overline{ED}=2$

所以由畢氏定理知

$\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$



(B)×；因為 $\angle BAE=105^\circ$，又由(A)可知 $\angle DAE=45^\circ$

所以 $\angle DAB=\angle BAE-\angle DAE=105^\circ-45^\circ=60^\circ$

(C)×；由餘弦定理知

$\overline{BD}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot(2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\cos 60^\circ}$

$=\sqrt{8+8+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\dfrac{1}{2}}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(D)○；由正弦定理知 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

所以 $\sin\angle ABD=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

又大邊對大角，所以 $\angle ABD<60^\circ$，得知 $\angle ABD=45^\circ$

(E)×；由已知及前述所求，可得 ΔBCD 中

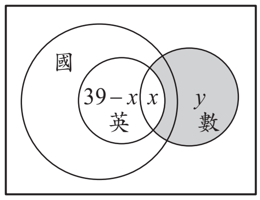
$\overline{BC}^2+\overline{BD}^2=2^2+(2\sqrt{3})^2=16=4^2=\overline{CD}^2$

得 $\angle CBD=90^\circ$

所以 ΔBCD 的面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

故選(A)(D)

12. 由題意知全班有 50 人，其中國文、英文與數學及格的人數分別為 45、39 及 34，且英文及格的學生國文也及格，並設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人（陰影區域）



(A)×；因為 $x+y$ 就是數學及格的人數

所以 $x+y=34$

(B)○；因為 $39+y$ 是英文及格或數學及格的人數

所以 $39+y\le 50$，故知 $y\le 11$

(C)×；因為英文及格的學生國文也及格，所以英文與數學皆及格的人數就是國文、英文與數學三科皆及格的人數，故知至少有一科不及格的人數為 $50-x$，而 $39-x+y$ 是數學及格但英文不及格與英文及格但數學不及格人數的和，並未含有三科皆不及格的人數

(D)(E)因為 $x+y=34$，且 $0\le y\le 11$，所以 $23\le x\le 34$，

得 $16\le 50-x\le 27$，所以知至少有一科不及格的學生數最少有 16 人，最多有 27 人，故(D)×，(E)○

故選(B)(E)

13. 已知四面體 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(A)×；$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-0+0+|\overrightarrow{AD}|^2=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(B)×；若 $\angle BAC=90^\circ$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

所以 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2>0$

所以 $\angle BDC$ 為銳角

(C)○；若 $\angle BAC$ 為銳角，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$

所以 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$

所以 $\angle BDC$ 為銳角

(D)×；若 $\angle BDC$ 為鈍角，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$

但 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 不一定小於 0

所以 $\angle BDC$ 不一定為鈍角

【例如】$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$ 時，滿足題意且 $\angle BAC$ 為鈍角

但 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4-1=3>0$

所以 $\angle BDC$ 為銳角

(E)○；若 $\overline{AB}<\overline{DA}$，且 $\overline{AC}<\overline{DA}$

則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\angle BAC>-\overline{AB}\cdot\overline{AC}>-\overline{AD}\cdot\overline{AD}$

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overline{AD}^2>0$

得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$

所以 $\angle BDC$ 為銳角

故選(C)(E)

第貳部分：選填題

A. 因為遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$，其中 $n \geq 2$，$n \in R$，且 $f(x)$ 為二次多項式

又已知 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 5$，$a_4 = 12$，令 $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

得 $C = f(0) = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$A + B + C = f(1) = a_3 - a_2 = 5 - 2 = 3$

$4A + 2B + C = f(2) = a_4 - a_3 = 12 - 5 = 7$

所以解得 $C = 1$，$B = 1$，$A = 1$，即 $f(x) = x^2 + x + 1$

（也可利用牛頓插值法或拉格朗日插值法求 $f(x)$）

故得 $a_5 = a_4 + f(3) = 12 + 9 + 3 + 1 = 25$

B. 因為點 P 在 ΔABC 內

滿足 $\overrightarrow{AP} = (\frac{4}{3}, \frac{5}{6})$ 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

又 A、P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M，所以 A、P、M 三點共線

所以存在實數 t，使得 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AP}$

於是得 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AP} = t(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}) = \frac{t}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{5}\overrightarrow{AC}$

因為 B、M、C 三點共線，所以 $\frac{t}{2} + \frac{t}{5} = 1$，得 $t = \frac{10}{7}$，

故得 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AP} = \frac{10}{7}(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}) = (\frac{40}{21}, \frac{25}{21})$

C. 因為多項式 $5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1$ 之奇次項係數和與偶次項係數和相等，所以 $x + 1$ 為 $5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1$ 之因式

利用綜合除法得

$5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1 = (x+1)[5x^2 + (a-1)x + 1]$

又已知 a 為正整數，且方程式 $5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1$ 的根皆為有理根

所以二次方程式 $5x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ 之兩根皆為有理數

而由有理根的判別法知：$5x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ 之所有可能的有理根只有 1、-1、$\frac{1}{5}$、$-\frac{1}{5}$ 四個

又 $5x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ 兩根乘積為 $\frac{1}{5}$，兩根和為 $\frac{1-a}{5} \leq 0$

所以 $5x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ 的兩根為 -1 與 $-\frac{1}{5}$

所以 $\frac{1-a}{5} = -1 - \frac{1}{5}$，故得 $a = 7$

D. 因為 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ 為等差數列

所以 $a_1 + a_7 = 2a_4$，$a_2 + a_8 = 2a_5$，$a_3 + a_9 = 2a_6$

又 k 為實數，且方程組 $\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k+1 \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k-5 \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k+9 \end{cases}$ 有解

令 (α, β, γ) 為其一組解，則

$a_1\alpha - a_2\beta + 2a_3\gamma = k + 1 \cdots$①，$a_4\alpha - a_5\beta + 2a_6\gamma = -k - 5 \cdots$②

$a_7\alpha - a_8\beta + 2a_9\gamma = k + 9 \cdots$③

①$+$③$-2\times$②得

$(a_1 + a_7 - 2a_4)\alpha - (a_2 + a_8 - 2a_5)\beta + 2(a_3 + a_9 - 2a_6)\gamma$

$= (k+1) + (k+9) - 2(-k-5)$

所以 $4k + 20 = 0$，得 $k = -5$

E. 因為 a、b、x 皆為正整數且滿足 $a \leq x \leq b$ 及 $b - a = 3$

已知若用內插法從 $\log a$、$\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$\frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b = \frac{1}{3}(1 + 2\log 3 - \log 2) + \frac{2}{3}(4\log 2 + \log 3)$

又 $\frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b = \frac{1}{3}(1 + 2\log 3 - \log 2) + \frac{2}{3}(4\log 2 + \log 3)$

$= \frac{1}{3}\log 45 + \frac{2}{3}\log 48$

所以 $x - a = \frac{2}{3}(b - a)$ 且 $a = 45$，$b = 48$

故得 $x = 45 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 47$

F. 設 $\vec{i} = (1, 0)$，$\vec{j} = (0, 1)$，由題意知樣本空間

$S = \{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \mid \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \{\vec{i}, \vec{j}, -\vec{i}, -\vec{j}\}\}$

所求事件 $A = \{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \in S, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}\}$

因為樣本空間 S 中的元素為由 $\vec{i}, \vec{j}, -\vec{i}, -\vec{j}$ 四個向量中任取四個的重複排列，所以 $n(S) = 4^4 = 256$

而事件 A 中的元素為四個相異向量 $\vec{i}, \vec{j}, -\vec{i}, -\vec{j}$ 的直線排列

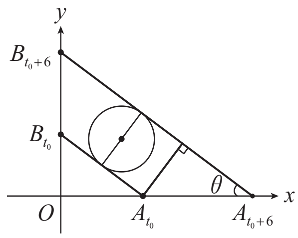
或不盡相異物 $\vec{i}, \vec{i}, -\vec{i}, -\vec{i}$ 的直線排列

或不盡相異物 $\vec{j}, \vec{j}, -\vec{j}, -\vec{j}$ 的直線排列

所以 $n(A) = 4! + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!2!} = 24 + 6 + 6 = 36$

故所求機率為 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{36}{256} = \frac{9}{64}$

G. 因甲乙兩人從同地點同時開始移動，令此點為原點 O，又甲以每秒 4 公尺向東等速移動，而乙以每秒 3 公尺向北等速移動，令朝東的方向為 x 軸正向，朝北的方向為 y 軸正向，A_t 及 B_t 分別表甲與乙開始移動 t 秒時的位置



依題意若 $t = t_0$ 時，甲乙兩人互望的視線開始被圓柱體建築物擋住，則 $t = t_0 + 6$ 時，甲乙兩人互望的視線又可望見對方

《方法一》

因為 $\overline{A_{t_0}A_{t_0+6}} = 4 \times 6 = 24$，令 $\angle OA_tB_t = \theta_t$

因為 $\tan\theta_t = \frac{3t}{4t} = \frac{3}{4}$

所以 θ_t 為定角 θ，$\tan\theta = \frac{3}{4}$

所以圓柱體的直徑就是兩平行線 $\overleftrightarrow{A_{t_0}B_{t_0}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{t_0+6}B_{t_0+6}}$ 的距離

$= 24 \times \sin\theta = 24 \times \frac{3}{5} = \frac{72}{5} = 14.4$

《方法二》

可求 $\overleftrightarrow{A_{t_0}B_{t_0}}$：$3x + 4y = 12t_0$

$\overleftrightarrow{A_{t_0+6}B_{t_0+6}}$：$3x + 4y = 12(t_0 + 6)$

圓柱體的直徑就是兩平行線 $\overleftrightarrow{A_{t_0}B_{t_0}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{t_0+6}B_{t_0+6}}$ 的距離

$\frac{|12(t_0+6) - 12t_0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{72}{5} = 14.4$